Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.9:532 МАТЕМАТИКА

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 V 1974)

1. Пусть идеальная несжимаемая жидкость частично заполняет произвольный сосуд и вращается с ним как твердое тело вокруг неподвижной оси x_3 с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — орт оси x_3). На жидкость действует однородное гравитационное поле $\mathbf{g}=-g\mathbf{k}$, а также капиллярные (поверхностные) силы, которые предполагаются одинаковыми по порядку величины с центробежными и гравитационными.

Рассмотрим задачу о малых движениях жидкости относительно равномерного вращения. Запишем линеаризованные уравнения движения и граничные условия в декартовой системе координат $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, равномерно вращающейся вместе с сосудом с угловой скоростью $\varepsilon\mathbf{k}$. Для определения поля смещений частиц жидкости $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ и поля давлений $p=p(\mathbf{x}, t)$ (отклонения давления от равновесного $p_0(\mathbf{x})=-gx_3+{}^1/_2\varepsilon^2(x_1^2+x_2^2)+$ $+\mathrm{const}$) имеем следующую систему уравнений, краевых и начальных условий ([1], [2]):

$$\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=2\varepsilon\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\times\mathbf{k}-\nabla p+\mathbf{f},\quad \operatorname{div} w=0 \text{ в } \Omega; \tag{1}$$

$$w_n=\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}=0 \text{ на } \Sigma,\quad \int\limits_\Gamma w_n\,d\Gamma=0, \tag{2}$$

$$p=B_1w_n\equiv P_H\mathscr{L}w_n \text{ на } \Gamma,\quad \mathscr{L}\zeta\equiv a\zeta-\sigma\Delta_\Gamma\zeta; \tag{3}$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial\nu}+\mu w_n=0 \text{ на } \gamma; \tag{4}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0)=\mathbf{w}_0(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},0)=\mathbf{w}_1(\mathbf{x}) \tag{5}$$

Здесь Ω — область, занимаемая жидкостью в состоянии относительного равновесия, Γ — свободная поверхность жидкости, Σ — твердая стенка сосуда (которая предполагается кусочно-гладкой). $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Ω, γ — контур пересечения Γ и Σ; $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — заданное малое поле внешних сил; $\sigma>0$ — коэффициент поверхностного натяжения, $a(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}\in\Gamma$) и $\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\gamma$.— заданные функции, определяемые равновесным состоянием жидкости ([2]); Δ_Γ — действующий на Γ оператор Лапласа — Бельтрами, $\partial/\partial\nu$ — соответствующая ему производная по внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$ к контуру γ в плоскости, касательной к Γ.

Оператор $B_1=P_H\mathscr{L}$ из (3) действует в гильбертовом пространстве $H=$ $=L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$ ($H=P_HL_2(\Gamma)$) и определен на множестве функций $\{w_n\}=$ $=D(B_1)\subset W_2^2(\Gamma)\cap H$, удовлетворяющих краевому условию (4). Будем считать, что состояние равновесия вращающейся жидкости в сосуде устойчиво по линейному приближению ([2]), т. е. самосопряженный оператор B_1 положительно определен в H.

2. Для перехода к операторной формулировке задачи (1) — (5) воспользуемся ортогональным разложением пространства вектор-функций $\mathbf{L}_2(\Omega)$ ([3]):

$$\mathbf{L}_2(\Omega)=G_\Gamma(\Omega)\oplus J_\Sigma(\Omega)\oplus J_0(\Omega).$$

Здесь

$$G_\Gamma(\Omega)=\{\mathbf{v}\colon\ \mathbf{v}=\nabla p,\ p\in W_2^{\,1}(\Omega),\ p|_\Gamma=0\},$$

$$J_\Sigma(\Omega)=\left\{\mathbf{w}\colon\ \mathbf{w}=\nabla\varphi,\ \varphi\in W_1^{\,2}(\Omega),\ \Delta\varphi=0,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_\Sigma=0,\ \int\limits_\Gamma\varphi\,d\Gamma=0\right\};$$

а подпространство $J_0(\Omega)$ получается замыканием в норме $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множества гладких функций $J(\Omega)=\{\mathbf{u}\colon \operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ u_n|_{\Gamma+\Sigma}=0\}$.

Будем искать при каждом t решение задачи (1) — (5) в виде

$$\begin{aligned}&\mathbf{w}=\nabla\Phi+\mathbf{u},\quad \nabla\Phi\in J_\Sigma(\Omega),\quad \mathbf{u}\in J_0(\Omega),\\ &\nabla p=\nabla q+\nabla\varphi,\quad \nabla q\in G_\Gamma(\Omega),\quad \nabla\varphi\in J_\Sigma(\Omega).\end{aligned}\tag{6}$$

Вводя проекторы P_Σ и P_0 на $J_\Sigma(\Omega)$ и $J_0(\Omega)$ и действуя ими на левую и правую части (1), будем иметь

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}[P_0(\mathbf{u}\times\mathbf{k})+P_0(\nabla\Phi\times\mathbf{k})]+\mathbf{f}_0,\ \ \mathbf{f}_0=P_0\mathbf{f};\tag{7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi=2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}[P_\Sigma(\mathbf{u}\times\mathbf{k})+P_\Sigma(\nabla\Phi\times\mathbf{k})]-\nabla\varphi+\nabla F,\ \ \nabla F=P_\Sigma\mathbf{f}.\tag{8}$$

Обозначим далее $P_\Sigma(\mathbf{u}\times\mathbf{k})+\nabla\psi$, $P_\Sigma(\nabla\Phi\times\mathbf{k})=\nabla\Psi$. Интегрируя (8), получим интеграл Бернулли, связывающий скалярные функции Φ, φ, Ψ, ψ и F в произвольной точке области Ω. Рассмотрим это соотношение, на Γ и, учитывая, что условие (3) в силу равенств $q|_\Gamma=0$, $u_n|_\Gamma=0$ и представления (6) принимает вид $\varphi|_\Gamma=B_1(\partial\Phi/\partial n)_\Gamma$, приходим к равенству, равносильному условию (3) в задаче (1)—(5):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=2\varepsilon(\psi+\Psi)-B_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma+F\ \text{ на }\Gamma.\tag{9}$$

3. Приведем некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим две краевые задачи:

$$\Delta\Phi=0\ \text{в}\ \Omega,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0\ \text{на}\ \Sigma,\qquad \Phi=\zeta\in H\ \text{на}\ \Gamma;\tag{10а}$$

$$\Delta\Phi=0\ \text{в}\ \Omega,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0\ \text{на}\ \Sigma,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=\alpha\ \text{на}\ \Gamma,\quad \int\limits_\Gamma\Phi\,d\Gamma=0.\tag{10б}$$

Нетрудно видеть, что каждая из задач (10) имеет единственное решение.

Лемма 1. *Для того чтобы элемент $\nabla\Phi$, построенный по решению задачи* (10а), *принадлежал пространству $J_\Sigma(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\zeta\in H_+\equiv W_2^{1/2}(\Gamma)\cap H$. В задаче* (10б) *для этого необходимо и достаточно, чтобы $\alpha\in H_-$, где $H_-=(H_+)'$ — пространство функций с негативной нормой* ([4]), *построенное по нулевому пространству $H_0=H$ и пространству с позитивной нормой H_+.*

Для элементов $\zeta\in H_+$ определим норму в одной из эквивалентных форм:

$$\|\zeta\|_+=\|\nabla\Phi\|_\Omega,\tag{11}$$

где Φ — решение задачи (10а). Рассмотрим далее оператор C, который ставит в соответствие функции $\alpha=(\partial\Phi/\partial n)_\Gamma$ посредством решения задачи (10б) функцию ζ: $C(\partial\Phi/\partial n)_\Gamma\equiv(\Phi)_\Gamma$.

Лемма 2. *C — самосопряженный положительный вполне непрерывный в $H_0=H$ оператор. Его расширение на H_- есть изометрический оператор,* *отображающий H_- на H_+; при этом $D(C^{-1/2})=H_+$, а после расширения $D(C^{-1/2})=H_0$, $C^{-1/2}H_0=H_-$.*

Доказательство лемм 1 и 2 изложено в [3].

Введем обозначение $\eta=C^{1/2}(\partial\Phi/\partial n)_\Gamma$ $(=C^{-1/2}(\Phi)_\Gamma)$ и оператор V соотношением $\nabla\Phi=V\eta$, где Φ — решение задачи (10а) или (10б).

Лемма 3. *При нормировке* (11) *в* H_+ *оператор* V: $H\to J_\Sigma(\Omega)$ *изометрический.*

4. В уравнениях (7) и (9) вместо Φ введем новую искомую функцию η, а затем применим к левой и правой частям (9) оператор $C^{-1/2}$. Это приводит к системе уравнений, которую вместе с преобразованными условиями (5) удобно трактовать как задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $L_2=J_0(\Omega)\oplus H$:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2i\varepsilon A\frac{dy}{dt}+By=f,\qquad y(0)=y_0,\qquad y'(0)=y_1,\tag{12}$$

$$y=\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \eta\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_0\\ C^{-1/2}F\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_0\end{pmatrix},$$

Здесь $B_0=B_0^*=C^{-1/2}B_1C^{-1/2}$, а элементы матрицы A определены следующим образом: а) $P_0(\mathbf{u}\times\mathbf{k})=iA_{11}\mathbf{u}$, б) $P_0(V\eta\times\mathbf{k})=iA_{12}\eta$, в) $C^{-1/2}(\psi)_\Gamma=iA_{21}\mathbf{u}$, $\nabla\psi=P_\Sigma(\mathbf{u}\times\mathbf{k})$, г) $C^{-1/2}(\Psi)_\Gamma=iA_{22}\eta$, $\nabla\Psi=P_\Sigma(V\eta\times\mathbf{k})$.

Оператор A_{11}: $J_0(\Omega)\to J_0(\Omega)$ играет основную роль в задаче о малых движениях вращающейся жидкости в полностью заполненном сосуде [1].

Лемма 4. *A — ограниченный самосопряженный в L_2 оператор; при нормировке* (11) $\|A\|\leqslant 1$.

Доказательство леммы 4 опирается на утверждения лемм 1—3.

5. Осуществляя в (12) замену $d\zeta/dt=iB_0^{1/2}\eta$, $\zeta(0)=0$, получим вместо (12) задачу

$$\frac{d^2z}{dt^2}=i\mathfrak{A}\frac{dz}{dt}+h,\qquad z(0)=z_0,\qquad z'(0)=z_1,\tag{13}$$

где

$$z=\begin{pmatrix}y\\ \zeta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}f\\ 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\mathbf{f}_0\\ C^{-1/2}F\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathfrak{A}=\begin{pmatrix}2\varepsilon A_{11} & 2\varepsilon A_{12} & 0\\ 2\varepsilon A_{21} & 2\varepsilon A_{22} & B_0^{1/2}\\ 0 & B_0^{1/2} & 0\end{pmatrix}=\mathfrak{A}^*.$$

Решение $z(t)$ задачи (13) легко выразить через группу унитарных операторов $U(t)=\exp(it\mathfrak{A})$. В самом деле,

$$\frac{dz}{dt}=U(t)z_1+\int_0^t U(t-\tau)h(\tau)\,d\tau,\tag{14}$$

а $z(t)$ находится после повторного интегрирования (14).

Теорема 1. *Если выполнены условия:* 1^0) $\mathbf{w}_0=\nabla\Phi_0+\mathbf{u}_0$, $\nabla\Phi_0\in J_\Sigma(\Omega)$, $\alpha_0=(\partial\Phi_0/\partial n)_\Gamma\in W_2^1(\Gamma)\cap H$, $\mathbf{u}_0\in\mathbf{L}_2(\Omega)\ominus J_\Sigma(\Omega)$; 2^0) $\mathbf{w}_1\in\mathbf{L}_2(\Omega)$; 3^0) $\mathbf{f}(t)\in\mathbf{L}_2(\Omega)$, $\forall t\in[0,\infty)$, *то задача* (1)—(5) *корректно разрешима и имеет обобщенное решение* $z(t)$ *с конечной полной энергией на интервале* $[0,T]$, $\forall T>0$. *Если капиллярные силы не учитываются, т. е. в* (3) $\sigma=0$, *то в условии* 1^0) *достаточно потребовать* $\alpha_0\in H$.

6. Рассмотрим свободные движения жидкости, т. е. решения задачи (12) при $f(t)\equiv 0$. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда полная (кинетическая+потенциальная) энергия системы сохраняется

$$\|v(t)\|^2\equiv\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2=\|z_1\|^2\equiv\|y_1\|^2+\|B^{1/2}y_0\|^2=\text{const},\tag{15}$$

так как гироскопические силы не совершают работы. Из (15) видно, что поле скоростей $v(t)$ во все моменты времени ограничено по норме $L_2 \oplus H$, однако поле смещений $y(t)$ может линейно расти по t.

Разберем некоторые частные классы свободных движений.

а) Пусть $y_1=0$, $y_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall \mathbf{u}_0 \in J_0(\Omega)$. Тогда решение задачи (12) очевидно: $y(t)=y_0=\mathrm{const}$. Этому решению (назовем его тривиальным решением I типа) отвечает постоянное во времени поле смещений из вихревого подпространства $J_0(\Omega)$; поскольку свободная поверхность Г при этом не возмущается, $(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})_\Gamma=0$, то давление, а вместе с ним и компонента поля смещений из $J_\Sigma(\Omega)$ равны нулю.

б) Будем до конца этого пункта считать, что сосуд и поверхность Г осесимметричны, и зададим начальные условия в (12) в виде вихря:

$$y_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}=\beta(\mathbf{k}\times\mathbf{x}), \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad \eta_0=2i\varepsilon B_0^{-1}A_{21}\mathbf{u}. \tag{16}$$

Тогда решение задачи (12) имеет вид

$$y(t)=y_1t+y_0. \tag{17}$$

Ему отвечает равномерное вращение всей массы жидкости с угловой скоростью $\beta\mathbf{k}$, при этом свободная поверхность жидкости соответственно возмущается на величину $C^{-1/2}\eta_0$ и не изменяется со временем. Назовем решения вида (16), (17) с некоторой $\mathbf{u} \in J_0(\Omega)$ тривиальным решением II типа.

в) Пусть уравнение свободной поверхности Г имеет вид $x_3=\varphi_1(r)$, $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, а твердой стенки сосуда $x_3=\varphi_2(r)$, причем $\varphi_1' \neq \varphi_2'$, $\forall r \in (0, r_{\max})$. Тогда справедлива

Теорема 2. *Для существования тривиальных решений* II *типа необходимо и достаточно, чтобы в задаче* (13) $z_1 \in \mathrm{Ker}\,\mathfrak{A} \neq \varphi$. *Им отвечают* (*в цилиндрической системе координат* (r, θ, x_3)) *функции*

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\, A_{11} = \{\mathbf{u}\colon u_r=u_3=0,\ u_\theta=\xi(r)\},$$

где $\xi(r)$ *произвольно*, $\int\limits_0^{r_{\max}} r[\xi(r)]^2 dr < \infty$.

Физически решения II типа соответствуют стационарным вращениям жидкости по цилиндрическим поверхностям $r=\mathrm{const}$ с переменной угловой скоростью $\beta(r)=\xi(r)/r$; такие движения возможны только в идеальной жидкости.

7. Задача о нормальных колебаниях, т. е. о решениях уравнения (12) при $f=0$, зависящих от времени по закону $\exp(i\omega t)$, приводит к изучению квадратичного пучка $\mathcal{D}(\omega)=\omega^2 I-2\varepsilon\omega A-B$. Примеры показывают, что (в предположении положительной определенности оператора B_1 из (3)) спектр пучка $\mathcal{D}(\omega)$ вещественный и состоит из дискретного спектра поверхностных волн (колебаний жидкости у свободной поверхности Г) при $\omega^2>4\varepsilon^2$ и спектра внутренних волн, плотно заполняющего отрезок $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Если свободная поверхность Г отсутствует, т. е. сосуд полностью заполнен жидкостью, то, как известно [1], имеется только спектр внутренних волн.

Автор благодарит С. Г. Крейна и А. Д. Мышкиса за внимание к работе и полезные замечания.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
27 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 1, 3 (1954). [2] *Н. Д. Копачевский*, В сб. Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости, М., в. 6, 98 (1968). [3] *Н. Д. Копачевский*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 7, № 1, 128 (1967). [4] *Ю. М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.