

Л. А. ЛЮКСЕМБУРГ

О КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

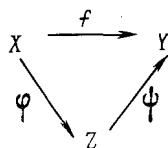
(Представлено академиком П. С. Александровым 7 VIII 1974)

В первой части рассматриваются универсальные (в смысле гомеоморфного вложения) бикомпакты данного веса в классе пространств, имеющих фиксированную когомологическую размерность по группе коэффициентов G . Напомним, что когомологической размерностью $\dim_c X$ пространства X называется такое наибольшее целое число n , что $\check{H}^n(X, A; G) \neq 0$ для некоторого замкнутого множества $A \subseteq X$. Везде в первой части мы рассматриваем группы когомологий Александра — Чеха, определяемые с помощью конечных открытых покрытий. Если в указанном определении рассматривать когомологии, основанные на всевозможных открытых покрытиях, то получим определение размерности $\text{Dim}_c X$. Для бикомпактов оба эти определения эквивалентны следующему: когомологическая размерность пространства X по группе коэффициентов G есть наибольшее целое число n такое, что $H_c^n(U; G) \neq 0$ для некоторого открытого множества $U \subset X$. $H_c^n(U; G)$ (соответственно $H_n^c(U; G)$) означает группу когомологий (соответственно гомологий) с компактными носителями. Последнее определение будет использовано во второй части, где рассматриваются размерно полноценные компакты.

В дальнейшем, отображения предполагаются непрерывными, а покрытия — открытыми конечными.

1. Факторизационная теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение бикомпакта X в бикомпакт Y веса $\leq \tau$, $C = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ — некоторое множество (мощности $\leq \tau$) замкнутых множеств в X , $\dim C_\alpha \leq m_\alpha$, $m_\alpha = 0, 1, 2, \dots$, и $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — множество классов пар $\{G_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta}\}$, $G_{\alpha\beta}$ — абелева группа, $n_{\alpha\beta}$ — целое число, и $\dim_{G_{\alpha\beta}} C_\alpha \leq n_{\alpha\beta}$ для любого $\alpha \in A$ и каждой пары $\{G_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta}\} \in U_\alpha$.

Тогда существует бикомпакт Z веса $\leq \tau$ и такие отображения $\varphi: X \rightarrow Z$, $\psi: Z \rightarrow Y$, что диаграмма



коммулативна.

Теорема 1. Пусть $A = \{G_\alpha, n_\alpha\}$ — класс пар, где G_α — конечно-порожденная абелева группа, n_α — целое число, $n_\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Пусть класс B нормальных пространств X веса $\leq \tau$ таких, что $\dim_{G_\alpha} X \leq n_\alpha$, $\dim X = n$, непуст; тогда в B есть универсальный (в смысле гомеоморфного вложения) элемент, являющийся бикомпактом.

Заметим, что в случае $n_\alpha = n$ это утверждение превращается в теорему Зарелуа — Пасынкова^(11, 12).

Следствие 1. В классе компактов X таких, что $\dim_c X = n$, G — конечно-порожденная абелева группа, есть универсальный элемент.

Теорема 2. Пусть $U = \{G_\alpha, n_\alpha\}$ — некоторый класс пар конечно-порожденных абелевых групп G_α и целых чисел n_α и $n = 0, 1, 2, \dots$

Тогда в классе таких паракомпактов X , что $\text{Dim}_{G_\alpha} X \leq n_\alpha$, $\dim X \leq n$ есть универсальный элемент, являющийся бикомпактом.

Заметим, что из этой теоремы вытекает теорема И. А. Шведова (3).

2. Напомним, что компакт X называется размерно полноценным, если для любого компакта Y верно равенство $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$. В. Г. Болтянский (4) доказал, что компакт X размерно полноценен тогда и только тогда, когда для произвольной абелевой группы G имеем $\dim_G X = \dim X$.

Определение. Пусть дан эвклидов куб I^n и в нем k пар различных противоположных граней (A_i, B_i) , $i=1, 2, \dots, k$, $k \leq n$. Допустим, что C_i — перегородка * между A_i и B_i в I^n ; тогда если $\dim Q = n - k$ для множества $Q = \bigcap_{i=1}^k C_i$, то Q называется $(n-k)$ -мерным псевдокубом **.

Заметим, что пересечение $\bigcap_{i=h}^k C_i$ всегда имеет размерность $\geq n - k$ (3).

Теорема 3. Каждый псевдокуб Q размерно полноценен.

Доказательство. Как указывалось выше, достаточно доказать, что $\dim_G Q = \dim Q$ для любой абелевой группы $G \neq 0$. Рассмотрим вначале множество Q_0 (не обязательно являющееся псевдокубом), которое есть пересечение q перегородок C_i , $i=1, \dots, q$, между парами противоположных граней (A_i, B_i) , $i \leq q$, в кубе I^n . Мы будем считать, что куб I^n есть произведение n отрезков $[0, 1]$ и грани A_i и B_i определяются равенствами $A_i = \{x: x_i = 0\}$, $B_i = \{x: x_i = 1\}$, где x_i — i -я координата точки $x \in I^n$. Рассмотрим далее q -мерную грань I^q куба I^n , определенную равенствами $x_{q+1} = \dots = x_n = 0$, и пусть B^{q-1} — комбинаторная граница этой грани. Очевидно, что $B^{q-1} \subset I^n \subset Q_0$.

Теперь мы индукцией по q покажем, что множество B^{q-1} является носителем некоторого цикла с компактными носителями и с коэффициентами в G , неомологичного нулю в $I^n \setminus Q_0$. Возьмем такую триангуляцию μ куба I^n , что его грани являются телами подкомплексов в μ . Каждая грань I^q , $q=1, \dots, n$, ориентируется в порядке возрастания ее ребер, а каждый q -мерный симплекс ее триангуляции ориентируется согласованно с этой ориентацией. Зафиксируем элемент $g \in G$, отличный от 0, тогда через gI^q обозначим цепь, в которую все положительно ориентированные симплексы, лежащие в I^q , входят с коэффициентом g . Пусть грань \tilde{I}^q определяется равенствами $x_{q+1} = 1$, $x_{q+2} = \dots = x_n = 0$. Ориентация грани \tilde{I}^q определяется параллельным переносом грани I^q , а цепь $g\tilde{I}^q$ строится аналогично цепи gI^q . Определим далее цепи gB^{q-1} и $g\tilde{B}^{q-1}$ равенствами

$$gB^{q-1} = \partial gI^q, \quad g\tilde{B}^{q-1} = \partial g\tilde{I}^q. \quad (1)$$

Пусть $M_q = \overline{B^q \setminus I^q \cup \tilde{I}^q}$, тогда M_q — тело некоторого подкомплекса триангуляции μ , причем существует такая цепь gM_q , в которую каждый симплекс из μ , лежащий в M_q и взятый в надлежащей ориентации, входит с коэффициентом g и

$$gB^{q-1} - g\tilde{B}^{q-1} = \partial gM_q. \quad (2)$$

Ясно, что тогда

$$gB^q = (gI^q - g\tilde{I}^q) - gM_q. \quad (3)$$

Заметим, что цепи, входящие в равенства (1) — (3), естественно определяют цепи с компактными носителями в $I^n \setminus Q_0$. В дальнейшем мы под символами gB^{q-1} , $g\tilde{B}^{q-1}$, gI^q , $g\tilde{I}^q$, gM_q будем понимать цепи с компактными носителями, для которых снова, очевидно, верны равенства (1) — (3). Рассмотрим теперь цикл gB^{q-1} и покажем, что $gB^{q-1} \neq 0$ (неомологичен нулю) в $I^n \setminus Q_0$. Пусть $q=1$, тогда полиэдр $B^{q-1} = B^0$ состоит из двух точек a и a' .

* Перегородкой в пространстве X между множествами A и B называется такое замкнутое множество $R \subset X$, что $X \setminus R$ есть объединение двух дизъюнктивных открытых множеств U и V , $U \cup V = X$.

** Как показал Бинг (6), $(n-1)$ -мерная перегородка в n -мерном кубе может быть наследственно неразложимым континуумом.

и поскольку в этом случае множество Q_0 есть перегородка в I^n , разделяющая точки a_0 и a_1 , то $gB^0 = (ga_0 - ga_1) \neq 0$ в $I^n \setminus Q_0$.

Предположим, что наше утверждение доказано при $q=r$. Покажем, что оно верно при $q=r+1$. Тогда нам нужно показать, что $gB^r \neq 0$ в $I^n \setminus Q_0$. Рассмотрим систему U , состоящую из всех компактов, лежащих в $I^n \setminus Q_0$ и содержащих множество $D = \bigcup_{i=1}^{r+1} (A_i \cup B_i) \supset B^r$. Возьмем произвольный компакт $\varphi \in U$ и докажем, что $gB^r \neq 0$ в φ . Существуют компакты ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющие условиям:

$$\varphi = \psi_1 \cup \psi_2, \quad \psi_1 \ni \bigcup_{i=1}^r A_i \cup B_i, \quad \psi_1 \cap Q_0' = \emptyset,$$

где

$$Q_0' = \bigcap_{i=1}^r C_i, \quad \psi_2 \ni A_{r+1} \cup B_{r+1}, \quad \psi_2 \cap C_{r+1} = \emptyset.$$

При $q=r$ из равенств (1) — (3) следует, что

$$(gB^{r-1} - g\bar{B}^{r-1}) = \partial(gI^r - g\bar{I}^r), \quad (gB^{r-1} - g\bar{B}^{r-1}) = \partial(gM_r), \\ gB^r = gI^r - g\bar{I}^r - gM_r.$$

Поскольку $\psi_1 \supset M_r$, $\psi_2 \supset I^r \cup \bar{I}^r$, то для негомологичности нулю цикла gB^r по теореме Фрагмена — Брауэра (1) достаточно доказать, что $(gB^{r-1} - g\bar{B}^{r-1}) \neq 0$ в $\psi_1 \cap \psi_2$. Так как $\psi_1 \cap \psi_2 \cap C_{r+1} = \emptyset$, то множество $\psi_1 \cap \psi_2$ есть объединение двух дизъюнктивных замкнутых множеств ξ_1 и ξ_2 , $\xi_1 \supset B^{r-1}$, $\xi_2 \supset \bar{B}^{r-1}$, и нам достаточно доказать, что $gB^{r-1} \neq 0$ в ξ_1 . Однако, по предположению индукции, цикл $gB^{r-1} \neq 0$ в $I^n \setminus Q_0'$, а поскольку $\xi_1 \subset \psi_1 \cap \psi_2 \subset \psi_1 \subset I^n \setminus Q_0'$, то $gB^{r-1} \neq 0$ и в ξ_1 . Итак, $gB^r \neq 0$ в φ , а поскольку $\varphi \in U$ — произвольный компакт, то $gB^r \neq 0$ в $I^n \setminus Q_0$.

Пусть S^{n-1} — граница куба I^n , а $I^n = I^n \setminus S^{n-1}$ — его внутренность. Покажем, что группа $H_q^c(I^n \setminus Q_0; G)$ отлична от нуля. Для этого рассмотрим гомотетию $D^t: I^n \rightarrow I^n$ с центром в точке 0, являющейся центром куба, и с коэффициентом сжатия $t > 1$. Мы будем считать, что циклы gB_t^{q-1} получены гомотетиями D^t из цикла gB^{q-1} . Из доказанного выше следует, что $gB_t^{q-1} \neq 0$ в $D^t(I^n) \setminus Q_0$, если $(t-1)$ достаточно мало. Найдется такое $\delta > 0$, что при $(t-1) < (t'-1) < \delta$ циклы gB_t^{q-1} и $gB_{t'}^{q-1}$ гомологичны в $D^t(I^n) \setminus Q_0$. Пусть $z_t \in H_{q-1}^c(D^t(I^n) \setminus Q_0; G)$ — класс цикла gB_t^{q-1} , тогда $z_t \neq 0$. Поскольку

$$H_{q-1}^c(I^n \setminus Q_0; G) = \lim_{\rightarrow} \{H_{q-1}^c(D^t(I^n) \setminus Q_0; G) : E_t^{t'}, (t-1) < (t'-1) < \delta\},$$

где $E_t^{t'}: H_{q-1}^c(D^{t'}(I^n) \setminus Q_0; G) \rightarrow H_{q-1}^c(D^t(I^n) \setminus Q_0; G)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением $D^{t'}(I^n) / Q_0 \subset D^t(I^n) \setminus Q_0$ и $E_t^{t'}(z_{t'}) = z_t$, то $H_{q-1}^c(I^n \setminus Q_0; G) \neq 0$. Покажем, что $\dim_G Q_0 \geq n - q$.

Рассмотрим фактор-отображение $f: I^n \rightarrow S^n$, склеивающее в точку $p_0 \in S^n$ границу куба S^{n-1} . Тогда, согласно закону двойственности Александра — Понтрягина (7), имеем

$$H_{q-1}^c(I^n \setminus Q_0; G) = H_{q-1}^c(f(I^n \setminus Q_0); G) = \\ = H_c^{n-q}(S^n \setminus f(I^n \setminus Q_0); G) = H_c^{n-q}(f(Q_0) \cup \{p_0\}; G) \neq 0.$$

Поэтому $\dim_G(f(Q_0) \cup \{p_0\}) \geq n - q$, а поскольку множество $f(Q_0) \setminus \{p_0\}$ топологически содержится в Q_0 и от удаления одной точки из неодноточечного

множества его когомологическая размерность не меняется, то $\dim_* Q \geq n - q$. Пусть теперь множество Q_0 есть псевдокуб Q . Тогда поскольку $\dim Q = n - q$, то и $\dim_G Q = \dim Q = n - q$. Теорема доказана.

Предложение. *Компакт, топологически содержащий псевдокуб той же размерности, сам гомеоморфен некоторому псевдокубу.*

Из этого утверждения вытекает, что каждое $(n-1)$ -мерное замкнутое множество в кубе I^n гомеоморфно псевдокубу.

Построим теперь двумерный размерно полноценный компакт T , не являющийся псевдокубом. Пусть P — множество всех простых чисел. Для каждого $p \in P$ рассмотрим компакт X_p такой, что *

$$\dim X_p = \dim_{R_p} X_p = \dim_R X_p = \dim_{Q_p} X_p = \dim_{Z_p} X_p = 2, \quad \dim_{Z_q} X_p = 1$$

при $p \neq q, q \in P$ (компакты X_p были построены в (10)).

Пусть $T = \{\omega\} \bigcup_{p \in P} X_p$ — компактификация с помощью точки ω дискрет-

ной суммы компактов $X_p, p \in P$. Из первой теоремы М. Ф. Бокштейна (8) следует, что $\dim_G T = 2$ для любой абелевой группы $G \neq 0$. С другой стороны, для любой окрестности $O\omega$ точки ω найдется такое $p \in P$, что $X_p \subset O\omega$, следовательно, $\dim_{Z_p}(T \setminus O\omega) \leq 1$, т. е. $T \setminus O\omega$ не размерно полноценно, если $\dim(T \setminus O\omega) = 2$. Легко видеть, что у любой точки псевдокуба есть такая окрестность, дополнение до которой является снова псевдокубом и поэтому размерно полноценно по теореме 4. Отсюда следует, что компакт T не гомеоморфен никакому псевдокубу.

Автор выражает благодарность М. Ф. Бокштейну за советы и интерес к работе.

Поступило
19 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Борсук, Матем. сб., т. 1 (43), 543 (1936). ² К. Morita, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, v. 23, 161 (1941). ³ В. Гуревич, Г. Волмен, Теория размерности, М., 1948. ⁴ В. Г. Болтянский, ДАН, т. 67, № 5 (1949). ⁵ В. Г. Болтянский, УМН, т. 6, № 3 (1951). ⁶ R. H. Bing, Trans. Am. Math. Soc., v. 71, № 2, 267 (1951). ⁷ П. С. Александров, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, ч. 1 (1955). ⁸ М. Ф. Бокштейн, Тр. Московск. матем. общ., т. 5, 3 (1956). ⁹ М. Ф. Бокштейн, Там же, т. 6, 3 (1957). ¹⁰ Y. Kodata, J. Math. Soc. Japan, v. 11, № 2, 94 (1959). ¹¹ Б. А. Пасынков, ДАН, т. 154, № 5 (1964). ¹² А. В. Зарелуа, ДАН, т. 154, № 5 (1964). ¹³ А. В. Зарелуа, Proc. of the I Symp. Intern. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications, Berlin, 1967, p. 249. ¹⁴ В. И. Кузьминов, УМН, т. 23, № 5, 143 (1968).

* Здесь R обозначает группу рациональных чисел, R_p — ее подгруппу, состоящую из всех чисел со знаменателем, не делящимся на p , $Q_p \approx R/R_p$, Z_p — группа порядка p .