Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 539.4 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. М. ЛЕВИН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 27 V 1974)

В настоящей заметке выводятся формулы для эффективных упругих модулей двухкомпонентных композитных материалов, состоящих из однородного связующего (матрицы) и частиц наполнителя эллипсоидальной формы. Полученные результаты справедливы при значительной объемной концентрации включений, а также при произвольном различии в упругих свойствах компонентов.

Рассмотрим композитную среду, связь между напряжениями σ и деформациями ε в произвольной точке которой подчиняется закону Гука

$$\sigma(x)=L(x):\varepsilon(x), \tag{1}$$

причем тензор модулей упругости $L(x)$ является функцией координат, принимающей постоянное значение L_1, если точка x находится во включении, и L_2 — в матрице.

Введем макроскопические поля напряжений $\langle\sigma\rangle$ и деформаций $\langle\varepsilon\rangle$ как средние тензоров σ и ε, взятые по характерному макроскопическому объему композита V. Под V будем понимать область с размерами, существенно превышающими расстояния между включениями, но в пределах которой изменением макроскопических полей напряжений и деформаций можно пренебречь. Характерный объем содержит достаточное для осреднения представительное число включений, причем материал в его пределах можно считать макроскопически однородным. Вследствие линейности локальных связей (1) средние напряжения и деформации также подчиняются закону Гука

$$\langle\sigma\rangle=L^*:\langle\varepsilon\rangle, \tag{2}$$

где L^* — тензор эффективных упругих модулей композитного материала. Рассматриваемая задача заключается в определении тензора L^* по заданным упругим свойствам и геометрическим характеристикам составляющих

Представим тензор $L(x)$ в виде

$$L(x)=L_2+\delta L(x), \tag{3}$$

где

$$\delta L(x)=[L]\sum_m{}' \delta_m(x), \qquad [L]=L_1-L_2,$$

$\delta_m(x)$ — характеристическая функция m-го эллипсоида (равная единице внутри и нулю вне эллипсоида), а суммирование распространяется на все включения в характерном объеме. Осредняя выражение (1) по объему V с учетом этого представления, получим

$$\langle\sigma\rangle=L_2:\langle\varepsilon\rangle+[L]:\sum_m{}' c_m\bar{\varepsilon}_m; \tag{4}$$

здесь $c_m=v_m/V$, v_m — объем m-го эллипсоида, $\bar{\varepsilon}_m$ — тензор деформации. осредненный по этому объему. Будем считать, что все эллипсоиды одинаковы по величине, но различно ориентированы в пространстве. Тогда величины $\bar{\varepsilon}_m$ зависят лишь от ориентации главных осей эллипсоидов относительно некоторой фиксированной системы координат. Эту ориентацию можно задать, например, с помощью углов Эйлера, совокупность которых обозначим символом ω. Если включений в объеме V достаточно много, можно ввести непрерывную плотность распределения по ориентациям $c(\omega)$ и от суммы в правой части формулы (4) перейти к интегралу:

$$\sum_m c_m \bar{\varepsilon}_m = \int c(\omega)\,\bar{\varepsilon}(\omega)\,d\omega \langle \bar{\varepsilon} \rangle_\omega. \tag{5}$$

Средние поля деформаций во включениях определяются заданием средних деформаций в материале $\langle \varepsilon \rangle$, следовательно должна существовать зависимость

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_\omega = \bar{A} : \langle \varepsilon \rangle, \tag{6}$$

которая в соответствии с формулами (4) и (2) приводит к следующему выражению для тензора эффективных упругих модулей:

$$L^* = L_2 + [L] : \bar{A}. \tag{7}$$

Таким образом, задача определения величины L^* сводится к вычислению постоянного четырехвалентного тензора $\bar{A}$. Для этой цели воспользуемся уравнением равновесия

$$\nabla \cdot [L(x) : \varepsilon(x)] = 0,$$

которое с помощью представления (3) можно свести к интегральному уравнению

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + G : \delta L : \varepsilon; \tag{8}$$

здесь G — интегральный оператор с ядром $G_{ijkl}(x, x') = U_{i(k,l)j}(x, x')$, $U_{ik}(x, x')$ — тензор Грина для однородной среды с упругими модулями L_2, исчезающий на поверхности характерного объема, ε^0 — поле деформаций, удовлетворяющее уравнению $\nabla \cdot L_2 : \varepsilon^0 = 0$ и граничным условиям на поверхности V. Эти условия можно выбрать так, чтобы поле ε^0 было однородным. Осреднив обе стороны уравнения (8) по характерному объему, можем записать

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^0 + G : \langle \delta L : \varepsilon \rangle. \tag{9}$$

Вычитая уравнение (9) из (8), приходим к интегральному уравнению

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + G : (\delta L : \varepsilon - \langle \delta L : \varepsilon \rangle), \tag{10}$$

которое связывает микроскопические и макроскопические деформации в объеме V.

Фиксируем точку наблюдения x внутри произвольного включения v_α и перепишем уравнение (10) следующим образом:

$$\varepsilon(x) = \langle \varepsilon \rangle + \int_{v_\alpha} G(x, x') : [L] : (\varepsilon(x') - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_\omega)\,dx' +$$

$$+ \sum_j \int_{v_j} G(x, x') : [L] : \varepsilon(x')\,dx' - \int_{V - v_\alpha} G(x, x') : [L] : \langle \bar{\varepsilon} \rangle_\omega\,dx', \tag{11}$$

где суммирование производится по всем включениям, кроме выделенного ($j \neq \alpha$). Представим эту сумму приближенно в виде

$$\sum_j \int_{v_j} G(x, x') : [L] : \varepsilon(x')\,dx' = \sum_j G(x, x_j) : [L] : \bar{\varepsilon}(\omega_j)\,v_j, \tag{12}$$

что соответствует замене влияния всех включений на выделенное влиянием силовых диполей, сосредоточенных в центрах включений x_j. Следующий шаг по пути вычисления этой суммы можно сделать, заменив дискретное непрерывным распределением диполей в области $V-v_\alpha$. Для этого следует ввести плотность $c(x, \omega)$, которую, предполагая макроскопическую однородность материала в окрестности выделенного включения, заменим приближенным соотношением

$$c(x,\omega)\approx\frac{1}{V}c(\omega).$$

В результате имеем

$$\sum_j G(x,x_j):[L]:\bar{\varepsilon}(\omega_j)v_j=\int\limits_{V-v_\alpha}G(x,x'):[L]:\langle\bar{\varepsilon}\rangle_\omega\,dx'. \qquad (13)$$

Таким образом, сумма и последний член в правой части уравнения (11) при сделанных предположениях равны между собой и взаимно уничтожаются. Осреднив теперь обе стороны этого уравнения по объему v_α, найдем

$$\bar{\varepsilon}_\alpha=\langle\varepsilon\rangle-P_\alpha:[L]:(\bar{\varepsilon}_\alpha-\langle\bar{\varepsilon}\rangle_\omega),\qquad P_\alpha=\int\limits_{v_\alpha}G(x,x')\,dx',\qquad x,x'\in v_\alpha. \qquad (14)$$

Вычисление этого интеграла требует знания функции Грина $U(x, x')$. Будем считать объем V настолько большим, чтобы функцию $U(x, x')$ можно было заменить функцией Грина $U^\infty(x-x')$ для неограниченной среды. Тогда для изотропной матрицы тензор P_α имеет вид $P_\alpha=S_\alpha L_2^{-1}$, где $S_\alpha=S(\omega_\alpha)$ — тензор Эшелби ([1]), обладающий некоторыми свойствами орторомбической симметрии с осями, параллельными главным осям эллипсоида v_α, а его компоненты выражаются через эллиптические интегралы. Уравнение (14) дает возможность выразить $\langle\bar{\varepsilon}\rangle_\omega$ через $\langle\varepsilon\rangle$, т. е. найти тензор $\bar{A}$ и в соответствии с формулой (7) получить следующее выражение для тензора:

$$L^*=L_2+[L]:(I-\langle A:P\rangle_\omega:[L])^{-1}:\langle A\rangle_\omega, \qquad (15)$$

где $A=(I+P:[L])^{-1}$, I — единичный тензор.

Пусть компоненты композитного материала изотропны, а включения имеют сферическую форму. Тогда тензор L^* также изотропен:

$$L^*_{ijkl}=k^*\delta_{ij}\delta_{kl}+2\mu^*(I_{ijkl}-{}^1/_3\delta_{ij}\delta_{kl}),$$

причем эффективные объемный k^* и сдвиговой μ^* упругие модули композита определяются формулами

$$\frac{k^*}{k_2}=1+\frac{c_1[k]}{k_2+c_2\alpha[k]},\qquad \frac{\mu^*}{\mu_2}=1+\frac{c_1[\mu]}{\mu_2+c_2\beta[\mu]}, \qquad (16)$$

где c_1 и c_2 — объемные концентрации компонентов $(c_1+c_2=1)$, k_i, μ_i, $i=1, 2$, — их объемные и сдвиговые упругие модули, $\alpha=3-5\beta=3k_2/(3k_2+4\mu_2)$. Первое из этих выражений совпадает с полученным в работе ([2]) для композита со сферическими включениями. Модуль же сдвига μ^* всегда расположен между весьма узкими границами, найденными там же с помощью вариационных принципов. Следует отметить, что формулы (16) приводят к непротиворечивым результатам во всем диапазоне изменения концентраций компонентов и в том случае, когда жесткость включений существенно выше жесткости матрицы (армированный материал) или же роль включений играют пустоты (пористый материал).

Рассмотрим пористую среду, поры которой имеют форму эллипсоидов вращения с полуосями $a_1=a_2=a>a_3=b$ и отношением полуосей $\xi=b/a$. Устремляя ξ к нулю, приходим к материалу, ослабленному круговыми плоскими трещинами. Если все ориентации трещин равновероятны, то тензор эффективных упругих модулей такого материала изотропен.

Осуществляя предельный переход при $\xi\to 0$, из общей формулы (15) найдем

$$\frac{k^*}{k_2}=1-\frac{3c\alpha_0}{1+3c\alpha_0},\quad \frac{\mu^*}{\mu_2}=1-\frac{2c\beta_0}{1+2c\beta_0}; \tag{17}$$

здесь обозначено: $c={}^4/_3\pi na^3$, n — числовая концентрация трещин,

$$\alpha_0=\frac{4}{9\pi}\frac{1-\nu_2^2}{1-2\nu_2},\quad \beta_0=\frac{4}{15\pi}\frac{(1-\nu_2)(5-\nu_2)}{2-\nu_2},$$

ν_2 — коэффициент Пуассона матрицы.

При малом содержании трещин в теле (т. е. при малом c) из формул (17) имеем

$$\frac{k^*}{k_2}=1-3c\alpha_0,\quad \frac{\mu^*}{\mu_2}=1-2c\beta_0. \tag{18}$$

Эти выражения совпадают с результатами работы ([3]), полученными для невзаимодействующих трещин.

Петрозаводский государственный университет

Поступило 21 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дж. Эшелби*, Континуальная теория дислокаций, М., 1963. [2] *Z. Hashin*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, v. 29, 173 (1962). [3] *Р. Л. Салганик*, Мех. тверд. тела, № 4, 149 (1973).