Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 517:519.4 *МАТЕМАТИКА*

Э. В. КИССИН

C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И N-МЕРНЫМИ ВЗВЕШЕННЫМИ СДВИГАМИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 29 V 1974)

Пусть D—C^*-алгебра с единицей, D_0 — ее центр, а B — такая C^*-алгебра, что $D\subset B$ и существует унитарный элемент $u\in B$, определяющий автоморфизм d C^*-алгебры D: $a\mapsto u^*au$ и такой, что линейные комбинации $\sum_{i=k}^{n} a_iu^i$, $a_i\in D$, $-\infty<k\leqslant n<\infty$, плотны в B. C^*-алгебра D_0, изоморфная алгебре $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на компактном пространстве максимальных идеалов Ω алгебры D_0, инвариантна относительно автоморфизма d, который порождает гомеоморфизм t компакта Ω. Орбитой в Ω относительно t называется множество точек $\{\omega_n\}$, $-\infty<n<\infty$, таких, что $t\omega_n=\omega_{n-1}$. Иногда вместо B будем писать $B(D, d)$.

Пусть π — некоторое неприводимое представление C^*-алгебры B в гильбертовом * пространстве H_π. Известно, что H_π разлагается в ортогональную сумму подпространств H_m, $0\leqslant m<\infty$, каждое из которых изоморфно $L^2_{\mu_m}(\Omega)$, где μ_m — некоторые меры на Ω. Можно считать при этом, что среди мер μ_m существует максимальная мера μ_0^π, которой все меры μ_m подчинены, см. (1).

Теорема 1. *Мера μ_0^π квазиинвариантна относительно t и гомеоморфизм t эргодичен. μ_0^π — либо непрерывная, либо атомическая мера. Если μ_0^π — атомическая мера, то множество точек ненулевой меры совпадает с одной из орбит гомеоморфизма t.*

Теорема 2. а) *Если мера μ_0^π непрерывна, то C^*-алгебра $\pi(B)$ не содержит компактных операторов.*

б) *Если D—GCR-алгебра, а μ_0^π — атомическая мера и если орбита $\{\omega_n\}$ гомеоморфизма t, на которой лежат все точки ненулевой меры, бесконечна и состоит из изолированных точек, то $\pi(B)$ содержит все компактные операторы. Если орбита конечна и каждому неприводимому представлению коммутативной C^*-алгебры D_0, определяемому точкой орбиты, соответствует единственное неприводимое представление C^*-алгебры D, то C^*-алгебра $\pi(B)$ содержит все компактные операторы.*

в) *Если μ_0^π — атомическая мера и орбита $\{\omega_n\}$ гомеоморфизма t бесконечна, то представления $\pi_{\omega_n}=\pi|D|H_{\omega_n}$ алгебры D в пространствах $H_{\omega_n}=\{x\in H_\pi, \pi(a_f)x=f(\omega_n)x$ для всех $f(\omega)\in C(\Omega)\}$ ** неприводимы. Если орбита $\{\omega_n\}$ состоит из неизолированных точек и представления π_{ω_n} тоже не изолированы между собой в двойственном к C^*-алгебре D пространстве $\hat{D}$, то в $\pi(B)$ нет компактных операторов.*

Теорема 3. *Каждой орбите $\{\omega_n\}$ в Ω относительно t соответствует такое неприводимое представление π C^*-алгебры B, что μ_0^π — атомическая мера и все ее точки ненулевой меры лежат на этой орбите. При этом разным орбитам соответствуют неэквивалентные представления.*

---

* Все рассматриваемые в статье гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

** Через a_f обозначен элемент алгебры D_0, соответствующий функции $f(\omega)\in C(\Omega)$.

Пусть D — C^*-алгебра с единицей, все неприводимые представления которой имеют размерность, меньшую или равную N. (Такие алгебры изучались в [2].) Тогда $\hat{D}=\bigcup_{k=1}^{N} P^k(D)$, где $P^k(D)$ — множество всех k-мерных неприводимых представлений алгебры D, рассматриваемых с точностью до эквивалентности, будет локально-компактным хаусдорфовым пространством. Автоморфизм d алгебры D порождает гомеоморфизм T пространства $\hat{D}$ и множества $P^k(D)$ инвариантны относительно T. Из теорем 2 и 3 следует

Теорема 4. *Пусть D—C^*-алгебра с единицей, все неприводимые представления которой имеют размерность, меньшую или равную N.*

1) *Для того чтобы у C^*-алгебры B не было неприводимых представлений, содержащих в своих образах компактные операторы, необходимо и достаточно, чтобы в $\hat{D}$ не было орбит относительно гомеоморфизма T, состоящих из изолированных точек.*

2a) *Если C^*-алгебра D имеет счетную систему образующих, то для того чтобы B была* GCR-*алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы каждая орбита в $\hat{D}$ относительно T состояла из изолированных точек.*

б) *Если B—*GCR-*алгебра, то существует взаимно однозначное соответствие между орбитами в $\hat{D}$ относительно T и классами эквивалентных неприводимых представлений C^*-алгебры B, конечным орбитам при этом соответствуют конечномерные представления.*

3) *Для того чтобы две* GCR-*алгебры $B^1(D^1, d_1)$, $B^2(D^2, d_2)$, под-C^*-алгебры D^1, D^2 которых имеют счетные системы образующих, были изоморфны, достаточно, чтобы существовал изоморфизм φ алгебры D^1 на D^2, для которого $\varphi\circ d_1=d_2\circ\varphi$.*

Оператор G называется N-мерным двусторонним взвешенным сдвигом, если G унитарно эквивалентен оператору S, определенному в гильбертовом пространстве $H=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\oplus C^N$ по формуле

$$S(\ldots x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ldots)=(\ldots A_{-1}x_{-1},\ A_0x_0,\ A_1x_1,\ldots),$$

где x_i — N-мерные векторы, A_i — положительные N-мерные матрицы, называемые матричными весами оператора G, вектор A_ix_i стоит на $i-1$ месте и последовательность $\{\{A_i\}\}=\sup_{1\leqslant p,\ q\leqslant N}|(A_i)_{pq}|$, где $(A_i)_{pq}$ — матричные элементы матрицы A_i, ограничена. Через S_k обозначим положительный оператор в H, действующий по формуле

$$S_k(\ldots x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ldots)=(\ldots A_{-1-k}x_{-1},\ A_{-k}x_0,\ A_{1-k}x_1,\ldots),$$

где вектор $A_{i-k}x_i$ стоит на i месте, а через U_0 — унитарный оператор двустороннего сдвига,

$$U_0(\ldots x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ldots)=(\ldots x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ldots), \tag{1}$$

где вектор x_i в правой части формулы (1) стоит на $i-1$ месте. Обозначим через D C^*-алгебру с единицей, порожденную операторами S_k, $-\infty<k<\infty$. Так как $U_0^*S_kU_0=S_{k+1}$, оператор U_0 определяет автоморфизм d C^*-алгебры D. Можно показать, что все неприводимые представления C^*-алгебры D имеют размерность, меньшую или равную N. Если оператор G обратим, то порожденная им C^*-алгебра $B(G)$ изоморфна C^*-алгебре, порожденной операторами U_0 и S_k, $-\infty<k<\infty$. Следовательно, на C^*-алгебру $B(G)$ переносятся результаты теоремы 4. Обозначим через $U(N)$ группу унитарных матриц порядка N. Используя теорему 4 и топологию в пространстве $\hat{D}$, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы C^*-алгебра $B(G)$, порожденная обратимым N-мерным оператором двустороннего сдвига G с матричными весами*

A_i, $-\infty<i<\infty$, была GCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности целых чисел $\{n_j\}$, $j=1, 2,\ldots$ (среди n_j может быть бесконечно много одинаковых чисел), для которой при всех целых i существуют $\lim\limits_{j\to\infty} A_{n_j-i}$, и для любого минимального k-мерного проектора E, для которого $\lim\limits_{j\to\infty} [A_{n_j-i}E-EA_{n_j-i}]=0$ при всех i, выполнялось одно из условий:

1) *Существуют унитарная матрица $U\in U(N)$ и целое число $M>0$ такие, что для всех целых i*

$$E(\lim_{j\to\infty} A_{n_j-M-i})E=U^*E(\lim_{j\to\infty} A_{n_j-i})EU.$$

2) *Существуют целое число $M>0$ и число $\mu>0$ такие, что для любой матрицы $U\in U(N)$ и для любого целого $n\neq 0$*

$$\sup_{|i|\leqslant M} \{\{U^*E(\lim_{j\to\infty} A_{n_j-n-i})EU-E(\lim_{j\to\infty} A_{n_j-i})E\}\}\geqslant\mu,$$

где $\{\{A\}\}=\sup\limits_{1\leqslant p,\ q<N} |A_{pq}|$, A_{pq} — матричные элементы матрицы A.

Все дальнейшие теоремы статьи следуют из теоремы 5.

Определение. Обозначим через τ^n сдвиг на n единиц в множестве Z целых чисел: $\tau^n(i)=i-n$, а через $\{m\}$ — множество $i\in Z$, $|i|\leqslant m$. Множество $K\subset Z$ назовем **периодическим множеством периода** M, если M — наименьшее положительное число такое, что $\tau^M(K)=K$. Множество целых чисел $n, n+1, \ldots, n+m$ назовем **отрезком длины** m.

Теорема 6. *Пусть G — обратимый N-мерный двусторонний сдвиг с матричными весами A_i, R — фиксированная положительная матрица порядка N, а K — такое множество целых чисел, что пересечения $\tau^n(K)\cap K$ бесконечны лишь для конечного числа $n=n_1,\ldots,n_K$. Если $A_i=R$ для всех $i\in K$, то $B(G)$ — GCR-алгебра.*

Теорема 7. *Пусть G — обратимый N-мерный оператор двустороннего взвешенного сдвига с матричными весами A_i, $-\infty<i<\infty$; R_1, R_2 — такие положительные матрицы N-го порядка, что порожденная ими алгебра будет полной матричной алгеброй и R_2 не представима в виде U^*R_1U, где $U\in U(N)$, K — некоторое множество целых чисел, и пусть $A_i=R_1$, $i\in K$; $A_i=R_2$, $i\notin K$. Для того чтобы $B(G)$ была GCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы K было либо периодическим множеством, либо таким, что:*

1) *существует целое $m>0$, для которого при всех $n\neq 0$*

$$[\tau^n(\{m\}\cap K)\cap(Z\setminus K)]\cup[\tau^n(\{m\}\cap(Z\setminus K))\cap K]\neq\emptyset;$$

2) *для любого подмножества $K_1\subset K$ такого, что для каждого n одно из множеств $\tau^n(K_1)\cap K$, $\tau^n(K_1)\cap(Z\setminus K)$ конечно,*

а) *либо $N(K_1, K)=\{n\in Z,\ \tau^n(K_1)\cap K$ конечно$\}$ — периодическое множество,*

б) *либо существует такое целое число $m_{K_1}>0$, что для любого $n\neq 0$ найдется целое i, $|i|\leqslant m_{K_1}$, для которого одно из множеств*

$$[\tau^{n+i}(K_1)\cap K]\cup[\tau^i(K_1)\cap(Z\setminus K)],$$
$$[\tau^{n+i}(K_1)\cap(Z\setminus K)]\cup[\tau^i(K_1)\cap K]$$

конечно.

Следствие 1. *Если для любого $m>0$ в множестве K содержится лишь конечное число отрезков длины m, то $B(G)$ — GCR-алгебра.*

Определение. а) Будем говорить, что матричные веса A_i, $-\infty<i<\infty$, размерности N **удовлетворяют условию** P, если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие целые числа $Q(\varepsilon)$, $l(\varepsilon)>0$, что каждый интервал $(k, k+l(\varepsilon))$ содержит некоторое целое число q, для которого найдется унитарная матрица $U_q\in U(N)$ такая, что при всех i таких, что $|i|\geqslant Q(\varepsilon)$ и $|i+q|\geqslant Q(\varepsilon)$, $\{\{U_q^*A_{i+q}U_q-A_i\}\}<\varepsilon$.

б) Последовательность матричных весов $\{A_i\}$, $-\infty<i<\infty$, размерности N назовем **почти периодической**, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое целое число $l(\varepsilon)$, что каждый интервал $(k, k+l(\varepsilon))$ содержит некоторое целое число q, для которого найдется унитарная матрица $U_q\in U(N)$ такая, что $\{\{U_q^*A_{i+q}U_q-A_i\}\}<\varepsilon$ при всех целых i, и **периодической**, если существуют наименьшее целое число $M>0$ и унитарная матрица $U\in U(N)$ такие, что $A_{i+M}=U^*A_iU$ для всех целых i.

Теорема 8. *Пусть G — обратимый N-мерный оператор двустороннего взвешенного сдвига с матричными весами A_i, $-\infty<i<\infty$, которые порождают полную матричную алгебру.*

а) *Если веса A_i удовлетворяют условию P, то для того чтобы C^*-алгебра $B(G)$ была* GCR-*алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы $A_i=Q_i+Z_i$, где Q_i — веса, образующие периодическую последовательность, а Z_i — такие веса, что $\lim\limits_{|i|\to\infty}\{\{Z_i\}\}=0$. Если $B(G)$* — GCR-*алгебра, то все ее неприводимые представления, за исключением эквивалентных тождественному, конечномерны.*

б) *Если веса A_i образуют почти периодическую последовательность, то для того чтобы C^*-алгебра $B(G)$ была* GCR-*алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы веса A_i были периодическими. Если $B(G)$* — GCR-*алгебра, то все ее неприводимые представления конечномерны.*

Замечание. 1) Если G — N-мерный оператор одностороннего взвешенного сдвига (см. ([3])), веса которого образуют полную матричную алгебру, и оператор GG^* обратим, то C^*-алгебра $B(G)$, порожденная оператором G, содержит идеал компактных операторов, к фактор-алгебре по которому применимы результаты теоремы 4. Отсюда следует, что для N-мерного одностороннего взвешенного сдвига справедливы теоремы 5—8 и следствие 1.

2) Для $N=1$ большинство результатов работы было получено в ([4]). Ранее в работе ([3]) для одномерного оператора взвешенного сдвига (т. е. для $N=1$) были доказаны п. а) теоремы 8 и частные случаи теоремы 6 и следствия 1.

Автор благодарен М. А. Наймарку за внимание к работе и А. И. Штерну за полезные ее обсуждения.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило
21 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Dixmier*, Les algebras d'operateurs dans l'espace hilbertien, Paris, Gaultier, 1969. [2] *Н. Б. Васильев*, УМН, т. 21, 1 (127). [3] *J. W. Bunce, J. A. Deddens*, Indiana Univ. Math. J., v. 23, № 3 (1973). [4] *Э. В. Киссин*, ДАН, т. 216, № 6 (1974).