

М. Г. ГАСЫМОВ, Б. А. ИСКЕНДЕРОВ

**ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 III 1974)

1. В данной работе мы указываем, что методом предельной амплитуды можно выделить в полупространстве единственное решение краевой задачи для эллиптического уравнения с параметром, получающееся из смешанных задач для несимметрических строго гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами после преобразования Лапласа относительно времени.

Смешанная задача для несимметрических гиперболических уравнений, которая нас интересует, решена Х. О. Крайсом<sup>(1)</sup>.

В своих исследованиях существенно используем подход, разработанный в<sup>(2)</sup>, для постановки корректных задач в полупространстве для уравнений с постоянными коэффициентами.

2. Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — точка  $n$ -мерного пространства  $R_n, R_n^+ —$  подпространство  $x_1 \geq 0, x' = (x_2, x_3, \dots, x_n) \in R_{n-1}$  и  $\xi' = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) \in R_{n-1}$  — двойственные переменные относительно преобразования Фурье.

Рассмотрим в  $R_n^+$  следующую смешанную задачу:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(t, x) = f(x) e^{i\omega t} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0, \dots, \frac{\partial^{m-1} u(0, x)}{\partial t^{m-1}} = 0 \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(t, 0, x') = 0, \quad \frac{\partial u(t, 0, x')}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial^{r-1} u(t, 0, x')}{\partial x_1^{r-1}} = 0, \quad (3)$$

где  $L(p, \xi)$  — однородный полином степени  $m$  по  $(p, \xi)$ ,  $\omega$  — вещественное число, а целое число  $r$  определено ниже.

**О п р е д е л е н и е.** Уравнение (1) называется строго гиперболическим, если корни уравнения

$$L(p, i\xi) = 0$$

по  $p$  при вещественных  $\xi \neq 0$  чисто мнимые и различные.

**Л е м м а 1** <sup>(3)</sup>. При  $\operatorname{Re} p > 0, \xi' \in R_{n-1}$  корни уравнения по  $\lambda$

$$L(p, \lambda, i\xi') = 0 \quad (4)$$

распадаются на две группы:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_1(p, \xi') < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_r(p, \xi') < 0, \\ \operatorname{Re} \lambda_{r+1}(p, \xi') > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_m(p, \xi') > 0. \end{aligned}$$

В условии (3) число  $r$  равно числу корней уравнения (4) с отрицательными вещественными частями.

Приведем еще одну лемму о корнях уравнения (4).

Положим  $p = p_1 + ip_2$ . Тогда при  $p_1 = 0$  часть корней на некоторых поверхностях могут принимать равные значения.

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda_j(p, \xi')$  — корень кратности один уравнения (4) при  $\operatorname{Re} p > 0$  и

$$\lambda_j(0, \xi') \neq \lambda_\mu(0, \xi'), \quad j \neq \mu, \quad |\xi'| = 1.$$

Тогда при достаточно малом  $|p - i\omega|$

$$|\lambda_j(p, \xi') - \lambda_j(i\omega, \xi')| \leq C(\omega, \xi') |p - i\omega|^\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} |C(\omega, \xi')| &\leq B, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{при} \quad |\xi'| \leq A, \\ |C(\omega, \xi')| &\leq B|\xi'|, \quad \alpha = 1 \quad \text{при} \quad |\xi'| > A, \end{aligned}$$

$A$  и  $B$  — некоторые постоянные числа.

Обозначим через  $v(p, x)$  решение уравнения

$$L\left(p, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)v(p, x) = f(x), \quad (5)$$

при  $\operatorname{Re} p > 0$ , которое удовлетворяет граничным условиям

$$v(p, 0, x') = 0, \dots, \frac{\partial^{r-1} v(p, 0, x')}{\partial x_1^{r-1}} = 0 \quad (6)$$

и при каждом  $p$  с  $\operatorname{Re} p > 0$  имеет место

$$v(p, x) \in L_2(R_n^+). \quad (7)$$

Используя результаты из книги (2), а также работы (4), можно доказать следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $f(x)$  по  $x'$  имеет суммируемые производные — до порядка  $(n+1)$  включительно, а по  $x_1$  убывает как  $(1 + |x_1|)^{-(m+\varepsilon)}$ .

Тогда при  $\operatorname{Re} p > 0$  задача (5) — (7) имеет единственное решение, определенное формулой

$$v(p, x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R_{n-1}} \dots \int e^{-i(x', \xi')} \tilde{v}(p, x_1, \xi') d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}(p, x_1, \xi') &= \int_0^{x_1} \tilde{f}(\eta, \xi') \sum_{i=1}^r \frac{1}{\prod_{\nu=1}^r (\lambda_i - \lambda_\nu)(p, \xi')} \times \\ &\times \left[ \frac{e^{\lambda_i(p, \xi')(x_1 - \eta)}}{\prod_{\nu=r+1}^m (\lambda_i - \lambda_\nu)(p, \xi')} + \sum_{j=r+1}^m \frac{e^{\lambda_i(p, \xi')x_1 - \lambda_j(p, \xi')\eta}}{(\lambda_j - \lambda_i)(p, \xi') \prod_{\mu=r+1}^m (\lambda_j - \lambda_\mu)(p, \xi')} \right] d\eta + \\ &+ \int_{x_1}^{\infty} \tilde{f}(\eta, \xi') \sum_{j=r+1}^m \frac{1}{\prod_{\mu=r+1}^m (\lambda_j - \lambda_\mu)(p, \xi')} \times \\ &\times \left[ \sum_{i=1}^r \frac{e^{\lambda_i(p, \xi')x_1 - \lambda_j(p, \xi')\eta}}{(\lambda_j - \lambda_i)(p, \xi') \prod_{\nu=1}^r (\lambda_i - \lambda_\nu)(p, \xi')} - \frac{e^{\lambda_j(p, \xi')(x_1 - \eta)}}{\prod_{\nu=1}^r (\lambda_i - \lambda_\nu)(p, \xi')} \right] d\eta; \end{aligned} \quad (8)$$

здесь знак  $\prod'$  означает, что в произведении множители с одинаковыми индексами отсутствуют, а  $\tilde{f}(x_1, \xi')$  — преобразование Фурье от  $f(x)$  по  $x'$ .

Переходя в (8) к пределу при  $p_1 \rightarrow 0$ , что законно в силу сделанных предположений относительно функции  $f(x)$  и корней характеристического уравнения (4), определим  $v(ip_2, x)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $f(x)$  по  $x'$  имеет суммируемые производные до порядка  $(N+n)$ , а по  $x_1$  убывает как  $(1+|x_1|)^{-(m+\varepsilon)}$ . Далее, пусть

$$\lambda_j(0, \xi') \neq \lambda_\mu(0, \xi') \quad \text{при } j \neq \mu, \quad |\xi'| = 1.$$

Тогда при  $p = ip_2$  для решения задачи (5) — (7) имеет место следующая оценка:

$$|v(ip_2, x)| \leq C/(1+|p_2|)^\beta$$

равномерно по  $x$  из каждого компакта в  $R_n^+$ ,  $N$  — целое не меньшее единицы,  $\beta = \min(N+1, m-1)$ ,  $C$  — постоянное число.

**Лемма 5.** Пусть  $f(x)$  по  $x'$  имеет суммируемые производные до порядка  $(N+n)$ ,  $N \geq 1$ , а по  $x_1$  убывает как  $(1+|x_1|)^{-(m+1+\varepsilon)}$ .

Тогда решение задачи (5) — (7) при малых  $|p-i\omega|$  удовлетворяет следующей оценке:

$$|v(p, x) - v(i\omega, x)| \leq C|p-i\omega|^\alpha$$

равномерно по  $x$  в каждом компакте из  $R_n^+$ , где  $0 < \alpha \leq 1$ .

При условиях леммы 3 решение задачи (1) — (3) восстанавливается по решению задачи (5) — (7) по формуле

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{v(p, x)}{p-i\omega} e^{pt} dp,$$

где  $\varepsilon > 0$ .

Используя леммы 2–5, можно доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  имеет суммируемые производные до порядка  $(N+n)$  по  $x'$ , а по  $x_1$  убывает как  $(1+|x_1|)^{-(m+1+\varepsilon)}$ .

Тогда для решения задачи (1) — (3) имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-i\omega t} u(t, x) = v(i\omega, x)$$

равномерно по  $x$  в каждом компакте из  $R_n^+$ , где  $v(i\omega, x)$  — решение задачи (5) — (7) при  $p = i\omega$ .

**Замечание.** Если в условии теоремы  $N = m - 1$ , то утверждение теоремы справедливо также для всех производных по пространственным переменным порядка  $|k| \leq m - 2$ .

Институт математики и механики  
Академии наук АзербССР  
Баку

Поступило  
4 III 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Х. О. Крайс, Сборн. пер., Математика, т. 14, 4 (1970). <sup>2</sup> Г. Е. Шилов, Математический анализ (второй спец. курс), «Наука», 1965. <sup>3</sup> R. Hersh, J. Math. and Mech., v. 12, № 3 (1963). <sup>4</sup> М. Г. Гасымов, ДАН, т. 206, № 4 (1972).