Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 532.592 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. А. ГАБОВ

О ДИФРАКЦИИ ВОЛН КЕЛЬВИНА НА ЩЕЛИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 18 IX 1974)

В работе ([1]) В. Бухвальд и Дж. Майлс получили асимптотическое решение задачи о дифракции волны Кельвина на щели между двумя полубесконечными стенками во вращающемся неограниченном бассейне постоянной глубины. При этом они полагали, что ширина щели мала по сравнению с длиной волн, существующих в бассейне. Целью настоящей работы является изложение результатов, полученных нами при исследовании другого предельного случая, а именно случая, когда ширина щели велика по сравнению с длиной волн.

Пусть в неограниченном бассейне глубины $h=\text{const}$, который вращается вокруг вертикальной оси против часовой стрелки с угловой скоростью ω, имеются две полубесконечные стрелки: I $(y=0,\ x\leqslant -b)$ и II $(y=0,\ x\geqslant b)$. Если мы предположим, что возвышения волн в бассейне зависят от времени гармонически, т. е. $\zeta(x, y, t)=\zeta(x, y)e^{i\sigma t}$, причем $\sigma>2\omega$, то амплитуды возвышений $\zeta(x, y)$ удовлетворяют (см. ([2])) уравнению

$$[\Delta+\varkappa^2]\zeta(x, y)=0, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\varkappa^2=(\sigma^2-4\omega^2)/(gh)$, а g — ускорение силы тяжести. Амплитуды возвышений $\zeta(x, y)$ связаны с y-компонентами скоростей частиц жидкости $v(x, y)$ следующим соотношением:

$$v(x,y)=\frac{\sigma}{\varkappa^2 h}\left[i\frac{\partial}{\partial y}-l\frac{\partial}{\partial x}\right]\zeta(x,y),$$

где $l=2\omega/\sigma<1$.

Пусть в области $y>0$, $x<-b$ вдоль стенки I из бесконечности распространяется волна Кельвина:

$$\zeta_0(x, y)e^{i\sigma t}=e^{-l\eta\varkappa y-i\eta\varkappa x+i\sigma t}; \tag{2}$$

здесь $\eta=(1-l^2)^{-1/2}$. Представим в области 1 $(y>0)$ полную амплитуду возвышений в виде $\zeta_0+\zeta_1$, а в области 2 $(y<0)$ полную амплитуду обозначим через ζ_2. Для неизвестных функций ζ_j получим следующую задачу.

Необходимо найти ограниченные функции ζ_j, удовлетворяющие уравнению (1), граничным условиям

$$v_1(x, 0+0)=0, \quad v_2(x, 0-0)=0 \text{ при } |x|>b \tag{3}$$

и условиям сопряжения в области щели

$$\left.\begin{aligned}&\zeta_0(x, 0+0)+\zeta_1(x, 0+0)=\zeta_2(x, 0-0),\\ &v_1(x, 0+0)=v_2(x, 0-0)\end{aligned}\right\} \text{ при } |x|<b. \tag{4}$$

На ребрах стенок должны выполняться условия:

$$\frac{\partial}{\partial r_{1,2}}\zeta_j=r_{1,2}^{-1/2}O(1) \quad \text{при} \quad r_{1,2}\to 0, \tag{5}$$

где $r_{1,2}$ — расстояние соответственно до ребра I и II стенок. Потребуем также, чтобы функции ζ_j удовлетворяли условиям излучения, т. е. соответствовали волнам, уходящим на бесконечность.

Для выделения единственного решения задачи (1)—(5), удовлетворяющего условиям излучения, воспользуемся принципом предельного поглощения. Для этого предположим, что $\varkappa=\varkappa-i\varepsilon$, $\varepsilon>0$, и будем считать, что функции ζ принадлежат классу функций, удовлетворяющих условию

$$|\zeta|+|\nabla\zeta|<Ce^{-\varepsilon r} \text{ при } r\to\infty.$$

Доказывается, что задача (1)—(5) с комплексным $\varkappa$ в указанном классе имеет единственное решение. В окончательных результатах ε устремим к нулю и получим единственное решение задачи (1)—(5), удовлетворяющее условиям излучения.

Построение точного решения задачи (1)—(5) весьма затруднительно, однако, если воспользоваться методикой, аналогичной методике Джонса ([3], стр. 222—228), то оказывается возможным получить асимптотическое при $|\varkappa b|\gg1$ решение $\bar\zeta_j$ задачи (1)—(5) такое, что

$$|\zeta_j(x, y)-\bar\zeta_j(x, y)|<C|\varkappa b|^{-1},$$

где C — константа, не зависящая от x и y. При этом при построении $\bar\zeta_j$ учитывается следующий физически очевидный факт: при удалении стенки II на бесконечность эффект дифракции на ней должен исчезать и формула для $\bar\zeta_j$ должна описывать дифракцию волны Кельвина на уединенной стенке I.

Формула для $\bar\zeta_j(x, y)$ имеет вид

$$\bar\zeta_j(x,y)=-\frac{i}{2\pi}\frac{1}{\eta(\eta+1)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-|\varkappa y|(p^2-1)^{1/2}-ip\varkappa(x+b)]}{(p-1)^{1/2}[\delta_j(p^2-1)^{1/2}-lp]}\,dp-$$

$$-\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{\eta(\eta+1)^{1/2}}e^{-i2\varkappa b-i\pi/2}(2\varkappa b)^{1/2}f(\varkappa b)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{W(-i\varkappa b(p-1))\exp[-|\varkappa y|(p^2-1)^{1/2}-ip\varkappa(x-b)]}{(p+1)^{1/2}[\delta_j(p^2-1)^{1/2}-lp]}\,dp, \qquad (6)$$

где $W(z)$ выражается через функцию Уиттекера ([4]): $W(z)={}^3/_2z^{-1/4}e^{z/2}\cdot W_{-3/4,\,1/4}(z)$, а величина $f(\varkappa b)$ равна:

$$f(\varkappa b)=\mu(-1)-\mu(1),\quad \mu(\lambda)=\lambda e^{i\pi/4}\left[1-\frac{\lambda}{\pi}e^{-i2\varkappa b+i\pi/4}(2\varkappa b)^{1/2}W(i2\varkappa b)\right]^{-1}.$$

Кроме того, в формуле (6) $\delta_1=1$, $\delta_2=-1$ и интегрирование ведется по вещественной оси плоскости p с обходом особых точек подынтегральных функций, причем отрицательные особые точки обходятся снизу, а положительные сверху. Здесь уже совершен предельный переход при $\varepsilon\to0$.

Первый интеграл в (6) описывает дифракцию волны Кельвина на стенке I без учета присутствия стенки II. Он детально изучен в работах ([5], [6]). Обратимся ко второму интегралу в формуле (6). Этот член описывает эффекты, связанные с присутствием стенки II. Исследуем его более детально. Введем полярные координаты с полюсом на ребре стенки II по формулам $|y|=r\sin\theta$, $x-b=r\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, и выпишем асимптотические формулы для обсуждаемого члена при $\varkappa r\to\infty$:

$$\zeta_j=-\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{\eta(\eta+1)^{1/2}}(2\varkappa b)^{1/2}f(\varkappa b)\frac{W(ib\varkappa(1-\cos\theta))}{i\delta_j\sin\theta-l\cos\theta}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa r}}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varkappa r-i\cdot 2b\varkappa-i\pi/4}+O[(\varkappa r)^{-3/2}]. \quad (7)$$

Формулы (7) выписаны без учета слагаемых, описывающих волны Кельвина. Поэтому при вычислении ζ_1 в области 1 при углах $0\leqslant\theta<\pi/2$ к формуле (7) необходимо прибавить член, отвечающий кельвиновской волне:

$$\zeta_{1Ke|}=-\frac{1}{2\pi}\frac{l\eta}{\eta+1}(2\varkappa b)^{1/2}f(\varkappa b)e^{-i2\varkappa b-i\pi/2}W(i\varkappa b(1-\eta))e^{-l\eta\varkappa y-i\eta\varkappa x}. \quad (8)$$

А при вычислении ζ_2 в области 2 при углах $\pi\geqslant\theta>\pi/2$ надо прибавить член, также отвечающий волне Кельвина:

$$\zeta_{2Ke|}=\frac{1}{2\pi}\frac{l\eta}{\eta+1}(2\varkappa b)^{1/2}f(\varkappa b)e^{-i2\varkappa b-i\pi/2}W(i\varkappa b(1+\eta))e^{l\eta\varkappa y+i\eta\varkappa x}. \quad (9)$$

Заметим теперь, что формулы (7)—(9) могут быть значительно упрощены, если воспользоваться асимптотическим разложением $W(z)$, которое может быть легко получено с использованием асимптотического разложения для функций Уиттекера ([4]).

Обсудим теперь полученные результаты и опишем образующуюся волновую картину. Как следует из результатов анализа первого слагаемого в формуле (6) (см. ([5], [6])), волна Кельвина, идущая из бесконечности, распространяясь вдоль стенки I и достигая ребра ее, дифрагирует на нем. В результате этой дифракции она разворачивается на ребре стенки I и уходит на бесконечность с другой стороны стенки, причем с уменьшенной амплитудой. Кроме этого, она возбуждает ребро стенки I, которое генерирует цилиндрические волны. Эти цилиндрические волны, распространяясь в бассейне, достигают ребра стенки II и возбуждают его. В пользу этого соображения говорит тот факт, что после упрощения, которое можно сделать, как отмечено выше, формулы (7)—(9), описывающие влияние стенки II, имеют в амплитуде в качестве множителя член $e^{-i2\varkappa b}(2\varkappa b)^{-1/2}$, который как раз пропорционален амплитуде цилиндрических волн, приходящих от ребра стенки I. Далее, возбужденное ребро стенки II генерирует следующие волны: волну Кельвина, распространяющуюся в области $y>0$, $x>b$ вдоль стенки II (см. формулу (8)), и аналогичную волну Кельвина, которая, однако, распространяется в области $y<0$, $x<b$ вдоль стенки I (формула (9)). Кроме указанных кельвиновских волн, ребро излучает также цилиндрические волны (формула (7)), которые, по-видимому, распространяясь, возбуждают ребро стенки I, которое вновь генерирует волны. Здесь, по-видимому, имеет место обычный механизм дифракции на двух телах, состоящий из серии последовательных «отражений» от ребер стенок. Отметим также, что описанная здесь волновая картина во многом аналогична волновой картине, описанной В. Бухвальдом и Дж. Майлсом ([1]).

Автор признателен проф. А. Г. Свешникову за интерес к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *V. T. Buchwald, J. W. Miles*, J. Austral. Math. Soc., № 1, 29 (1974). [2] *Л. Н. Сретенский*, Теория волновых движений жидкости, М.– Л., 1936. [3] *Б. Нобл*, Метод Винера – Хопфа, ИЛ, 1962. [4] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, М., 1963. [5] *С. А. Габов*, Вестн. Московск. унив., сер. матем. и мех., № 5, 100 (1973). [6] *С. А. Габов*, ДАН, т. 217, № 2, 299 (1974).