Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.917 *МАТЕМАТИКА*

В. С. АФРАЙМОВИЧ, Л. П. ШИЛЬНИКОВ

О НЕКОТОРЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ИСЧЕЗНОВЕНИЕМ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ТИПА СЕДЛО — УЗЕЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VI 1974)

В 1930 г. А. А. Андроновым и А. А. Виттом ([1]) в связи с исследованием уравнения Ван-дер-Поля под действием малой внешней силы было обнаружено рождение грубого предельного цикла при исчезновении негрубого состояния равновесия типа седло — узел. Несколько позднее А. А. Андроновым и Е. А. Леонтович ([2]) эта бифуркация, наряду с другими основными тремя случаями рождения периодических движений, была полностью изучена для случая систем второго порядка. В многомерном пространстве основные бифуркации, связанные с изучением появляющихся предельных множеств при исчезновении сложного состояния равновесия, были рассмотрены в работах ([3-6]). В частности, в ([5, 6]) было обнаружено рождение одномерного базисного множества, гомеоморфного надстройке над некоторой топологической марковской цепью.

Настоящая работа связана с изучением предельных множеств, появляющихся при исчезновении двукратного периодического движения L. Предполагается, что двукратное периодическое движение L возникло из слияния устойчивого и седлового периодических движений и что все траектории, являющиеся α-предельными к L, являются также и ω-предельными к нему, т. е. L вместе со всеми двоякоасимптотическими траекториями к нему образуют двумерный инвариантный тор. В такой постановке эта задача ставилась в работе ([7]), в которой было высказано без доказательства утверждение о сохраняемости инвариантного тора при малых возмущениях. Позднее в ([8]) была приведена также идея метода доказательства. Однако это утверждение, как следует из результатов настоящей работы, неверно (оно оказалось верным в случае, когда инвариантный тор является гладким, см. теорему 1).

Рассмотрение проводится для случая диффеоморфизма, так как решение сформулированной задачи для гладкого потока сводится к изучению диффеоморфизма на некоторой секущей.

Рассмотрим однопараметрическое семейство C^2-диффеоморфизмов $T(\mu): M^{m+1}\to M^{m+1}$ $(m+1)$-мерного C^∞-гладкого многообразия M^{m+1} в себя, непрерывное по μ, $\mu\in[-\mu_0, \mu_0]$, в C^2-типологии. Предположим, что отображение $T(0)$ имеет двукратную негрубую неподвижную точку O типа седло — узел $(O\notin\partial M^{m+1})$. В некоторой локальной карте U, содержащей точку O, $T(\mu)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}&=Ax+f(x, z, \mu)x,\\ \bar{z}&=z+R(z, \mu)+g_1(x)\cdot z+g_2(x, z, \mu)x,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\|A\|<1$, $R-C^2$, а f, g_1 и g_2—C^1-гладкие функции по x и z, непрерывные по μ и обращающиеся в нуль при $x=0$, $z=\mu=0$, причем $g_2(x, z, 0)\equiv0$, а в разложении $R(z, 0)=lz^2+\ldots$ ляпуновская величина $l>0$.

Л е м м а 1. *Существует окрестность $U_0\subset U$ точки O и число μ_1, $0<\mu_1\leqslant\leqslant\mu_0$ такие, что для любого $\mu\in[-\mu_1, \mu_1]$ в U_0 существует однопараметри-*

ческое инвариантное семейство $\mathfrak{M}_\zeta$ *т-мерных поверхностей*

$$z=\zeta+\varphi(x, \zeta, \mu)x,$$

где φ *липшицируема по* x *и* ζ *в* μ.

Сделав замену $z\to\zeta+\varphi(\xi, \zeta, \mu)\xi$, $x\to\xi$, $T(\mu)$ в окрестности U_0 можно представить в виде

$$\bar{\xi}=A\xi+f(\xi, \zeta+\varphi(\xi, \zeta, \mu)\xi, \mu)\ \xi,$$

$$\bar{\zeta}=\zeta+R(\zeta, \mu).$$

В новых переменных инвариантное семейство будет состоять из плоскостей $\zeta=d$, $d\in[-d_0, d_0]$.

Очевидно, условие исчезновения седла — узла состоит в выполнении условия $R(z, \mu)>0$. Всюду ниже предполагается, что это условие выполнено при $\mu>0$.

Пересечение инвариантного луча $\{x=0,\ z\geqslant 0\}$ диффеоморфизма $T(0)$ с U обозначим через λ_U и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T^k(0)\lambda_U$ обозначим через λ. Ясно, что λ представляет собой образ стандартного луча $R^+=\{t\colon 0\leqslant t<\infty\}$ при отображении $\varkappa\colon R^+\to M^{m+1}$, являющемся инъективной иммерсией. Через $\partial\lambda$ будем обозначать множество всех предельных точек последовательностей $\{\varkappa(t_k)\}$, где $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Предположение. $\partial\lambda=\{0\}$.

Из этого предположения следует, что существует гомеоморфизм $\psi\colon S^1\to\bar{\lambda}\equiv\lambda\cup\partial\lambda$ такой, что ψ является гладким отображением всюду, кроме, может быть, прообраза точки 0. Естественно выделить два основных случая:

A_1) ψ является диффеоморфизмом и, следовательно, $\bar{\lambda}$ является гладким подмногообразием M^{m+1}.

A_2) ψ не является гладким отображением в точке $\psi^{-1}(0)$.

В первом случае имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\bar{\lambda}$ *диффеоморфно* S^1. *Тогда при достаточно малом* μ $T(\mu)$ *будет иметь замкнутую инвариантную кривую* $\bar{\lambda}(\mu)\to\bar{\lambda}$ *при* $\mu\to 0$.

При этом число вращения Пуанкаре $\omega(\mu)$ положительно и стремится к нулю при $\mu\to 0$.

В случае A_2) ситуация, возникающая при исчезновении седло — узла, будет значительно сложнее. Здесь для широкого класса семейств диффеоморфизмов для положительных значений μ характерно наличие сложной структуры глобального предельного множества.

В силу того, что ψ не является гладким в $\psi^{-1}(0)$, точки на λ можно разделить на два типа.

Определение. Точку $P\in\lambda$ назовем точкой 1-го типа, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\text{пр}_z\, dT^{n+k}l_P}{\|dT^{n+k}l_P\|}\right|=1,$$

где l_P — касательный вектор к λ в точке $P\in U$, через пр_z обозначена проекция на ось z, а k — некоторое целое положительное число такое, что $T^kP\in U$.

Точку $P\in\lambda$ назовем точкой 2-го типа, если

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{\text{пр}_z\, dT^{n+k}l_P}{\|dT^{n+k}l_P\|}\right|=0.$$

Здесь предполагается, что M^{m+1} снабжено римановой метрикой. Можно показать, что точек другого типа быть не может.

Рассмотрим множество D_d: $\|x\|<\varepsilon$, $-d+\varphi(x, d, 0)x\leqslant z\leqslant -\bar{d}+\varphi(x, -d, 0)x$, где $\bar{d}=d-R(d, 0)$.

Л е м м а 2. *Существует такое* $\varepsilon>0$, *что для любого* d, $0<d\leqslant\varepsilon$, и *точки* $P\in\lambda$ *найдется такое* n, *что* $T^nP\in D_d$.

Из этой леммы следует, что $\lambda\cap D_d\neq\emptyset$ и $\bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^iD_d\supset\lambda$. По характеру пересечения λ с D_d можно выделить следующие случаи:

A_2B_1) $\lambda\cap D_d$ имеет только одну компоненту, уравнение которой $x=h(z)$, где $h(z)$ непрерывная, но не дифференцируемая функция (иначе реализовался бы случай A_1).

A_2B_2) Пересечение λ с D_d или имеет одну компоненту, которая в виде $x=h(z)$ не записывается, либо имеется несколько компонент.

Случай A_2B_1 не является общим, поскольку при малых C^2-возмущениях $T(0)$, сохраняющих седло — узел, мы получим либо A_1), либо A_2B_2).

Предположим, что можно указать такое $0<d<d_0$, что

1) $\lambda\cap D_d$ содержит по крайней мере две связных компоненты Γ_1 и Γ_2, уравнения которых записываются в виде $x=h_1(z)$ и $x=h_2(z)$ соответственно;

2) точки $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ являются точками первого типа.

Эти условия назовем условиями «большой петли».

Т е о р е м а 2. *При выполнении условий «большой петли» существует счетная последовательность интервалов* $\Delta_i=(\mu_i', \mu_i'')\subset(0, \bar{\mu}_0)$, *где* $\Delta_j\cap\Delta_k=\delta_{jk}$, μ_i', $\mu_i''\to 0$ *при* $i\to\infty$, *что* $T(\mu)$ *при* $\mu\in\bigcup\limits_i\Delta_i$ *будет иметь счетное множество периодических траекторий.*

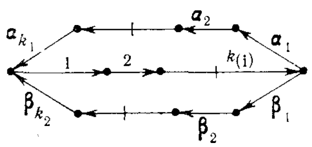
Следующее дополнительное условие позволяет получить более содержательный результат.

Пусть $U_\varepsilon\subset U_0$, и ε удовлетворяет предыдущей лемме, достаточно мало и такое, что $T^{-1}D_d\in U_\varepsilon$. Пусть k_j — наименьшее положительное число такое, что $\gamma_j=T^{-k_j}\Gamma_j\subset U_\varepsilon$ и

$$\sigma=\min_{P\in\gamma_j,\ j=1,2}\left|\frac{\text{пр}_z\, dT^{k_j}l_P}{\|l_P\|}\right|.$$

Величина σ характеризует величину растяжения γ_j за k_j итераций.

Введем в рассмотрение топологическую марковскую цепь (т.м.ц.) $(G(i), \Omega(i), k_1, k_2, \sigma)$, состояниями которой являются ребра графа $G(i)$:



Т е о р е м а 3. *При выполнении условий «большей петли»* 3), 4):

3) $T(0)(\Gamma_1)\cap\Gamma_2=\emptyset$, $T(0)(\Gamma_2)\cap\Gamma_1=\emptyset$,

4) $\sigma>1+q$, $q>0$,

существует счетная последовательность интервалов $\Delta_i=(\mu_i', \mu_i'')$ *такая, что для каждого* $\mu\in\Delta_i$ *можно указать инвариантное относительно* $T(\mu)$ *множество* $\Sigma(\mu)$, *т.м.ц.* $(G(i), \Omega(i), k_1, k_2, \sigma)$, $k(i)\to\infty$ *при* $i\to\infty$, *гомеоморфизм* δ: $\Omega(i)\to\Sigma(\mu)$, *что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\Omega(i) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\delta"'] & \Omega(i) \arrow[d, "\delta"] \\
\Sigma(\mu) \arrow[r, "T(\mu)"] & \Sigma(\mu)
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

коммутативна.

Предположим, что можно указать такие d_1 и d_2, $d_1<d_2<0$, что для некоторого d:

1) $\lambda\cap D_{d_1d_2}$, где $D_{d_1d_2}=\{\|\xi\|\leqslant\varepsilon,\ \zeta\in[d_1, d_2]\}$ и $D_{d_1d_2}\subset D_d$, содержит две связных компоненты Γ_1' и Γ_2', принадлежащих одной из связных компонент $\tilde{\Gamma}\subset\lambda\cap D_d$.

2) точки $\Gamma_1'\cup\Gamma_2'$ являются точками первого типа.

Условия 1), 2) назовем условиями «малой петли».

Здесь имеет место следующая

Теорема 4. *При выполнении условий «малой петли», $d_2-d_1>b-a+\rho$, a и b — концы $T^{-k}\tilde{\Gamma}$ на оси z, $\rho>0$ и*

$$\sigma=\min_{P\in T^{-k}(\Gamma_1'\cup\Gamma_2')}\left|\frac{\text{пр}_z\, dT^k l_P}{\|l_P\|}\right|>1+q, \qquad q>0,$$

k — наименьшее целое положительное число такое, что $T^{-k}\tilde{\Gamma}\subset U_\varepsilon$, существует счетная последовательность $\Delta_i=(\mu_i', \mu_i'')$, $\Delta_j\cap\Delta_k=\delta_{jk}$, такая, что для каждого $\mu\in\Delta_i$ можно указать инвариантное относительно $T(\mu)$ множество $\Sigma(\mu)$, т.м.ц. $(G(i), \Omega(i), k_1, k_2, \sigma)$ с $k(i)\to\infty$ при $i\to\infty$ и гомеоморфизм $\Omega(i)\to\Sigma(\mu)$, что диаграмма, аналогичная $(*)$, будет коммутативна.

Замечание. Теорема 1 дает математическое обоснование явлению возникновения биений, ранее объяснявшихся ([9]) на основе метода усреднения. Из теоремы же 3, 4 следует, что при исчезновении устойчивого периодического может возникнуть устойчивое предельное множество сложной структуры, для объяснения поведения фазовой точки в котором, вообще говоря, требуется уже статистическое описание. Другой случай существования предельного множества аналогичной природы в устойчивом кольце рассмотрен в ([10]). На наш взгляд, вопросы, рассмотренные как здесь, так и в ([10]), имеют вполне определенное отношение к тому кругу идей, который связан с задачей возникновения турбулентности в системах неконсервативного происхождения.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
7 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. A. Andronov, A. A. Vitt,* Arch. Electrotechn., B. 24, 99 (1930); *А. А. Андронов,* Собр. тр., 1956, стр. 51. [2] *А. А. Андронов, Е. А. Леонтович,* Уч. зап. Горьковск. гос. унив., т. 6, 3 (1939). [3] *Л. П. Шильников,* Матем. сб., т. 61, 4, 443 (1963). [4] *Л. П. Шильников,* ДАН, т. 170, № 1, 49 (1966). [5] *Л. П. Шильников,* ДАН, т. 189, № 1, 59 (1969). [6] *В. С. Афраймович, Л. П. Шильников,* УМН, т. 27, в. 3 (165), 189 (1972). [7] *Е. А. Леонтович, Ю. И. Неймарк,* Сб. докл. Политехн. ин-та, Ташкент, т. 6, 132 (1964). [8] *Ю. И. Неймарк,* Тр. V международн. конфер. по нелинейным колебаниям, т. 2, Киев, (1970). [9] *Т. Хаяси,* Нелинейные колебания в физических системах, М., 1968. [10] *В. С. Афраймович, Л. П. Шильников,* ДАН, т. 214, № 4 (1974).