

и интерес к работе, В. И. Галкову, принимавшему участие на отдельных этапах работы, и Ю. А. Блюмкиной за изготовление электронной аппаратуры. Авторы также благодарят коллектив сотрудников горячей лаборатории и персонал, обслуживающий реактор, за помощь в проведении эксперимента.

Поступила в Редакцию 18/IV 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Farley. J. Nucl. Energy, 3, 33 (1956).
2. Л. Боллинджер, Р. Коте, Г. Томас. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 2. М., Атомиздат, 1959, стр. 123.
3. И. В. Кирпичников, С. И. Сухоручкин. «Атомная энергия», 7, 429 (1959).
4. П. Е. Спивак и др. «Атомная энергия», № 3, 21 (1956).

5. R. Maclin, H. Schmitt, J. Gibbons. Phys. Rev., 102, 797 (1956).
6. В. Н. Андреев. «Атомная энергия», 4, 125 (1958).
7. J. Hopkins, B. Diven. Nucl. Sci. and Engng, 12, 169 (1962).
8. P. Kafalas, M. Levenson, C. Stevens. Nucl. Sci. and Engng, 2, 657 (1957).
9. В. Канн, Г. Стюарт, Ф. Уайт. Экспериментальные реакторы и физика реакторов. Докл. иностр. ученых на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955). М., Гостехиздат, 1956, стр. 633.
10. Б. Г. Ерозолимский. Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии (заседания отд. физ.-матем. наук). М., Изд. АН СССР, 1955, стр. 369.
11. А. И. Лейпунский и др. «Атомная энергия», 11, 498 (1961).
12. М. Н. Николаев и др. Proceedings of the Seminar on the Physics of Fast and Intermediate Reactors. IAEA, v. I, Vienna, 1961, p. 65.
13. В. И. Галков и др. «Атомная энергия», 12, 56 (1962).

УДК 621.039.516.22

Аналитический метод расчета неравномерного выгорания горючего в ядерных реакторах

И. С. Акимов, Е. И. Гришанин

Разработан аналитический метод расчета неравномерного выгорания горючего в ядерных реакторах, в которых запас реактивности на выгорание горючего компенсируется выгорающим поглотителем или поглотителем, равномерно распределенным в активной зоне в течение всей кампании.

Известно, что уран в активной зоне реактора выгорает неравномерно. Детальный учет неравномерности накопления шлаков необходим как для определения продолжительности кампании реактора, так и для учета деформации нейтронного поля. В работе [1] предлагается простой метод решения задачи, но при этом используется ряд предположений. Основное из них состоит в том, что параметр, характеризующий интегральное облучение горючего $S = \sigma_{cs} \times$

$\times \int_0^t \Phi(z, t') dt'$, принимается пропорциональным

нейтронному потоку $\Phi(z, t)$ в текущий момент кампании. В действительности же этот параметр определяется нейтронным потоком, меняющимся в течение всего промежутка времени от 0 до t . Задача о неравномерном выгорании

горючего в реакторе может быть решена также и другим способом. Все время работы реактора разбивают на конечное число интервалов, в пределах которых предполагается, что распределение нейтронного потока в активной зоне реактора не меняется. Очевидно, в этом случае могут быть использованы лишь численные методы определения нейтронного потока (см., например, работу [2]), так как реактор становится многозонным. Практически таким способом задачу можно решить лишь при использовании электронно-вычислительных машин. Ниже предлагается аналитический метод решения задачи о неравномерном выгорании горючего, позволяющий оценить точность первого метода и значительно менее громоздкий, чем второй метод.

Пусть имеется уравнение реактора в виде

$$\hat{L}(r, u, t) \cdot \Phi(r, u, t) = 0, \quad (1)$$

где $\hat{L}(r, u, t)$ — некоторый оператор. Граничное условие для потока нейтронов на внешней границе реактора r_s

$$\Phi(r_s, u, t) = 0. \quad (2)$$

Для простоты сначала исследуется реактор без отражателя, так как рассматриваемая задача легко обобщается и для граничных условий более сложного вида. Решение для потока ищется в виде степенного ряда по времени t , коэффициентами которого являются функции Φ_n , зависящие только от летаргии u и координаты r . Чтобы получить систему уравнений для определения функций Φ_n , уравнения (1) и (2) также представим в виде следующих степенных рядов по времени t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\hat{L}\Phi(r, u, t)]_n \cdot t^n = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r_s, u) t^n = 0, \quad (4)$$

где $[\hat{L}\Phi(r, u, t)]_n$ — коэффициент разложения уравнения (1) в ряд Тейлора. Этот коэффициент, так же как и Φ_n , зависит только от летаргии и координаты. Так как равенства (3) и (4) должны выполняться при любых значениях t , то необходимо, чтобы коэффициенты при каждой степени t обращались в нуль. В результате получим систему уравнений для определения Φ_n :

$$[\hat{L}\Phi(r, u, t)]_n = 0, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5)$$

при граничных условиях

$$\Phi_n(r_s, u) = 0, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (6)$$

С использованием описанного общего метода была решена задача о неравномерном выгорании урана для реактора, в котором запас реактивности компенсируется поглотителем, равномерно распределенным по объему реактора в течение всей кампании. В этом случае сечение поглотителя можно представить в следующем виде:

$$\Sigma_p(u, t) = \Sigma_p(u, 0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (7)$$

где коэффициенты b_n , входящие в оператор $\hat{L}$ через Σ_p , должны определяться из условия критичности реактора в течение всей кампании. Оператор в уравнении (1) также должен быть представлен в виде ряда Тейлора:

$$\hat{L}(r, u, t) = \hat{L}_0(u, b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_n(u, \Phi_{n-1}, \Phi_{n-2}, \dots, \Phi_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_0) t^n. \quad (8)$$

Причем в нашем случае только оператор $\hat{L}_0(u, b_0)$ содержит дифференциальную часть, а остальные операторы являются лишь опера-

торами умножения. Поэтому систему (5) с учетом (7) можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_0(u, b_0) \Phi_0(r, u) &= 0; \\ \hat{L}_0 \Phi_1 + \hat{L}_1 \Phi_0 &= 0; \\ \hat{L}_0 \Phi_n + \hat{L}_1 \Phi_{n-1} + \hat{L}_2 \Phi_{n-2} + \dots + \hat{L}_n \Phi_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Характерной особенностью системы (9) является то, что она позволяет получить все искомые функции Φ_n последовательным решением уравнений этой системы, начиная с $n=0$. Для получения замкнутого решения систем (3) или (9) нужно использовать закон изменения интегральной мощности реактора во времени $N(t)$:

$$N(t) = \int_V dr \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_f(u, r, t) \cdot \Phi(r, u, t) du, \quad (10)$$

где V — объем реактора. Система дополнительных условий, определяющих нормировку функций Φ_n , получается разложением соотношения (10) в степенной ряд по t . В результате этого получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_V dr \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0 \Sigma_{f_0}(u, r) du &= N_0; \\ \int_V dr \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_1 \Sigma_{f_0} + \Sigma_{f_1} \Phi_0) du &= N_1; \\ \int_V dr \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \Phi_k \Sigma_{f(n-k)} \right) du &= N_n, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где N_n и Σ_{f_n} — коэффициенты разложения закона изменения мощности и сечения деления в ряд по степеням t :

$$\left. \begin{aligned} N(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n t^n; \\ \Sigma_f(r, u, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Sigma_{f_n}(r, u) t^n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим одгрупповое приближение для одномерного плоского реактора без отражателя. Уравнение реактора в одгрупповом приближении имеет вид

$$\frac{d^2 \Phi(z, t)}{dz^2} + \kappa^2(z, t) \cdot \Phi(z, t) = 0, \quad (13)$$

где

$$\kappa^2(z, t) = \frac{k_{\infty}(z, t) - 1 - \Delta k_{CT}(t)}{M^2}$$

[здесь $k_{\infty}(z, t)$ — коэффициент размножения; M^2 — квадрат длины миграции нейтронов; $\Delta k_{\text{ст}}(t)$ — реактивность, вносимая компенсирующими стержнями]. Задача заключается в том, чтобы найти $\Phi(z, t)$ при условиях (2) и (10) и закон изменения $\Delta k_{\text{ст}}(t)$. Из условия $\Delta k_{\text{ст}}(T) = 0$ определяется продолжительность кампании T . Без нарушения общности условия (10) мощность реактора $N(t)$ можно принять постоянной. При этом время будет вычисляться в эффективных сутках. Следуя указанному выше рецепту, все величины, зависящие от времени, разложим в ряд по степеням $\tau = \frac{n_0}{q_5} \frac{\sigma_{c5}}{\sigma_{f5}} t$ (τ — величина безразмерная), где n_0 — среднее число делений в единице объема активной зоны в единицу времени; q_5 — исходная концентрация ядер U^{235} :

$$\kappa^2(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n^2 S^n(z, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tau^n; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_f(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Sigma_{fn} S^n(z, \tau) = \\ &= \Sigma_{f0} \left(1 + \frac{\Sigma_{f1}}{\Sigma_{f0}} S + \frac{\Sigma_{f2}}{\Sigma_{f0}} S^2 + \dots \right); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Phi(z, \tau) = \frac{n_0}{q_5 \sigma_{f5}} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \tau^n; \quad (16)$$

$$S(z, \tau) = \sigma_{c5} \int_0^t \Phi(z, t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \frac{\tau^{n+1}}{n+1}; \quad (17)$$

Постоянные κ_n^2 и Σ_{fn}/Σ_{f0} определяются из расчета изотопного состава, а величины b_n следует найти. Система (9) и условия (2) и (10) для этого случая запишутся так:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} + \kappa_0^2 \Phi_0(z) &= 0; \\ \frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} + \kappa_0^2 \Phi_1(z) &= -(\kappa_1^2 \Phi_0^2 + b_1 \Phi_0); \\ \frac{d^2 \Phi_2}{dz^2} + \kappa_0^2 \Phi_2(z) &= \\ &= -\left(\frac{3}{2} \kappa_1^2 \Phi_0 \Phi_1 + \kappa_2^2 \Phi_0^3 + b_1 \Phi_1 + b_2 \Phi_0 \right); \\ \frac{d^2 \Phi_n}{dz^2} + \kappa_0^2 \Phi_n(z) &= \\ &= -[F_n(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \\ &\quad b_1, \dots, b_{n-1}) + b_n \Phi_0]; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\Phi_n\left(\frac{H}{2}\right) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{H/2} \Phi_0 dz &= \frac{H}{2}; \\ \int_0^{H/2} (\Phi_1 + \Phi_0^2 \frac{\Sigma_{f1}}{\Sigma_{f0}}) dz &= 0; \\ \int_0^{H/2} (\Phi_2 + \frac{3}{2} \frac{\Sigma_{f1}}{\Sigma_{f0}} \Phi_0 \Phi_1 + \frac{\Sigma_{f2}}{\Sigma_{f0}} \Phi_0^3) dz &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \int_0^{H/2} [\Phi_n + E_n(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})] dz &= 0. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Заметим, что функция E_n получается из функции F_n , если в последней заменить $\kappa_1^2, \kappa_2^2, \dots$ на $\Sigma_{f1}/\Sigma_{f0}, \Sigma_{f2}/\Sigma_{f0}, \dots$ соответственно, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ принять равными нулю. Приведем аналитические решения для первых трех функций:

$$\Phi_0 = A_0 \cos \kappa_0 z; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1 \cos \kappa_0 z + \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} \cos 2\kappa_0 z - \\ &- \frac{b_1}{\kappa_0^2} \frac{\pi}{4} \kappa_0 z \sin \kappa_0 z - \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= A_2 \cos \kappa_0 z + \left(\frac{\pi}{8} \cdot \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} A_1 + \frac{\pi^2}{27} \cdot \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} \right) \cos 2\kappa_0 z + \\ &+ \left(\frac{\pi^3}{512} \cdot \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} + \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{\kappa_2^2}{\kappa_0^2} \right) \cos 3\kappa_0 z - \\ &- \frac{\pi}{9} \cdot \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} (\kappa_0 z)^2 \cos \kappa_0 z + \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} \kappa_0 z \sin 2\kappa_0 z + \\ &+ \left[\left(\frac{\pi}{9} + \frac{5\pi^3}{128} \right) \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} + \frac{2}{3} \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} A_1 - \frac{3\pi^3}{64} \cdot \frac{\kappa_2^2}{\kappa_0^2} + \frac{\pi}{4} \frac{b_2}{\kappa_0^2} \right] \times \\ &\times \kappa_0 z \sin \kappa_0 z - \left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} + \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} A_1 \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$b_1 = -\frac{4}{3} \kappa_1^2; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \kappa_0^2 \cdot \left[\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{27} - \frac{31\pi^2}{96} \right) \frac{\kappa_1^4}{\kappa_0^4} - \right. \\ &- \left. \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} \cdot \frac{\Sigma_{f1}}{\Sigma_{f0}} + \frac{3\pi^2}{16} \cdot \frac{\kappa_2^2}{\kappa_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналитические решения для последующих функций слишком громоздки, и поэтому целесообразно $\Phi_n(z)$ искать в виде суммы

$$\Phi_n(z) = \Phi_n^*(z) + \Phi_n^{**}(z), \quad (26)$$

где $\Phi_n^*(z)$ — общее решение уравнения

$$\frac{d^2 \Phi_n^*(z)}{dz^2} + \kappa_0^2 \Phi_n^*(z) = -b_n \Phi_0(z), \quad (27)$$

а $\Phi_n^{**}(z)$ — частное решение уравнения

$$\frac{d^2 \Phi_n^{**}(z)}{dz^2} + \kappa_0^2 \Phi_n^{**}(z) = -F_n(\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}). \quad (28)$$

Значение $\Phi_n^*(z)$ легко отыскивается аналитически из уравнения (27)

$$\Phi_n^*(z) = A_n \cos \kappa_0 z - \frac{b_n}{2\kappa_0} z \sin \kappa_0 z, \quad (29)$$

а уравнение (28) можно решить численными методами, описанными в работе [2], приняв

$$\left. \frac{d\Phi_n^{**}}{dz} \right|_{z=\frac{H}{2}} = \lambda = 0. \quad (30)$$

Здесь λ — произвольное число, которое для определенности и простоты примем равным нулю. Допустимость этого можно показать следующим образом. Так как $\Phi^{**}(z)$ — частное решение неоднородного уравнения, то оно может включать в себя общее решение однородного уравнения $B \cos \kappa_0 z$ с произвольным коэффициентом B . Последний всегда можно выбрать таким, чтобы λ равнялось нулю. Принимая далее в уравнении (26) $z = \frac{H}{2}$, согласно условию (19) получим

$$b_n = \Phi_n^{**}\left(\frac{H}{2}\right) \frac{4\kappa_0}{H}. \quad (31)$$

Коэффициенты A_n определяются из условий (20):

$$A_0 = \frac{\pi}{2}; \quad (32)$$

$$A_1 = \left(\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{\sum f_1}{\sum f_0}; \quad (33)$$

$$A_n = \frac{b_n}{2\kappa_0^2} - \kappa_0 \int_0^{H/2} [\Phi_n^{**} + E_n(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})] dz. \quad (34)$$

Для реактора с отражателем задача решается аналогичным образом. Например, вместо условия (19) можно задать значение логарифмической производной нейтронного потока на границе с отражателем (в общем случае для каждой группы нейтронов). В одногрупповом приближении для реактора с отражателем и без него были рассчитаны функции $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ и Φ_4 . При этом был взят реактор со следующими характеристиками: $\Sigma_f = \Sigma_{f0} = \text{const}$; $M^2 = 400 \text{ см}^2$; $\frac{H}{2} = 340 \text{ см}$ — для реактора без отражателя; $\frac{H}{2} = 300 \text{ см}$ — для реактора с

отражателем; $\left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z=\frac{H}{2}} = 0,04 \Phi \left(\frac{H}{2} \right)$;

$$\kappa_n^2 = \begin{cases} 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2}, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

На рис. 1 приводится распределение потока по высоте реактора с отражателем для трех начальных коэффициентов размножения k_{∞}^0 . На

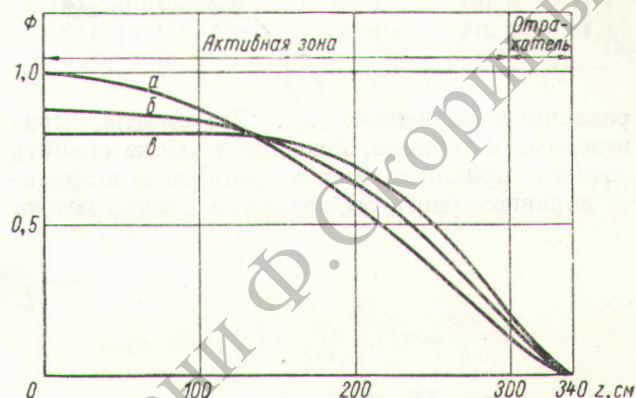


Рис. 1. Распределение нейтронного потока в конце кампании в плоском реакторе с отражателем:

a — $k_{\infty}^0 = 1,009$; б — $k_{\infty}^0 = 1,067$; в — $k_{\infty}^0 = 1,11$.

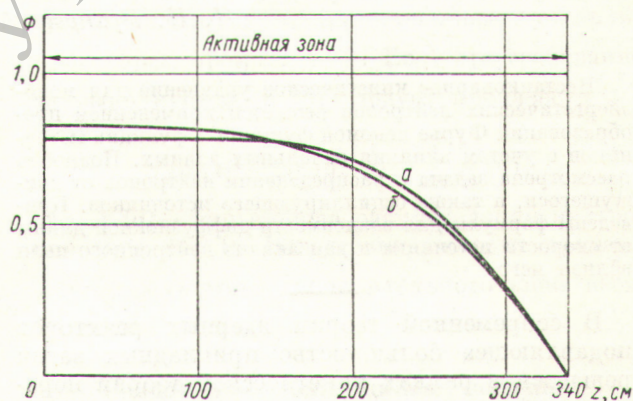


Рис. 2. Сравнение распределения нейтронного потока в конце кампании в плоском реакторе без отражателя: a — метод, изложенный в работе [1]; б — метод, разработанный в настоящей работе.

рис. 2 для реактора без отражателя сравнивается распределение нейтронного потока по высоте реактора, полученное по методу, развитому в работе [1], с распределением, полученным по методу, изложенному в настоящей работе. Кроме того, для реактора без отражателя

рассчитана величина $\bar{S}(I) = \frac{\int_0^{H/2} S(z, T) dz}{H/2}$ при

Значение величины $S(T)$ для реактора без отражателя

k_{∞}^0	По теории возмущений	Точное решение	По методу работы [1]	По методу равномерного выгорания
1,067	0,084	0,088	0,090	0,112
1,085	0,121	0,128	0,131	0,161
1,11	0,182	0,198	0,201	0,242
1,18	0,314	0,350	0,357	0,419

различных значениях k_{∞}^0 . Результаты, приведенные в таблице, позволяют также оценить точность приближенных методов расчета эффективного коэффициента размножения, а именно метода

теории малых возмущений, метода, изложенного в работе [1], и метода равномерного выгорания. Очевидно, что такой же метод можно успешно использовать в том случае, когда запас реактивности на выгорание компенсируется выгорающим поглотителем.

В заключение авторы благодарят З. С. Новицкую за проведенные расчеты.

Поступила в Редакцию 8/X 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Мейер, Е. Гриерентрог. Kernenergie, Н. 8, 693 (1959).
2. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.

УДК 621.039.51.12

Нестационарные задачи кинетической теории переноса нейтронов

Я. И. Грановский, А. А. Кострица

Нестационарное кинетическое уравнение для моноэнергетических нейтронов решается применением преобразования Фурье искомой функции и функции источников с учетом влияния начальных данных. Подробно рассмотрена задача о распределении нейтронов от движущегося, а также осциллирующего источников. Приведены формулы для зависимости диффузионной длины от скорости источника и дан анализ нейтронного поля вблизи него.

В современной теории ядерных реакторов подавляющее большинство прикладных задач решается в рамках кинетической теории переноса нейтронов чаще всего путем использования приближенного анализа и средств вычислительной математики. В настоящее время очень важно получить новые точные решения кинетического уравнения для отдельных задач.

Благодаря линейности кинетического уравнения переноса нейтронов в отличие, например, от уравнения молекулярного переноса Больцмана может быть проанализировано в довольно общем виде даже в нестационарном случае. Конечно, это возможно только при разумной идеализации задачи: использовании односкоростного приближения, не очень сложной функции рассеяния и т. д.

В настоящей работе нестационарное кинетическое уравнение решается при помощи преобразования Фурье. Рассматривается диффузия нейтронов, испускаемых движущимся источником. Кроме естественного перемещения нейтронного поля вместе с перемещением источника, в группе тепловых нейтронов возникает асимметрия диффузионных характеристик и распределения нейтронов в окрестности источника. Задача интересна своим сходством с аналогичными задачами электродинамики (эффект Черенкова) и теории теплопроводности [1]. Она может представить определенный интерес в связи с описанным в работе [2] реактором с быстро перемещающимся фронтом источника нейтронов а также, по-видимому, интересна при движении поглотителя нейтронов. Полученные результаты могут быть использованы при рассмотрении увлечения нейтронов в реакторах с быстрым движением замедлителя [3]. Непосредственное применение для практических расчетов могут найти диффузионные характеристики как функции скорости источника или замедлителя.