Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

И. В. ГЕЛЬМАН, В. Г. МАЗЬЯ

О ДОМИНИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 14 X 1974)

Настоящая работа принадлежит к тому направлению теории общих дифференциальных операторов, которое изучает условия доминирования (см. ([1-9])). Здесь установлены необходимые и достаточные условия справедливости следующих оценок для дифференциальных операторов в полупространстве $\mathbf{R}_+^n=\{(x;\ t): x\in\mathbf{R}^{n-1},\ t\geqslant 0\}$:

$$\|R(D)u\|^2_{M^{1/2}}\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)u\|^2+\sum_{k=1}\langle Q_k(D)u\rangle^2\right),\quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n);\qquad(1)$$

$$\|R(D)u\|^2_{M^{1/2}}\leqslant C\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)u\|^2,\quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n),$$

$$Q_k(D)u(x;0)=0,\quad k=1,\dots,r.\qquad(2)$$

Через $C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ обозначено пространство сужений на $\mathbf{R}_+^n$ функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$; $\|\cdot\|$, $\langle\cdot\rangle$ — нормы в $L_2(\mathbf{R}_+^n)$ и $L_2(\partial\mathbf{R}_+^n)$;

$$\|u\|^2_{M^{1/2}}=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}M(\xi)\,|\hat u(\xi;t)|^2\,dt\,d\xi,$$

где $M(\xi)$ — измеримая, почти всюду положительная функция на $\mathbf{R}^{n-1}$ и $\hat u(\xi;\ t)$ — преобразование Фурье по x функции $u(x;\ t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$; $D=(\partial/i\,\partial x_1,\dots,\partial/i\,\partial x_{n-1};\ \partial/i\,\partial t)$.

1°. Введем несколько обозначений, которые будем использовать при описании результатов. Пусть $R(\xi;\ \tau)$, $P_j(\xi,\ \tau)$, $Q_k(\xi,\ \tau)$ — полиномы переменной $\tau\in\mathbf{R}^1$ с локально ограниченными измеримыми коэффициентами, растущими при $|\xi|\to\infty$ не быстрее некоторой степени $|\xi|$. Термины «порядок полинома» (ord), «корень полинома», «сравнение» и т. п. относятся к полиномиальной зависимости от τ. Будем считать, что $\operatorname{ord}R\leqslant\max\limits_j\operatorname{ord}P_j$, $\max\limits_k\operatorname{ord}Q_k<\max\limits_j\operatorname{ord}P_j$ для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$. Предполагается, что все встречающиеся далее равенства и сравнения выполнены при почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$.

Положим

$$\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\tau)|^2=H_+(\xi;\tau)H_-(\xi;\tau),\qquad(3)$$

где $H_+(\xi;\ \tau)$ — полином (по τ), корни которого расположены в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0$, и $H_-(\xi;\ \tau)=\overline{H_+(\xi;\ \tau)}$. Обозначим через $\Pi_+(\xi,\ \tau)$ общий наибольший делитель полиномов $H_+(\xi;\ \tau),\ P_1(\xi;\ \tau),\dots,P_N(\xi;\ \tau)$.

Лемма. *Для любого полинома $B(\xi;\ \eta,\ \tau)$ переменной $\tau\in\mathbf{R}^1$ такого, что $B(\xi;\ \eta,\tau)\equiv 0\,(\operatorname{mod}\Pi_+(\xi;\ \tau))$ и $\operatorname{ord}B<\max\limits_j\operatorname{ord}P_j$ при почти всех $(\xi;\ \eta)\in\mathbf{R}^n$, существуют и определяются единственным образом полиномы $D_j(\xi;\ \eta,\ \tau)$ (от τ), $\operatorname{ord}D_j<\max\limits_j\operatorname{ord}P_j$, $j=1,\dots,N$, удовлетворяющие следу-*

ющим условиям:

$$\overline{D_j(\xi;\,\eta,\,\tau)}\equiv 0 \pmod{\Pi_+(\xi;\,\tau)}, \tag{4}$$

$$P_i(\xi;\,\tau)\overline{D_j(\xi;\,\eta,\,\tau)}\equiv P_j(\xi;\,\tau)\overline{D_i(\xi;\,\eta,\,\tau)} \pmod{\Pi_+(\xi;\,\tau)H_+(\xi;\,\tau)}, \tag{5}$$

$$B(\xi;\eta,\tau)H_-(\xi;\tau)=\sum_{j=1}^{N}P_j(\xi;\tau)D_j(\xi;\eta,\tau). \tag{6}$$

Эта лемма доказана в [9], лемма 1.

Следующие две теоремы содержат необходимые и достаточные условия справедливости оценок (1), (2).

Теорема 1. *Оценка* (1) *верна в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

1) *существуют функции* $\beta_k(\xi;\,\eta)$, $k=1,\ldots,r$, *такие, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{r}|\beta_k(\xi;\,\eta)|^2\left(\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\eta)|^2\right)^{-1}d\eta<\infty, \tag{7}$$

$$B(\xi;\,\eta,\,\tau)\overset{\text{def}}{=}(\eta-\tau)^{-1}[H_+(\xi;\,\eta)R(\xi;\,\tau)-H_+(\xi;\,\tau)R(\xi;\,\eta)]-$$

$$-\sum_{k=1}^{r}\beta_k(\xi;\,\eta)Q_k(\xi;\,\tau)\equiv 0 \pmod{\Pi_+(\xi;\,\tau)} \tag{8}$$

при почти всех $(\xi;\,\eta)\in\mathbf{R}^n$;

2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\inf_{\beta_k(\xi;\,\eta)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}|D_j(\xi;\,\eta,\,\tau)|_{d\tau}^2}{\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\tau)|^2}+\sum_{k=1}^{r}|\beta_k(\xi;\,\eta)|^2\right\}\frac{d\eta}{\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\eta)|^2}+$$

$$+\frac{|R(\xi;\,\tau)|^2}{\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\tau)|^2}\leqslant\frac{c}{M(\xi)} \tag{9}$$

для почти всех $(\xi;\,\tau)\in\mathbf{R}^n$, *где* D_j — *полиномы, удовлетворяющие условиям* (4) — (6), *и инфимум взят по всем наборам* $\{\beta_k\}$, *обладающим свойствами* (7), (8).

Теорема 2. *Оценка* (2) *верна в том и только в том случае, если выполнено условие* 1) *теоремы* 1 *и для почти всех* $(\xi;\,\tau)\in\mathbf{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\inf_{\beta_k(\xi;\,\eta)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}|D_j(\xi;\,\eta,\,\tau)|^2}{\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\tau)|^2}d\tau\right\}\frac{d\eta}{\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\eta)|^2}+\frac{|R(\xi;\,\tau)|^2}{\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi;\,\tau)|^2}\leqslant\frac{c}{M(\xi)}, \tag{10}$$

а полиномы D_j *и функции* β_k — *те же, что и в теореме* 1.

Следствие 1. *Пусть* $P_j(\xi;\,\tau)=i\tau-g_j(\xi)$, $j=1,\ldots,N$, *и* $\sum_{j=1}^{N}|g_j(\xi)|\neq 0$ *почти всюду в* $\mathbf{R}^{n-1}$. *Оценка*

$$\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|_{M^{1/2}}\leqslant C\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)u\|^2,\qquad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n),\qquad s=0,1, \tag{11}$$

верна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\sum\limits_{j,\,h=1}^{N}|g_j(\xi)-g_h(\xi)|\neq 0$ *для почти всех* $\xi\in\bigcap\limits_{j=1}^{N}\{\xi\colon \operatorname{Re} g_j(\xi)\leqslant 0\}$;

2)

$$M(\xi)\leqslant c\Bigl(\sum_{j=1}^{N}|g_j(\xi)|^2\Bigr)^{-s}\Bigl[\sum_{j,h=1}^{N}(\operatorname{Im} g_j(\xi)-\operatorname{Im} g_h(\xi))^2+\sum_{j=1}^{N}{}'\,|\operatorname{Re} g_j(\xi)|^2\Bigr] \tag{12}$$

для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$.

Следствие 2. *Пусть* $P(\xi;\tau)=i\tau-g(\xi)$, $B(\xi;\tau)=b(\xi)$. *Оценка*

$$\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|^2_{M^{1/2}}\leqslant C(\|P(D)u\|^2+\|u\|^2+\langle B(D)u\rangle^2),\quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n),\quad s=0,1, \tag{13}$$

верна тогда и только тогда, когда

$$(1+|g(\xi)|^{2s})(\operatorname{Re} g(\xi)+1)^{-2}\left[1+\frac{\operatorname{Re} g(\xi)+1}{|b(\xi)|^2+\operatorname{Re} g(\xi)+1}\right]\leqslant\frac{c}{M(\xi)} \tag{14}$$

для почти всех $\xi\in\{\xi\colon\xi\in\mathbf{R}^{n-1},\ \operatorname{Re} g(\xi)\geqslant 0\}$ *и*

$$(1+|g(\xi)|^{2s})(|\operatorname{Re} g(\xi)|+1)^{-2}\left[1+\frac{|\operatorname{Re} g(\xi)|+1}{|b(\xi)|^2+(|\operatorname{Re} g(\xi)|+1)^{-1}}\right]\leqslant\frac{c}{M(\xi)} \tag{15}$$

для почти всех $\xi\in\{\xi\colon\xi\in\mathbf{R}^{n-1},\ \operatorname{Re} g(\xi)\leqslant 0\}$.

2^0. Остановимся на важном частном случае оценки (1):

$$\|R(D)u\|^2_{M^{1/2}}\leqslant C(\|P(D)u\|^2+\|u\|^2),\quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n). \tag{16}$$

Отметим, что при $M(\xi)=1$ неравенство (16) эквивалентно вложению $D(P)\subset D(R)$, где $D(P)$, $D(R)$ — области определения максимальных операторов, определяемых в $L_2(\mathbf{R}_+^n)$ дифференциальными выражениями $P(D)$, $R(D)$ соответственно.

Теорема 3. *Пусть* $|P(\xi;\tau)|^2+1=H_+(\xi;\tau)H_-(\xi,\tau)$ — *факторизация типа* (3). *Оценка* (16) *верна в том и только в том случае, если*

$$\frac{|R(\xi;\tau)|^2}{1+|P(\xi;\tau)|^2}+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}\frac{|D_1(\xi;\eta,\tau)|^2+|D_2(\xi;\eta,\tau)|^2}{(|P(\xi;\tau)|^2+1)(|P(\xi;\eta)|^2+1)}\,d\tau\,d\eta\leqslant\frac{c}{M(\xi)} \tag{17}$$

для почти всех $(\xi;\tau)\in\mathbf{R}^n$, *где*

$$D_1(\xi;\eta,\tau)=(\eta-\tau)^{-1}[R(\xi;\eta)(\overline{P}(\xi;\tau)-\overline{P}(\xi;\eta))-$$
$$-H_+(\xi;\eta)(T(\xi;\tau)-T(\xi;\eta))],$$
$$D_2(\xi;\eta,\tau)=(\eta-\tau)^{-1}[R(\xi,\eta)(1+P(\xi,\tau)\overline{P}(\xi,\eta))-$$
$$-R(\xi;\tau)H_-(\xi;\tau)H_+(\xi;\eta)+P(\xi;\tau)H^+(\xi;\eta)(T(\xi;\tau)-T(\xi;\eta))],$$

а $T(\xi;\tau)$ — *частное при делении* $R(\xi;\tau)H_-(\xi;\tau)$ *на* $P(\xi;\tau)$.

Это утверждение выводится из теоремы 1.

Для некоторых конкретных типов операторов $P(D)$ в случае, когда $R(\xi;\tau)=\tau^s$, критерий теоремы 3 допускает более простую переформулировку. Рассмотрим полином

$$P(\xi;\tau)=\sum a_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\tau^{\alpha_n}, \tag{18}$$

удовлетворяющий следующим условиям: 1) $m_1,\ldots,m_{n-1}$, m_n — натуральные числа и $m=\max\limits_{1\leqslant\rho\leqslant n} m_\rho$; 2) $q=(q_1,\ldots,q_{n-1},q_n)$, где $q_\rho=m/m_\rho$, $\rho=1,\ldots,n$;

3) $(\alpha,q)=\alpha_1q_1+\ldots+\alpha_{n-1}q_{n-1}+\alpha_nq_n$; 4) суммирование в правой части (18) ведется по всем мультииндексам $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ таким, что $(\alpha,q)\leqslant$

$\leqslant m$. Полином (18) будем записывать также в виде

$$P(\xi;\tau)=\sum_{k=0}^{m_n} p_{m_k-k}(\xi)\,\tau^k. \tag{19}$$

Пусть $P_0(\xi;\,\tau)=\sum\limits_{(\alpha,q)=m} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\tau^{\alpha_n}$.

Полином (18) называется квазиэллиптическим, если для всех $(\xi;\,\tau)\in\mathbf{R}^n$ справедлива оценка $|P_0(\xi;\,\tau)|\geqslant c(\langle\xi\rangle^m+\tau^{m_n})$, где $\langle\xi\rangle^m=\sum\limits_{\rho=1}^{n-1}|\xi_\rho|^{m_\rho}$. Полином (18) называется полиномом определенного типа l, если для всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}\diagdown\{0\}$ число τ-корней полинома $P_0(\xi;\,\tau)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ равно l.

Следствие 3. *Пусть $P(\xi;\,\tau)$ — полином (18), удовлетворяющий условиям 1) — 4), и $p_0(\xi)=1$. Если для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$*

$$M(\xi)\,(1+\langle\xi\rangle^{2sm/m_n})\leqslant c, \tag{20}$$

то имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|^2_{M^{1/2}}\leqslant C(\|P(D)u\|^2+\|u\|^2),\qquad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n), \tag{21}$$

где $s=0,\ldots,m_n$. Если $P(\xi;\,\tau)$ — квазиэллиптический полином определенного типа $l\geqslant1$, то неравенство (20) является также необходимым условием справедливости оценки (21).

В частности, если гиперплоскость $t=0$ не является характеристической для оператора $P(D)$, то оценка (21) верна, когда для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$ выполняется условие

$$M(\xi)\,(1+|\xi|^{2s})\leqslant c, \tag{22}$$

где $s=0,\ldots,m_n=m$. Для правильно эллиптического оператора четного порядка неравенство (22) является также необходимым условием справедливости оценки (21).

Следствие 4. *Пусть $P(\xi;\,\tau)=\tau^m+p_1(\xi)\tau^{m-1}+\ldots+p_m(\xi)$ — однородный полином порядка $m\geqslant1$, τ-корни которого $z_1(\xi),\ldots,z_m(\xi)$ попарно различны для всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}\diagdown\{0\}$. Пусть для каждого $\rho=1,\ldots,m$ функция $\operatorname{Im}z_\rho(\xi)$ либо тождественно равна нулю, либо сохраняет определенный знак на единичной сфере $S^{n-1}\subset\mathbf{R}^{n-1}$.*

Оценка (21), где $s=0,\ldots,m$, верна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$, при которых существует хотя бы один номер $\rho(\xi)$, $1\leqslant\rho(\xi)\leqslant m$, такой, что $\operatorname{Im}z_{\rho(\xi)}(\xi)\geqslant0$, имеет место неравенство (22);

2) для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$, при которых $\operatorname{Im}z_\rho(\xi)<0$, $\rho=1,\ldots,m$, выполняется неравенство

$$M(\xi)\,(1+|\xi|)^{2(s-m)}\leqslant c. \tag{23}$$

Следствие 5. *Пусть $P(\xi;\,\tau)=-\tau^2+g(\xi)$ и $\operatorname{Im}g(\xi)=0$ для всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$. Оценка (21), где $s=0,\,1,\,2$, верна тогда и только тогда, когда*

$$M(\xi)\,(1+|g(\xi)|^s)\leqslant c \tag{24}$$

для почти всех $\xi\in\mathbf{R}^{n-1}$.

Ленинградская лесотехническая академия
им. С. М. Кирова

Поступило
14 X 1974

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *N. Aronszajn*, Conference on Partial Differential Equations, Univ. of Kansas, Rep. № 14, 94 (1954). [2] *S. Agmon*, J. Anal. Math., v. 6, 2, 183 (1958). [3] *Л. Хёрмандер*, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, 1959. [4] *M. Schechter*, Trans. Am. Math. Soc., v. 107, № 2, 237 (1963). [5] *M. Schechter*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, v. 18, № 3, 255 (1964). [6] *T. Matsuzawa*, Trans. Am. Math. Soc., v. 133, № 1, 241 (1968). [7] *C. F. Schubert*, Lecture Notes on Math., v. 183, 221 (1971). [8] *И. В. Гельман, В. Г. Мазья*, ДАН, т. 202, № 4, 751 (1972). [9] *И. В. Гельман, В. Г. Мазья*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 38, № 3, 663 (1974).