

в работе [1]), запишем выражение для инкремента нарастания возмущений ν :

$$p\omega_m \approx 2\omega_H, \quad (14)$$

$$\nu^2 = -\frac{\alpha^2}{\omega_1 \omega_2 a_1^2 a_2^2} \left\{ \frac{\omega_0^2 (\beta_1 k_{1z} + k_{1y})}{k_1^2} \left[(\beta_2 k_{1z} + k_{1y}) + \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{u}) (\beta_2 k_{2z} + k_{2y})}{\omega_2} \right] + \left[(1 + \beta_1 \beta_2) \omega_1 + \frac{\omega_H^2}{\omega_2} \right] (\mathbf{k}_2 \mathbf{u}) + \right. \\ \left. + \mathbf{k}_0 \mathbf{u} \omega_1 \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_2 O \left(\frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} \right) \right\} \left\{ \frac{\omega_0^2 (\beta_2 k_{2z} + k_{2y})}{k_2^2} \left[(\beta_1 k_{2z} + k_{2y}) + \frac{(\mathbf{k}_2 \mathbf{u}) (\beta_1 k_{1z} + k_{1y})}{\omega_1} \right] + \left[(1 + \beta_1 \beta_2) \omega_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_H^2}{\omega_1} \right] (\mathbf{k}_1 \mathbf{u}) + k_0 u \omega_2 \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_2 O \left(\frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} \right) \right\}, \quad (12)$$

где

$$a_{1,2}^2 = \beta_{1,2}^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2 k_{1,2}^2} (\beta_{1,2} k_{1,2z} + k_{1,2y})^2 + 1 + \frac{\omega_H^2}{\omega_{1,2}^2}; \\ \beta_{1,2} = \frac{\omega_0^2 k_{1,2y} k_{1,2z}}{\omega_{1,2}^2 k_{1,2}^2 - \omega_0^2 k_{1,2z}^2}.$$

Из (12) следует, что максимальный инкремент нарастания электромагнитных волн имеет порядок

$$\nu \approx \frac{\alpha}{10} \omega_H. \quad (13)$$

Отметим, что описанный выше распад электронной продольной волны на две электромагнитные, по-видимому, экспериментально наблюдался в работе [3]. Роль ленгмюровских колебаний играл первоначально модулированный электронный пучок. Неустойчивость по отношению к возбуждению поперечных волн воз-

где ω_m — «частота» модулированного пучка; $p=1, 2, 3, \dots$. При $p=1$ условие (14) совпадает с условием распада основной гармоники [см. (11)]; при $p=2, 3$ уравнение (14) является условием распада кратных гармоник.

В заключение автор приносит благодарность Р. З. Сагдееву, А. А. Галееву, а также Я. Б. Файнбергу и его сотрудникам за полезные дискуссии.

Поступило в Редакцию 28/VI 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. «Ж. техн. физ.», XXXII (1962).
2. А. А. Галеев, В. И. Карпман. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, 592 (1963).
3. И. Ф. Харченко и др. «Ж. техн. физ.», XXXI 761 (1961). Я. Б. Файнберг. «Атомная энергия», 11, 313 (1961).

УДК 621.384.614

К расчету фазовых соотношений в циклотроне

Г. Н. Вялов

Фазовое движение в циклотроне изучалось, например, в работах [1, 2]. Как известно, уравнение фазового сдвига можно представить в виде

$$\sin \varphi_2 \sin \varphi_1 = \kappa \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi) d\xi + \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{2} - p(\xi_2 - \xi_1) \right]; \quad (1)$$

$$\kappa = \frac{\pi W_K^2}{2eV_0 m_0 c^2} \frac{A}{Z}; \quad (2)$$

где φ и $2V_0$ — фаза и амплитуда ускоряющего потенциала между дуантами соответственно; W_K — конечная энергия иона на один нуклон; e — элементарный заряд; c — скорость света; m_0 — масса покоя нуклона; A и Z — массовое и зарядовое числа иона соответственно. Спад магнитного поля $h(\xi)$ и превышение магнитного поля H_0 в центре над резонансным значением H_{p0} определяются соотношениями

$$H(\xi) = H_0 [1 - \varepsilon_K h(\xi)]; \quad (3)$$

$$H_{p0} = H_0 (1 - \varepsilon_K p), \quad (4)$$

$$\text{где } \varepsilon_K = \frac{W_K}{m_0 c^2}.$$

Полагая в (1) $\xi_1 = \xi_s$, $\xi_2 = \xi_0 = 0$ и решая (1) относительно $2eV_0$, получим

$$2eV_0 = \frac{\pi W_K^2}{m_0 c^2} \frac{A}{Z} D(\xi_s, \varphi), \quad (5)$$

где

$$D(\xi_s, \varphi) = \frac{\int_{\xi_s}^0 h(\xi) d\xi - \frac{\xi_s^2}{2} + p\xi_s}{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s}, \quad (6)$$

причем $p = h_s + \xi_s$; ξ_s — энергия иона в точке поворота фазы. Для определения ξ_s можно воспользоваться уравнением

$$B_1 = \frac{\sin \varphi_K - \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s} = \frac{\int_0^1 h(\xi) d\xi + \frac{1}{2} - p}{\int_{\xi_s}^0 h(\xi) d\xi - \frac{\xi_s^2}{2} + p\xi_s}. \quad (7)$$

В общем случае интегралы

$$J_K = \int_0^1 h(\xi) d\xi; \quad J_s = \int_0^{\xi_s} h(\xi) d\xi;$$

величину ξ_s из (7) можно найти численными методами. Как известно, ξ_s и $D(\xi_s, \varphi)$ очень просто вычисляются аналитически, если магнитное поле уменьшается в зависимости от радиуса по параболическому закону или линейному спаду в зависимости от энергии:

$$H(\xi) = H_0(1 - \alpha \varepsilon_K \xi), \quad (8)$$

т. е. $h = \alpha \xi$. В этом случае для ξ_s , $D(\xi_s, \varphi)$ и $2eV_0$ получаются очень простые выражения:

$$\xi_s = \frac{1}{1 + \sqrt{B}}; \quad D = \frac{(1 + \alpha) \xi_s^2}{2(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s)}; \quad (9)$$

$$2eV_0 = \frac{\pi W_K^2 A}{2m_0 c^2 Z} \frac{1 + \alpha}{(1 + \sqrt{B})^2 (\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s)}, \quad (10)$$

где $B = 1 + B_1$. Однако в практике простой формулой (10) из-за непараболичности реального спада можно пользоваться только для очень приближенных оценок. В реальных циклотронах имеются большие отклонения от чисто параболического спада в центре циклотрона, где создается магнитный «горб» для улучшения аксиальной фокусировки, и вблизи края магнита, где для аппроксимации поля нужно к параболическому члену добавлять члены типа ξ^n с $n \geq 5$ [2]. Поэтому формула (10) дает сильно завышенную оценку для $2eV_0$, если α определяется по спаду поля на конечном радиусе $r = R_K$ (завышение порядка 50%). Таким образом, формула (10), вообще говоря, неприменима для практических расчетов. Использование общих формул (5)–(7) для анализа многих вариантов шиммирования магнитного поля и выбора оптимального варианта в процессе наладки ускорителя практически неудобно, так как требует довольно большого объема вычислений.

В 1955 г. И. М. Матора предложил такой способ вычисления $2eV_0$, когда функция спада $h(\xi)$ в окрестности точки поворота ξ_s аппроксимировалась линейным спадом

$$h(\xi) = a + \alpha \xi, \quad \xi_1 < \xi < \xi_2. \quad (11)$$

В таком приближении уравнение (7) квадратично по ξ_s , и решается элементарно. Это упрощает вычисление, хотя при $\xi < \xi_1$ и $\xi > \xi_2$ все еще приходится иметь дело с численным интегрированием, что затрудняет общий анализ фазовых соотношений.

В процессе наладки ускорителей тяжелых ионов Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ потребовалось анализировать большое число вариантов спада магнитного поля. В этом случае оказалось полезным вывести и практически использовать приближенные формулы типа (10), дающие удовлетворительную точность расчета. При выводе приближенных формул исходили из обобщения аппроксимации типа (11). Интервал энергий от 0 до 1 разбивали на n участков точками $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = 1$. Очевидно, что при достаточно большом числе точек n и достаточно малой длине каждого участка (ξ_{i-1}, ξ_i) спад поля на каждом i -м участке аппроксимируется линейной функцией

$$h(\xi) = a_i + \alpha_i \xi, \quad \xi_{i-1} < \xi < \xi_i \quad (12)$$

с любой заранее заданной точностью. На практике из простых соображений легко определить, в каком из интервалов (ξ_{i-1}, ξ_i) находится точка поворота ξ_s . Предположим, что номер i этого интервала известен. Тогда, обозначая

$$J_i = \int_0^{\xi_i} h d\xi,$$

получим

$$J_i = \sum_{j=1}^i [a_j (\xi_j - \xi_{j-1}) + 1/2 \alpha_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)]; \quad (13)$$

$$J_s = \tilde{J}_{i-1} + a_i \xi_s + \frac{\alpha_i}{2} \xi_s^2; \quad (14)$$

$$\tilde{J}_{i-1} = J_{i-1} - a_{i-1} \xi_{i-1} - \frac{\alpha_{i-1}}{2} \xi_{i-1}^2. \quad (15)$$

Уравнение (7) можно записать в виде

$$B_1 = \frac{Q - 2\xi_s}{\xi_s^2 - T}, \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{2}{1 + \alpha_i} (J_n + 1/2 - a_i); \\ T &= \frac{2}{1 + \alpha_i} \tilde{J}_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Отсюда имеем

$$\xi_s = \frac{1}{1 + \sqrt{B}} + \frac{\sqrt{B}}{B_1} (\sqrt{1-x} - 1), \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &= q \frac{B_1}{B}; \\ q &= Q + T B_1 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Функция $D(\xi_s, \varphi)$ определяется выражением

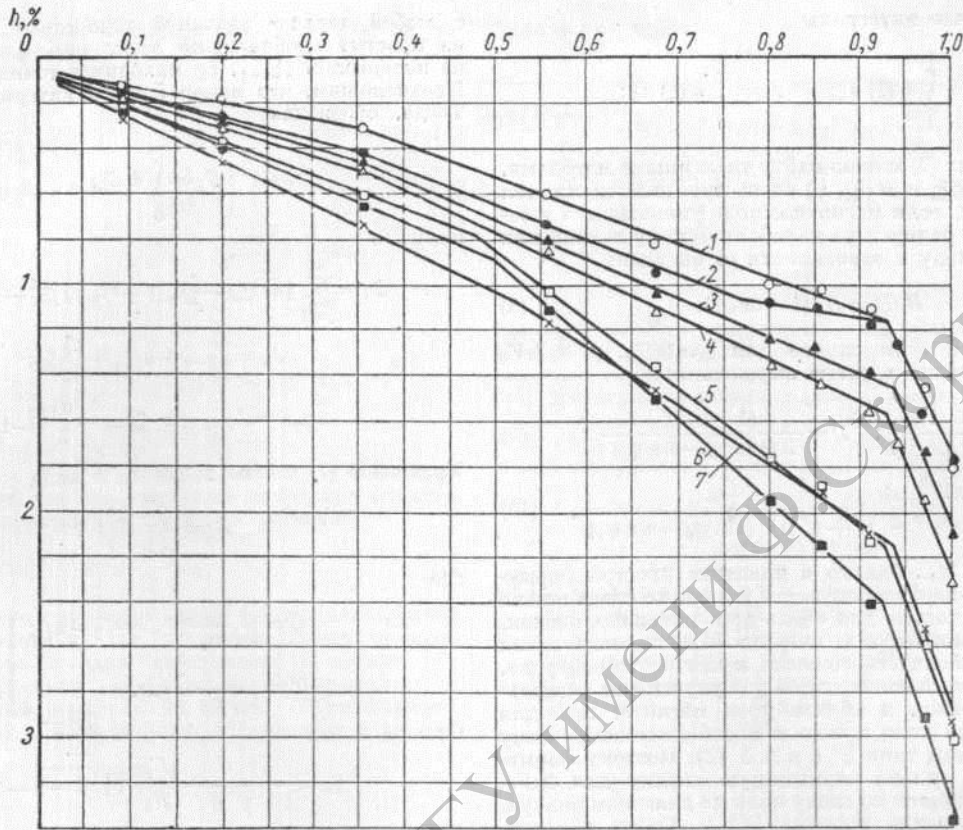
$$D(\xi_s, \varphi) = \frac{(1 + \alpha_i) (\xi_s^2 - T)}{2(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s)}. \quad (20)$$

В практически важном частном случае, когда $n=3$, $i=2$, $\alpha_1=0$, получим

$$\left. \begin{aligned} 2eV_0 &= \frac{\pi W_K^2 A}{2m_0 c^2 Z} \frac{(1 + \alpha_i) (\xi_s^2 - T)}{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s}; \\ T &= \xi_1^2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \alpha_2}; \\ q &= \frac{1}{1 + \alpha_2} [(\xi_2 - 1)^2 (\alpha_3 - \alpha_2) + B \xi_1^2 (\alpha_1 - \alpha_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Окончательная формула для $2eV_0$ [см. (5), (20), (21)] близка по форме к (10) и отличается от нее поправочным множителем, учитывающим отклонение спада от параболического. Как правило, величина q оказывается в несколько десятков раз меньше единицы, поэтому ξ_s слабо зависит от параметров поля α и определяется с точностью в несколько процентов узловыми фазами $\varphi_0, \varphi_s, \varphi_K$ (через B):

$$\xi_s \approx \frac{1}{1 + \sqrt{B}}. \quad (22)$$



Кривые спада магнитного поля $h(\xi)$ как функции относительной энергии $\xi = \frac{W}{W_R}$ при различных значениях магнитного поля в центре H_0 . Расположение экспериментальных точек на кривых:

1 — ○; 2 — ●; 3 — ▲; 4 — △; 5 — □; 6 — ■; 7 — ×.

Из полученных выражений для $2eV_0$ легко получить аналитически величину ошибки в определении V_0 , связанную с ошибками в определении коэффициентов α .

Для иллюстрации эффективности и точности предлагаемого метода расчета $2eV_0$ на рисунке приводится серия кривых спада магнитного поля циклотрона Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ. Из рисунка видно, что кривые спада аппроксимируются тремя линейными по ξ участками с точностью лучше 0,05%,

что находится в пределах точности магнитных измерений.

Поступило в Редакцию 20/VII 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. М. Каминкер. Диссертация, 1955.
2. Ю. А. Завенягин, Н. Д. Федоров. «Атомная энергия», III, 50 (1957).

УДК 530.1.075:621.374.33

Амплитудный анализ импульсов с фотографированием на движущуюся пленку

В. С. Пантуев, М. Н. Хачатурян

Многие опыты на ускорителях высоких энергий связаны с регистрацией крайне редких событий. В связи с этим повышаются требования к надежности работы измерительной аппаратуры и к документальности результатов измерений. В экспериментах по измере-

нию времени пролета частиц или величины энергии, выделяющейся в сцинтилляционных и черенковских счетчиках, спектрометрическая радиоэлектронная аппаратура обычно очень сложна и содержит сотни электронных ламп. В условиях малой статистической точности