Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

В. М. КОКИЛАШВИЛИ

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 17 VI 1974)

В настоящем сообщении продолжаются исследования работ [1–4] о мультипликаторах преобразований Фурье в различных функциональных пространствах.

Пусть R^n — эвклидово пространство n измерений, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка в R^n, $|x|=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$, $S(R^n)$ — пространство Шварца основных функций на R^n, т. е. бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой степени $|x|$ (при $|x|\to\infty$), S' — пространство непрерывных линейных функционалов (обобщенных функций) над $S(R^n)$. Рассмотрим разбиение пространства $(R\setminus\{0\})^n=(R\setminus\{0\})\times\ldots\times(R\setminus\{0\})$. Пусть $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\in R^n$ и $m=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — точка с целочисленными координатами, причем каждое из чисел m_i может принимать значения $0, \pm1, \pm2, \ldots$ Положим $Q_m=\{\lambda\colon 2^{m_i}\leqslant|\lambda_i|<2^{m_i+1},\ i=1,2,\ldots,n\}$. В дальнейшем $\varphi_m(x)$ будет обозначать функцию, преобразование Фурье которой сосредоточено в Q_m и там совпадает с преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$.

В качестве весов будут рассматриваться функции класса A_p [5]. Измеримая, неотрицательная функция $w\in A_p$, $1<p<+\infty$, если существует такая постоянная $C_{p,w}$, что для произвольного интервала $I\subset R^1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)\,dx\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right)^{p-1}\leqslant C_{p,w}. \qquad (1)$$

В работе [5] доказано, что для ограниченности одномерного преобразования Гильберта в пространстве $L_{p,w}$, $1<p<+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $w\in A_p$.

Пусть $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $1<p_i<+\infty$, $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_i\in A_{p_i}$, $1\leqslant\theta<+\infty$. Положим $L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(R^n)=\{f\colon \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{w}}<+\infty\}$, где

$$\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{w}}=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_1(x_1)\,dx_1\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(x_2)\,dx_2\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p_n}w_n(x_n)\,dx_n\right)^{1/p_n}\ldots\right]^{p_1\cdot 1/p_2}\right\}^{1/p_1}<+\infty.$$

Можно доказать, что для $\varphi\in S(R^n)$

$$|\varphi, \Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}|=\left\|\left(\sum_m|\varphi_m(x)|^\theta\right)^{1/\theta}\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{w}}<+\infty. \qquad (2)$$

Пополнение пространства $S(R^n)$ по норме (1) будем называть пространством $\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}$. Если $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$, то введенное пространство будем обозначать через $\Lambda_{p,\mathbf{w},\theta}$. При $w_i(x)\equiv1$, $i=1,2,\ldots,n$, $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$ пространство $\Lambda_{p,\mathbf{w},\theta}$ было введено и изучено П. И. Лизоркиным [1,2].

Можно показать, что каждый $f \in \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)$ является элементом S', представимым в виде ряда

$$f = \sum_m f_m,$$

где f_m — целые функции со спектром, сосредоточенным в Q_m, с условием

$$\left\| \left\{ \sum_m |f_m(x)|^\theta \right\}^{1/\theta} \right\|_{\mathbf{p}, \mathbf{w}} < +\infty.$$

Далее, каждый линейный непрерывный функционал над $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}$, $1 < p_i < +\infty$, $1 \leqslant \theta < +\infty$, $w_i \in A_{p_i}$, представляется в виде

$$\sum_m (f_m, \psi_m), \qquad f = \sum_m f_m \in \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta},$$

где $\psi = \sum_m \psi_m$ — некоторый элемент из $\Lambda_{\mathbf{p}', \mathbf{w}', \theta}$, $w' = (w_1', w_2', \ldots, w_n')$, $w_i' = w_i^{-1/(p-1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отсюда следует, что сопряженное к $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)$, $1 < p_i < +\infty$, $1 \leqslant \theta < +\infty$, $w_i \in A_{p_i}$, пространство изоморфно с пространством $\Lambda_{\mathbf{p}', \mathbf{w}', \theta}(R^n)$, причем при $1 < p_i < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)$ является рефлексивным пространством.

В дальнейшем преобразование Фурье $\tilde{f}$ функции $f \in \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)$ понимается как преобразование Фурье элемента S', $\hat{g}$ — прообраз Фурье функции g.

Измеримая функция $\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ называется мультипликатором в $\mathscr{F} \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}$, если найдется такая постоянная c_0, что

$$|\widehat{\Phi \tilde{f}}, \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)| \leqslant c_0 |f, \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)|.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_i < +\infty$, $w_i \in A_{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $1 < \theta < +\infty$. *Предположим, что функция* $\Phi(\lambda)$ *в каждом* Q_m *представима в виде*

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \ldots \int_{-\infty}^{\lambda_n} d\mu_m, \tag{3}$$

где μ_m — *конечные меры, с условием*

$$\operatorname{var} \mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} |d\mu_m| \leqslant M.$$

Тогда найдется такая постоянная c, *что*

$$|\widehat{\Phi(\lambda) \tilde{f}(\lambda)}, \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)| \leqslant cM |f, \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}(R^n)|.$$

При $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, $w_i \equiv 1$ теорема 1 обращается в результат П. И. Лизоркина [1].

Доказательство теоремы 1 использует метод, предложенный Дж. Шварцем [6] и идущий от И. Марцинкевича [7]. Упомянутый метод, развитый дальше в работах [1, 2, 8, 9], состоит в представлении довольно широкого класса операторов, инвариантных относительно сдвига, в виде суперпозиций некоторых «элементарных» преобразований. Наиболее важные, среди упомянутых преобразований, изучаются в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_i < +\infty$, $w_i \in A_{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда кратное преобразование Гильберта*

$$Hf(x_1, x_2, \ldots x_n) = \int_{Rn} f(t, t_2, \ldots, t_n) \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i - t_i} dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

является ограниченным преобразованием в $L_{\mathbf{p}, \mathbf{w}}(R^n)$.

В частности, при $p_1=p_2=\dots p_n$ для определенного класса весовых функций вопрос об ограниченности кратного преобразования Гильберта рассматривался в ([10]).

Пусть далее $L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)$ — пространство вектор-функций $F(x)$, $F(x)=\{F_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых

$$|F, L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)|=\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|F_k(x)|^\theta\right)^{1/\theta}\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{w}}<+\infty.$$

Лемма. *Кратное преобразование Гильберта является ограниченным оператором в* $L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)$ *при* $1<p_i<+\infty$, $w_i\in A_p$, $1\leqslant\theta<+\infty$.

Обозначим через S совокупность вектор-функций $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x),\dots)$, где $\varphi_k\in S$.

Теорема 3. *Пусть* $1<p_i<+\infty$, $1<\theta<+\infty$. *Предположим, что*

$$\Phi_k(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda_1}\dots\int_{-\infty}^{\lambda_n}d\mu_k,$$

где μ_k — *конечные меры равномерно ограниченной полной вариации.*

Тогда отображение $\mathscr{L}$, *определенное на* $S\cap L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)$ *как*

$$\mathscr{L}F=\left\{\widehat{\Phi_k\tilde{f}_k}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

может быть продолжено до ограниченного отображения в $L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)$, *причем найдется такая постоянная* c, *не зависящая от* f, *что*

$$|\mathscr{L}F, L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)|\leqslant cM|F,\quad L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(l_\theta)|,\qquad M=\operatorname*{Sup}_k \operatorname{var}\mu_k.$$

Из теоремы 3 известным путем ([1,2]) выводится теорема 1.

Следствие. *Пусть функция* $\Phi(\lambda)$ *непрерывна вне координатных плоскостей и обладает там производными* $\partial^k\Phi/\partial\lambda_1^{k_1}\dots\partial\lambda_n^{k_n}$, $0\leqslant k_1+\dots+k_n=k\leqslant n$, $k_i=0,1$, *с условием*

$$\left|\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_n^{k_n}\frac{\partial^k\Phi}{\partial\lambda_1^{k_1}\dots\partial\lambda_n^{k_n}}\right|\leqslant M.$$

Тогда $\Phi\in\mathscr{F}\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}$, $1<p_i<+\infty$, $w_i\in A_{p_i}$, $1<\theta<+\infty$.

В работе ([8]) найдены достаточные условия, которым удовлетворяет функция $\Phi(\lambda)$, для того чтобы оператор, заданный в образах Фурье формулой $(\widetilde{Kf})\lambda=\Phi(\lambda)\tilde{f}(\lambda)$, действовал ограничению из $L_p(R^n)$ в $L_q(R^n)$, $1<p\leqslant q<+\infty$. Далее будем рассматривать аналогичную задачу в $\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}$.

Измеримая четная функция $w\in N_\gamma(T_\gamma)$, если она положительна и возрастает (убывает) на $(0,+\infty)$, причем найдется такое число α, $0<\alpha<\gamma$, что $w(x)\cdot x^{-\alpha}\downarrow(w(x)x^\alpha\uparrow)$. Имеют место включения $N_{p-1}\subset A_p$, $T_1\subset A_p$.

Теорема 4. *Пусть функция* $\Phi(\lambda)$ *в каждом* Q_m *представима в виде*

$$\Phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda_1}\dots\int_{-\infty}^{\lambda_n}\frac{d\rho_m(t_1,t_2,\dots,t_n)}{(\lambda_1-t_1)^{\beta_1}(\lambda_2-t_2)^{\beta_2}\dots(\lambda_n-t_n)^{\beta_n}},\tag{4}$$

где $\beta_i=1-1/p_i+1/q_i$, $i=1,2,\dots,n$, ρ_m — *конечные меры равномерно ограниченной полной вариации.*

Если $1<p_i\leqslant q_i<+\infty$, $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\dots,w_n)$, $w_i\in N_{p_i-1}\cup T_{p_i/q_i}$, $\rho=(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n)$, $\rho_i=w_i^{q_i/p_i}$, *то тогда оператор* K *ограничен из* $\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}(R^n)$ *в* $\Lambda_{\mathbf{q},\rho,\theta}(R^n)$, *причем найдется постоянная* c, *не зависящая от* f, *такая, что*

$$|Kf,\Lambda_{\mathbf{q},\rho,\theta}(R^n)|\leqslant cM|f,\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}(R^n)|,\qquad M=\operatorname{Sup}\operatorname{var}\rho_m.$$

Следствие. *Пусть функция $\Phi(\lambda)$ непрерывна вне координатных плоскостей и обладает там непрерывными производными*

$$\partial^k\Phi/\partial\lambda_1^{k_1}\ldots\partial\lambda_n^{k_n},\quad 0\leqslant k_1+k_2+\ldots+k_n=k\leqslant n,\quad k_i=0,1,$$

с условием

$$\left|\lambda_1^{k_1+\beta_1}\ldots\lambda_n^{k_n+\beta_n}\frac{\partial^k\Phi}{\partial\lambda_1^{k_1}\ldots\partial\lambda_n^{k_n}}\right|\leqslant M.$$

Тогда оператор K является ограниченным из $\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}(R^n)$ в $\Lambda_{\mathbf{q},\rho,\theta}(R^n)$, причем норма этого отображения мажорируется числом M.

Замечание. Все приведенные выше результаты справедливы, если рассматривать разбиения $R^n\setminus\{0\}$ на «коридоры» Γ_m, m — целое число, $\Gamma_m=D_m\setminus D_{m-1}$, $D_m=\{\lambda\in R_n\colon |\lambda_i|<2^m,\ i=1,2,\ldots,n\}$. (При $p_1=p_2=\ldots=p_n$, $w_i\equiv\rho_i\equiv1$ см. [2].)

Далее исследуется вопрос о мультипликаторах в пространствах Лоренца с весом. Пространством Лоренца L^{ps} называют (см., например, [11]) множество измеримых функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_{ps}=\left\{\frac{s}{p}\int_0^\infty[f^{**}(t)t^{1/p}]^s dt/t\right\}^{1/s}<+\infty,\quad 1\leqslant p<+\infty,\quad 1\leqslant s<+\infty,$$

где

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(x)\,dx,$$

f^* — убывающая функция, равноизмеримая с f.

Пусть $w(x)$ — неотрицательная, измеримая функция на R^1 и $\|f\|_{ps,w}=\|fw\|_{ps}$.

Положим $L_w^{ps}=\{f\colon \|f\|_{ps,w}<+\infty\}$.

Теорема 5. *Пусть $w\in N_{1/p'}\cup T_{1/q}$, $1<p<q<+\infty$, $p'=p/(p-1)$. Далее предположим, что $\rho_m(t)$ — конечные меры с условием*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|d\mu_m|\leqslant M.$$

Если функция $\Phi(\lambda)$ в Q_m представима в виде

$$\Phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho_m(t)}{(\lambda-t)^\beta},\quad \beta=1/p-1/q+1,$$

то тогда оператор K является ограниченным, как оператор, действующий из L_w^{ps} в L_w^{qr} при произвольных s и r, $1\leqslant s$, $r<+\infty$, причем найдется такая постоянная c, не зависящая от функции, что

$$\|Kf\|_{qr,w}\leqslant cM\|f\|_{ps,w}.$$

В качестве веса, удовлетворяющего условиям теоремы 5, можно брать, например, функцию $w(x)=|x|^\alpha$, где $-1/q<\alpha<1/p'$.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
7 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. И. Лизоркин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 89, 231 (1967). [2] *П. И. Лизоркин*, Там же, т. 131, 158 (1974). [3] *В. М. Кокилашвили*, Тр. Тбилисск. матем. инст., т. 43, 87 (1973). [4] *В. М. Кокилашвили*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 60, № 3, 529 (1970). [5] *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden*, Trans. Am. Math. Soc., v. 176, 227 (1973). [6] *J. Schwartz*, Comm. Pure and Appl. Math., v. 14, № 4, 785 (1961). [7] *J. Marcinkiewicz*, Studia Mathematica, v. 8, 78 (1939). [8] *П. И. Лизоркин*, ДАН, т. 152, № 4, 808 (1963). [9] *П. И. Лизоркин*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, 218 (1970). [10] *Л. В. Жижиашвили*, Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969. [11] *R. Hunt*, Enseignement Math., v. 12, 249 (1966).