Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

Т. М. БАНДМАН

ПОВЕДЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ХАРАКТЕРИСТИКИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 VI 1974)

Пусть в круге $U=\{|z|<1\}$ задана измеримая характеристика $\mu(z)$, $|\mu(z)|<1$, а $f(z)$ — гомеоморфизм круга U на себя с локально интегрируемыми обобщенными производными и характеристикой $\mu(z)=f_{\bar z}(z)/f_z(z)$.

В работе рассматриваются два вопроса:

1. Как ведет себя отображение $f(z)$ при приближении к единичной окружности $S=\{|z|=1\}$? В [4] приведена лемма Куранта: если

$$\iint_U (1-|\mu(z)|)^{-1}\,d\sigma<\infty,$$

то обратный гомеоморфизм $f^{-1}(z)$ можно продолжить до непрерывного отображения замкнутого круга на себя. Мы доказываем теорему 1, содержащую обобщение леммы Куранта и необходимые условия для того, чтобы дуга стягивалась в точку или две точки переходили в одну и ту же дугу.

2. Как ведет себя отображение вблизи внутренних особых точек? Обозначим через E множество точек вырождения характеристики $\mu(z)$, т. е. тех точек, в окрестности которых функция $(1-|\mu(z)|)^{-1}$ не ограничена. Пусть $z_0\in U\cap E$ и $f(z)$ — гомеоморфизм $U\setminus\{z_0\}$ в себя с характеристикой $\mu(z)$ и обобщенными производными, локально интегрируемыми в $U\setminus\{z_0\}$. Когда можно $f(z)$ продолжить до гомеоморфизма всего круга? Насколько гладким будет это продолжение? Известно [2], что для существования продолжения необходимо, чтобы

$$\lim_{r_0\to 0}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\int_0^1 \frac{dr}{r}\frac{|1-e^{-2i\varphi}\mu(re^{i\varphi})|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2}\right)^{-1}=0,$$

и достаточно, чтобы

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{r_0}^1 \frac{dr}{r}\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{|1-\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2}\right)^{-1}=\infty.$$

Кроме того, если z_0 — изолированная точка множества E и

$$\iint_U \frac{|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}\frac{d\sigma}{|z-z_0|^2}<\infty,$$

то отображение конформно в точке z_0, т. е. существует [1]

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\neq 0,\infty.$$

Мы вводим другие ограничения на характеристику $\mu(z)$, гарантирующие существование продолжения и

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\neq 0,\infty.$$

Приведем необходимые определения и обозначения.

Определение 1. Предельным множеством $C(f, z)$ точки z при отображении $f(z)$ называется множество таких точек w, для которых существует последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in U$, удовлетворяющая двум условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

$$C(f, A) = \bigcup_{z\in A} C(f, z) \text{ для любого } A \subset U.$$

Можно доказать, что: 1) $C(f, S) = S$, 2) $C(f, A)$ связно для любого связного множества A (т. е. предельным множеством дуги может быть только дуга или точка); 3) если $\zeta_i \in S$, $i=0, 1, \ldots$, и $\zeta_i \to \zeta \in S$, то $\rho(C(f, \zeta_i), C(f, \zeta)) \to 0$, где ρ — обычное расстояние между множествами,

$$\rho(A, B) = \inf\{|z_1 - z_2|, z_1 \in A, z_2 \in B\}.$$

Чтобы исследовать зависимость поведения отображения $f(z)$ от характеристики $\mu(z)$ при приближении к окружности S, нам понадобится следующая оценка искажения модулей параллелограммов.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — гомеоморфизм с интегрируемыми обобщенными производными и характеристикой $\mu(z)$ ($|\mu(z)|<1$ почти всюду) параллелограмма R с вершинами $(0, 0)$, $(0, b)$; $(a, a\operatorname{tg}\alpha)$; $(a, b+a\operatorname{tg}\alpha)$ на область $\tilde{R}$ такую, что*

$$|f(a+i(y+a\operatorname{tg}\alpha)) - f(iy)| \geqslant a', \quad |f(x+i(x\operatorname{tg}\alpha+b)) - f(x+ix\operatorname{tg}\alpha)| \geqslant b'$$

и площадь четырехсторонника $\tilde{R}$ $S(\tilde{R}) \leqslant a'b'$. Тогда

$$\int_0^a dx \left(\int_{x\operatorname{tg}\alpha}^{b+x\operatorname{tg}\alpha} dy \frac{|1-\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2} \right)^{-1} \leqslant \frac{a'}{b'} \leqslant \left[\int_0^b dy \left(\int_0^a dx \frac{|1+\mu(z)e^{2i\alpha}|^2}{1-|\mu(z)|^2} \right)^{-1} \right]^{-1}.$$

Предположим теперь, что обобщенные производные функции $f(z)$ интегрируемы в любом прямоугольнике $R_\varepsilon = \{\alpha<y<\beta,\ a<x<b-\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, но не во всем прямоугольнике $R = \{\alpha<y<\beta,\ a<x<b\}$. Обозначим через Q и Q_ε образцы прямоугольников R и R_ε, т. е. $Q=f(R)$, $Q_\varepsilon = f(R_\varepsilon)$. Если модуль $M(Q)$ четырехугольника Q бесконечен, то модули $M(Q_\varepsilon)$ неограниченно возрастают с убыванием ε. К каждому R_ε применима лемма 1, и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\alpha^\beta dy \left(\int_a^{b-\varepsilon} dx \frac{|1+\mu(z)|^2}{1-|\mu(z)|^2} \right)^{-1} = 0.$$

Отсюда, используя теорему Б. Леви, получаем

$$\int_\alpha^\beta dy \left(\int_a^b dx \frac{|1+\mu(z)|^2}{1-|\mu|} \right). \qquad (*)$$

Рассмотрим три точки на единичной окружности: $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{i\beta}$, $w = e^{i\varphi}$.

Лемма 2. *Если $C(f, z_1) = C(f, z_2) = w$, то одна из дуг окружности S с концами в точках z_1 и z_2 стягивается в точку w, т. е. для любой точки z из этой дуги $C(f, z) = w$.*

Пусть дуга $A = \{e^{i\varphi}, \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$ стягивается в точку. Переходя с помощью функции логарифма к отображениям прямоугольников на четырехсторонники, аналогично $(*)$ получим, что для любого r_0, $0<r_0<1$,

$$\int_\alpha^\beta d\varphi \left(\int_{r_0}^1 \frac{dr}{r} \frac{|1+\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2} \right)^{-1} = 0.$$

Лемма 3. *Если $A \subset S$ — дуга единичной окружности и $C(f, z_1) = C(f, z_2) = A$, то для одной из дуг этой окружности с концами в точках z_1 и z_2 (обозначим ее через B) $C(f, z) = A$ для любой точки z из B.*

Когда $B = \{e^{i\varphi}, \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\}$, из леммы 1 получаем, что для любого $\delta < (\beta - \alpha)/2$ найдется такое $r_0 < 1$, что

$$\int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} d\varphi \left(\int_{r_0}^{1} \frac{|1+\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2} \frac{dr}{r} \right)^{-1} = 0.$$

Из лемм 2 и 3 и свойств предельных множеств следует

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$ — гомеоморфизм круга на себя. Тогда:*

1) *если при гомеоморфизме $f(z)$ дуга $B = \{e^{i\varphi}, \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\}$ стягивается в точку, то*

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \left(\int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r} \frac{|1+\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2} \right)^{-1} = 0.$$

2) *если $C(f, z_1) \cap C(f, z_2) \neq \phi$, $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{i\beta}$, то для любого $\delta < \min\{(\beta - \alpha)/2, \pi - (\beta - \alpha)/2\}$ найдется такое r_0, $0 < r_0 < 1$, что*

$$\int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} d\varphi \left(\int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r} \frac{|1+\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2} \right)^{-1} = 0$$

или

$$\int_{\beta+\delta}^{2\pi+\alpha-\delta} d\varphi \left(\int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r} \frac{|1+\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2} \right)^{-1} = 0.$$

3) *если для любых α, β и r_0*

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \left(\int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r} \frac{|1+\mu(re^{i\varphi})e^{-2i\varphi}|^2}{1-|\mu(re^{i\varphi})|^2} \right)^{-1} = 0,$$

то обратный гомеоморфизм $z = f^{-1}(w)$ можно продолжить до непрерывного отображения замкнутого круга на себя.

Пусть теперь z_0 — особая точка характеристики $\mu(z)$ — внутренняя точка круга U, а $f(z)$ — гомеоморфизм $U \setminus \{z_0\}$ в себя. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ и $C(f, S) \subset S$. Положим $\alpha(z) = \arg \mu(z) - \arg z$.

Теорема 2. *Если для некоторого φ, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, характеристика $\mu(z)$ удовлетворяет условиям:*

$$\iint_U \frac{|\mu(z)| \cdot ||\mu(z)| - \cos 2\alpha(z)|}{(1-|\mu(z)|^2)|z|^2} d\sigma < \infty,$$

$$\iint_U \frac{|\mu(z)| \cdot ||\mu(z)| + \cos 2(\alpha(z) + \varphi)|}{(1-|\mu(z)|^2)|z|^2} d\sigma < \infty,$$

то $f(z)$ можно продолжить до гомеоморфизма всего круга U и существует

$$\lim_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \neq 0, \infty.$$

Можно привести примеры, показывающие, что при любом φ эти условия не достаточны для существования

$$\lim_{z \to 0} [f(z)/z] \neq 0, \infty.$$

Доказательство теоремы 2 основывается на лемме 1 и одной теореме Тейхмюллера (([5]), стр. 663). Для квазиконформных отображений такая теорема доказана в ([3]).

Новосибирский институт
народного хозяйства

Поступило
17 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. П. Белинский,* Уч. зап. Львовск. унив., сер. мех.-матем., т. 29, № 1 (16), 58 (1954). [2] *Л. И. Волковысский,* Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 34, 1 (1950). [3] *E. Reich, H. Wolczak,* Trans AMS, v. 117, 338 (1965). [4] *Р. Курант,* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, 1963. [5] *O. Teichmüller,* Deutsche Mathematik, v. 3, 621 (1938).