

К. Х. БОЙМАТОВ

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 XI 1974)

В настоящей заметке оценивается остаточный член в асимптотической формуле для распределения собственных значений эллиптического оператора

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega),$$

где Ω — произвольное открытое множество в R_n . Самосопряженность имеет место из-за вырождения или неограниченности коэффициента $a_0(x)$ возле границы, поэтому граничные условия не рассматриваются.

В случае $\Omega = R_n$ основное достижение работы состоит в ослаблении тауберова условия, и так как асимптотику функций

$$\text{sp}(P+tE)^{-h}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \text{sp}(\exp(-\tau P)), \quad \tau \rightarrow 0,$$

можно изучить при весьма широких условиях на коэффициенты оператора P , то понятно, что именно тауберова условие явилось наиболее слабым местом в «тауберовых» методах.

Отметим, что при исследовании задачи Коши для соответствующего параболического уравнения мы заранее не предполагаем, что $a_0(x)$ или остальные коэффициенты являются растущими функциями.

1. Пусть Ω — открытое множество в R_n , P — замыкание в $L_2(\Omega)$ симметрического оператора

$$P_0 u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x), \quad u(\cdot) \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad D_x^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Символ $P(x, s) \neq 0$ для всех $x \in \Omega, s \in R_n \setminus \{0\}$.

Предполагается, что $P(x, s) = A(x, s) + B(x, s)$, где $A(x, s)$ — неотрицательный символ, $B(x, s)$ удовлетворяет неравенству

$$|B(x, s)| \leq M A(x, s)^\kappa,$$

где $M > 0, 0 \leq \kappa < 1$.

Пусть $f(x)$ — положительная функция на Ω и для каждого $a \in [0, 1]$ удовлетворяет условию

$$f(x) \leq M f(y)^{1+a} \quad \text{для} \quad |x-y| f(y) \leq f(y)^a.$$

Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется условие: для $|x-y| f(y)^{1-\varepsilon} \leq 1$

$$f(x) \leq M f(y).$$

Далее мы предполагаем, что для каждой конечной точки $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Будем обозначать

$$\tilde{Q}(x, s) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} |d_\alpha(x) s^\alpha|.$$

Предположим, что для всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x-y|f(y) < 1$, и для всех $s \in R_n$ выполняется равномерная оценка

$$|A(x, s) - A(y, s)| \leq MA(x, s)^\nu \{1 + |x-y|f(x)A(x, s)^\nu\},$$

где $\nu \geq 0$.

Пусть для любого $\gamma \neq 0$

$$\tilde{D}_s^\gamma P(x, s) \leq M f^{-|\gamma|}(x) |P(x, s)|^{\sigma - |\gamma|},$$

где $\sigma > \kappa$.

Имеет место следующая

Теорема 1. При сформулированных выше условиях $P = P^*$, и в множестве

$$K_\sigma = \{w \mid |\operatorname{Im} w| \leq (\operatorname{Re} w)^\sigma, 0 < \operatorname{Re} w < c_0\}$$

справедливо равенство

$$\exp(-wP) = G(w) + \int_0^w G(w-u) \varphi(u) du,$$

где $|\varphi(w)| = O((\operatorname{Re} w)^{-\kappa})$, а $G(w)$ — оператор-функция,

$$G(w) = \sum_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} \varphi_{\mathfrak{z}}(w, \cdot) \exp(-wA(\mathfrak{z})) \chi_{\mathfrak{z}}(w, \cdot),$$

где \mathfrak{Z} — счетное подмножество в $(0, c_0) \times \Omega$, $A(\mathfrak{z})$ — дифференциальный оператор с символом $A(\mathfrak{z}, s)$, $\chi_{\mathfrak{z}}$ — характеристическая функция носителя функции $\varphi_{\mathfrak{z}}(w, x)$. Интегрирование в (1) ведется по прямолинейному отрезку. При каждом фиксированном w функции $\varphi_{\mathfrak{z}}(w, \cdot)$ осуществляют разбиение единицы множества Ω и обладают следующими свойствами:

I. $\varphi_{\mathfrak{z}}(w, x) = 0$, если $\mathfrak{z} = (u, z)$, $|x-z|f(z) \geq |\operatorname{Re} u|^\nu$;

II. $|D_x^\alpha \varphi_{\mathfrak{z}}(w, x)| \leq M_\alpha f(x)^{|\alpha|} |\operatorname{Re} w|^{-\nu(\alpha)}$;

III. $\left| \frac{d}{dw} \varphi_{\mathfrak{z}}(w, x) \right| \leq M |w|^{-1} \chi_{\mathfrak{z}}(w, x)$, где дифференцирование ведется

по направлению от нуля до w ;

IV. Для любых равномерно ограниченных операторов $T_{\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w) T_{\mathfrak{z}} \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w) \leq M \sup_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} |\dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w) T_{\mathfrak{z}} \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w)| \right|,$$

где $\dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w)$ — оператор умножения на функцию $\chi_{\mathfrak{z}}(w, x)$, M от w , $T_{\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, не зависит.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 тогда и только тогда оператор P имеет дискретный спектр, когда

$$\lim_{a_0(x)} = \infty.$$

при $x \rightarrow x_0$ для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$, а также при $x \rightarrow \infty$, если Ω — неограниченное множество.

Сформулируем теперь результат об асимптотике спектра.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 оператор P имеет дискретный спектр, и функция

$$\Phi(\lambda) = (2\pi)^{-n} \iint_{|P(x,s)| < \lambda} dx ds$$

удовлетворяет условию

$$\Phi(a\lambda) = O(\lambda^\tau) \Phi(\lambda), \quad (1)$$

где $\tau \geq 0$, $a > 2$.

Тогда, если $\kappa + \tau < 1$, то для $N(\lambda)$ — числа собственных значений оператора P , не превосходящих λ , справедлива асимптотическая формула

$$N(\lambda) = \Phi(\lambda) (1 + O(\lambda^{-(\kappa+\tau-1)/2})).$$

Тогда и только тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-p} < +\infty$$

(λ_k — собственные значения оператора P), когда

$$\int_{\Omega} \int_{R_n} |P(x,s)|^{-p} dx ds < +\infty.$$

2. Считая, что функции $\varphi_{\mathfrak{z}}(w, x)$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, обладающие свойствами I–IV, существуют, остановимся на дальнейших существенных моментах доказательства теорем 1 и 3.

Оператор-функция $\varphi(w)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(w) = \varphi_0(w) + \int_0^w \varphi_0(w-u) \varphi(u) du, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(w) = & \sum_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} \left(\frac{d}{dw} \dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w) \right) e^{-A(z)w} \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w) + \sum_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} \dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w) (P - A(z)) \times \\ & \times \exp(-wA(z)) \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w) + \sum_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} [P, \dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w)] \exp(-wA(z)) \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w); \quad (3) \end{aligned}$$

здесь $\dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w)$ — оператор умножения на функцию $\varphi_{\mathfrak{z}}(w, x)$, дифференцирование берется по направлению от нуля до w .

Так как при $\varphi_{\mathfrak{z}}(w, x) \neq 0$, $\mathfrak{z} = (w, z)$ символы $P(x, s)$, $A(z, s)$ операторов P , $A(z)$ достаточно близки между собой, а в третьем слагаемом правой части (3) мы имеем дело с коммутатором, то понятно, что эти слагаемые оцениваются хорошо. Для оценки первого слагаемого применяется тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dw} \dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w) \exp(-wA(z)) \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w) = \\ & = \sum_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}} \dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w) \frac{d}{dw} \dot{\varphi}_{\mathfrak{z}}(w, z) \cdot (\exp(-wA(z)) - \exp(-wA(\bar{z})) \dot{\chi}_{\mathfrak{z}}(w)). \end{aligned}$$

Методом последовательных приближений доказывается существование решения $\varphi(w)$ уравнения (2). В условиях теоремы 3 можно доказать неравенство

$$|\varphi(w)|_1 \leq M |\operatorname{Re} w|^{-\kappa} \rho_{\varphi}(\bar{a} \operatorname{Re} w),$$

где $|\cdot|_1$ — ядерная норма, \tilde{a} — число, сколь угодно близкое к 2,

$$\rho_\Phi(t) = \int_0^\infty \exp(-tr) d\Phi(r).$$

Далее доказывается неравенство

$$\left| \operatorname{sp} \exp(-wP) - \int_0^\infty e^{-wr} d\Phi(r) \right| \leq M |\operatorname{Re} w|^{-\kappa} \rho_\Phi(\operatorname{Re} w), \quad (4)$$

где

$$\rho_\psi(t) = \int_0^\infty \exp(-tr) d\psi(r), \quad \psi(r) = \max(\Phi(r), r^r \Phi(r/a)).$$

Из условия (1) следует, что $\psi(t)$ — неубывающая функция, $\psi(2t) = O(\psi(t))$, $\rho_\psi(\operatorname{Re} w) = O(\rho_\psi(2 \operatorname{Re} w))$ и поэтому к (4) можно непосредственно применить тауберову теорему М. Субханкулова (¹).

Отметим, что в работах ряда авторов (см., например, (², ³)), хотя не применяются тауберовы теоремы, тем не менее возникают условия, близкие к тауберовым.

В заключение отметим работы (⁴, ⁵), где имеется библиография по рассмотренным выше вопросам.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Субханкулов, Тр. матем. инст. АН СССР, т. 64 (1961). ² В. Н. Туловский, М. А. Шубин, Матем. сб., т. 92, № 4 (1973). ³ Г. В. Розенблюм, Матем. сб., т. 93, № 3 (1974). ⁴ М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Тр. Московск. матем. общ., т. 27 (1972). ⁵ И. А. Киприянов, Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 117 (1972).