Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 519.46 МАТЕМАТИКА

Ю. В. ДЗЯДЫК

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СПЕКТРА ИНДУЦИРОВАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА КОМПАКТНОМ СИММЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 26 VII 1974)

Задача о спектре индуцированного представления — одна из основных задач теории представлений групп. Важнейшими из ее частных случаев являются задачи определения спектра представлений групп Ли в векторных полях и в функциях на однородных пространствах; последняя задача, согласно [1], является основной в теории представлений групп Ли.

В настоящее время задача о спектре индуцированного представления полностью решена только для класса нильпотентных групп Ли [2]. Что касается компактных групп Ли, то здесь на протяжении последних 45 лет были получены лишь отдельные частные результаты [3–6].

В этой статье излагается общий метод, который позволяет с помощью некоторых результатов Э. Картана [3] и Д. Желобенко [7, 1] получить все отмеченные выше результаты, а также ряд новых результатов.

1°. На протяжении этой статьи все векторные пространства, за исключением алгебр Ли, рассматриваются над полем комплексных чисел.

Пусть G — связная односвязная компактная группа Ли, σ — ее инволютивный автоморфизм, K — подгруппа неподвижных точек автоморфизма σ, φ — конечномерное представление подгруппы K линейными преобразованиями векторного пространства V, $\operatorname{Ind}\varphi$ — представление группы G, индуцированное представлением φ подгруппы K. Спектр представления $\operatorname{Ind}\varphi$ будем обозначать через $I(\varphi)$.

Содержание этой работы — указание правила для вычисления некоторого множества $\bar{I}(\varphi)$, содержащего спектр $I(\varphi)$. Во всех рассмотренных автором случаях (в частности, для всех сфер и комплексных проективных пространств) эти два множества совпадают.

Введем обычные обозначения [4, 8, 9]: $M\subset K$ — стационарная подгруппа точки общего положения в окрестности полюса $o=\{K\}\in G/K$, H — такая σ-инвариантная картановская подгруппа в G, что $B=K\cap H$ — подгруппа Картана в M, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ — алгебры Ли, соответствующие группам G, K, M, H, B; $\mathfrak{p}=\mathfrak{g}\ominus\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\ominus\mathfrak{b}$, где $\ominus$ — ортогональное дополнение относительно формы Киллинга. Как обычно, отождествим пространства $\mathfrak{h}$ и $i\mathfrak{h}^*$ и выберем в $\mathfrak{h}$ упорядочение, лексикографическое относительно базиса $X_1,\ldots,X_p\in\mathfrak{a}$, $X_{p+1},\ldots,X_l\in\mathfrak{b}$. Через $I(0)$ будем обозначать спектр представления группы G в функциях на симметрическом пространстве G/K, через λ,ν — старшие веса неприводимых представлений алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ в векторных пространствах V_λ, V_ν. Под объединением множеств всегда понимается дизъюнктное объединение: $\{a\}\cup\{a\}=\{a,a\}$.

Теорема о спектре (слабая форма). *Пусть*

$$V=V_{\nu_1}+\ldots+V_{\nu_n}, \tag{1}$$

$n=n(\varphi)$,— разложение пространства V на неприводимые компоненты относительно подалгебры $\mathfrak{m}$.

Тогда существуют такие n старших весов $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ алгебры $\mathfrak{g}$, что множество

$$\bar{I}(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\Lambda_i + \lambda, \lambda \in I(0)\} \tag{2}$$

содержит спектр $I(\varphi)$ индуцированного представления. Веса $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ можно упорядочить таким образом, что для всех i будет выполняться равенство

$$\Lambda_i|_{\mathfrak{b}} = \nu_i. \tag{3}$$

2°. Лемма о старшем векторе. *Пусть λ — произвольный старший вес алгебры $\mathfrak{g}$, v_λ — старший вектор модуля V_λ. Тогда*

$$U(\mathfrak{k}) v_\lambda = V_\lambda, \tag{4}$$

где $U(\mathfrak{k})$ — универсальная обертывающая алгебра подалгебры $\mathfrak{k}$.

Следствие. *Пусть V* — произвольный *$\mathfrak{k}$-модуль, V_λ — произвольный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, $\nu = \lambda|_{\mathfrak{b}}$ — старший вес неприводимого представления подалгебры $\mathfrak{m}$ в подпространстве $U(\mathfrak{m}) v_\lambda \subset V_\lambda$. Отображение*

$$\pi \to \pi|_{U(\mathfrak{m}) v_\lambda} \tag{5}$$

определяет мономорфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(V_\lambda, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{m}}(V_\nu, V). \tag{6}$$

Отображение $\pi \to \pi v_\lambda$ определяет мономорфизм $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(V_\lambda, V) \to V$. *Справедливы неравенства*

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(V_\lambda, V) \leqslant \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{m}}(V_\nu, V) \leqslant \dim V; \tag{7}$$

в частности,

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(V_\lambda, \mathbf{C}) \leqslant 1. \tag{8}$$

3°. Пусть α — корень алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{g}_\alpha$ наименьшую подалгебру в $\mathfrak{g}$, инвариантную относительно инволюции σ, комплексификация которой содержит корневое подпространство $\mathfrak{g}^\alpha$. Положим

$$\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_\alpha. \tag{9}$$

Предложение. *Подалгебра $\mathfrak{g}_\alpha$ изоморфна одной из трех полупростых алгебр A_1, A_2, D_2.*

Если корень α простой, то подалгебру $\mathfrak{g}_\alpha$ легко определить из схемы Сатаке пространства G/K ([4], [8]). Будем называть корень α компактным, если $\alpha \in \mathfrak{b}$, и некомпактным в противном случае. Ясно, что если корень α компактен, то $\mathfrak{g}_\alpha \simeq A_1$. Пусть теперь α — простой некомпактный корень алгебры $\mathfrak{g}$. Будем говорить, что простой компактный корень β связан с корнем α, если все корни между α и β на схеме Сатака компактны. Пусть α' — единственный простой корень алгебры $\mathfrak{g}$, определенный условием $\sigma\alpha + \alpha' \in \Sigma \cap \mathfrak{b}$ ([8]). Обозначим через Π_α множество простых корней, содержащее корни α, α' и все простые компактные корни, связанные с α. Схема Сатаке системы простых корней Π_α является схемой Сатаке некоторого симметричного пространства ранга 1; обозначим это пространство через M_α.

Теорема. *Подалгебра $\mathfrak{g}_\alpha$ однозначно определена пространством M_α. Соответствие между M_α и $\mathfrak{g}_\alpha$ описывается следующей таблицей:*

M_α	S^2	$S^n, n \geqslant 3$	$P^n(\mathbf{C}), P^n(\mathbf{Q}), P^n(\mathbf{O}), n \geqslant 2$
$\mathfrak{g}_\alpha$	A_1	D_2	A_2

4°. Пусть λ — произвольный старший вес алгебры $\mathfrak{g}$, V — произвольный $\mathfrak{k}$-модуль. Обозначим через $W(\lambda)$ пространство таких векторов $w \in V$, для которых выполняются следующие эквивалентные условия:

(I) Вектор w является старшим относительно подалгебры $\mathfrak{m}$, и для любого простого корня α существует $\mathfrak{k}_\alpha$-мономорфизм

$$U(\mathfrak{k}_\alpha)w \to U(\mathfrak{k}_\alpha)v_\lambda; \tag{10}$$

(II) для любого простого корня α алгебры $\mathfrak{g}$ существует $\mathfrak{k}_\alpha$-гомоморфизм

$$U(\mathfrak{k}_\alpha)v_\lambda \to U(\mathfrak{k}_\alpha)w, \tag{11}$$

переводящий v_λ в w.

Заметим, что, согласно лемме о старшем векторе, имеет место изоморфизм

$$U(\mathfrak{k}_\alpha)v_\lambda \simeq V_{\lambda\alpha}, \tag{12}$$

где $\lambda_\alpha = \lambda|_{\mathfrak{h}_\alpha}$ — старший вес неприводимого $\mathfrak{g}_\alpha$-модуля $U(\mathfrak{g}_\alpha)v_\lambda$.

Через φ мы обозначим представление группы K в векторном пространстве V, через $\bar{I}(\varphi)$ — множество старших весов группы G, которое каждый вес λ содержит столько раз, какова размерность пространства $W(\lambda)$.

Следующая теорема утверждает, что каждое неприводимое подпространство сечений $V_\lambda \subset \operatorname{Ind}\varphi$ однозначно определено своим старшим весом λ и значением старшего вектора в полюсе $v_\lambda(0)$, причем вектор $v_\lambda(0)$ содержится в подпространстве $W(\lambda)$. (Полюсом $o \in G/K$ мы назвали образ подгруппы K при естественной проекции $G \to G/K$.)

Основная теорема. *Отображение*

$$\pi \to \pi v_\lambda \tag{13}$$

определяет мономорфизм векторных пространств

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{k}}(V_\lambda, V) \to W(\lambda). \tag{14}$$

Следствие. $I(\varphi) \subseteq \bar{I}(\varphi)$.

5°. Обозначим через W подпространство векторов из V, старших относительно подалгебры $\mathfrak{m}$:

$$W = \{v \in V\colon X_\alpha v = 0 \text{ для всех } \alpha \in \Pi \cap \mathfrak{b}\}. \tag{15}$$

Пусть вектор $w \in W$ обладает свойством: для каждого простого корня $\alpha \in \Pi$ существует вес λ_α подалгебры $\mathfrak{g}_\alpha$ такой, что существует $\mathfrak{k}_\alpha$-мономорфизм

$$U(\mathfrak{k}_\alpha)w \to V_{\lambda_\alpha}. \tag{16}$$

Поскольку $\dim(\mathfrak{h}_\alpha \cap \mathfrak{m}) = 1$, то для каждого фиксированного α такие веса λ_α линейно упорядочены; обозначим через $\lambda_\alpha(w)$ наименьший из них.

Предложение. *Существует единственный старший вес $\Lambda = \Lambda(w)$ алгебры $\mathfrak{g}$ такой, что для всех α*

$$\Lambda(w)|_{\mathfrak{h}_\alpha} = \lambda_\alpha(w). \tag{17}$$

Теорема о спектре (сильная форма). *В пространстве W существует такой базис $\{w_1, \ldots, w_n\}$, что*

$$\bar{I}(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\Lambda(w_i) + \lambda_0,\ \lambda_0 \in I(0)\}. \tag{18}$$

6°. Найдем теперь спектр $I(0)$ представления группы G в функциях на симметрическом пространстве G/K.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — такой набор простых некомпактных корней алгебры $\mathfrak{g}$, что при $i \neq j$ имеем $\mathfrak{h}_{\alpha_i} \cap \mathfrak{h}_{\alpha_j} = 0$. Пусть λ_{α_i} — наименьший ненулевой старший вес подалгебры $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, для которого

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{k}_{\alpha_i}}(V_{\lambda_{\alpha_i}}, \mathbf{C}) \neq 0. \tag{19}$$

Определим старший вес λ_i алгебры $\mathfrak{g}$ условиями

$$\lambda_i|_{\mathfrak{h}_{\alpha_i}} = \lambda_{\alpha_i}, \quad \lambda_i|_{\mathfrak{h} \ominus \mathfrak{h}_{\alpha_i}} = 0. \tag{20}$$

Теорема

$$\bar{I}(0)=\left\{\sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_i,\ a_i\in\mathbf{Z},\ a_i\geqslant 0\right\}. \tag{21}$$

Используя одну из теорем Э. Картана (([3]), п. 27°) можно доказать равенство $I(0)=\bar{I}(0)$.

7°. Используя результаты Д. Желобенко ([7]), легко найти явный вид спектра $I(\varphi)$ индуцированного представления в случае, когда $G/K=\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SU}(n+1)/U(n)$. Сравнивая спектр $I(\varphi)$ с множеством $\bar{I}(\varphi)$, мы получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $G/K=S^n$ или $P^n(\mathbf{C})$. Тогда для любого представления φ подгруппы K ($K=\mathrm{SO}(n)$, $U(n)$ соответственно) справедливо тождество*

$$I(\varphi)=\bar{I}(\varphi). \tag{22}$$

8°. Изложенные результаты можно частично распространить на несколько более общий, чем рассмотренный нами, случай. В самом деле, нетрудно заметить, что все они опираются на лемму о старшем векторе (п. 2°) и теорему о подалгебрах $\mathfrak{g}_\alpha$ (п. 3°). Лемма о старшем векторе использует лишь тот факт, что для алгебры $\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ имеет место разложение Ивасава. Аналог разложения Ивасава, как можно показать, имеет место также для пространств $\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}\,(n+1)/\mathrm{Sp}\,(n)\cdot\mathrm{SO}\,(2)$, $\mathrm{Spin}\,(7)/G_2$ (но не имеет места уже для $\mathrm{Sp}\,(2)/\mathrm{Sp}\,(1)$). Для всех этих пространств справедливы также аналоги теорем п.п. 1, 2, 6.

Автор выражает благодарность А. Л. Онищику за постановку задачи, внимание и ряд ценных указаний.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
18 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Д. П. Желобенко*, Компактные группы Ли и их представления, «Наука», 1970. [2] *А. А. Кириллов*, УМН, т. 17, № 4, 57 (1962). [3] *E. Cartan*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, v. 53, № 2, 217 (1929). [4] *M. Sugiura*, Proc. Japan. Acad., v. 38, 111 (1962). [5] *А. А. Кириллов*, ДАН, т. 116, № 4, 538 (1957). [6] *А. А. Кириллов*, Научн. докл. высш. школы, физико-матем. науки, № 6, 152 (1958). [7] *Д. П. Желобенко*, УМН, т. 17, № 1, 27 (1962). [8] *I. Satake*, Ann. Math., v. 71, № 1, 77 (1960); Сборн. пер., Математика, т. 5, № 3, 45 (1961). [9] *С. Хелгасон*, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964.