Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 513. 83 **МАТЕМАТИКА**

Б. Д. ГЕЛЬМАН

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 X 1974)

Теории неподвижных точек различных классов многозначных отображений посвящены многие работы. В работах [2–4] построены различные топологические характеристики для замкнутых многозначных отображений с выпуклыми и ациклическими образами. В последние годы исследовались неподвижные точки новых классов многозначных отображений: имеющих ε-асферические образы [5], гомотопически постоянные образы [6] и др. [7, 8].

В настоящей заметке для многозначных замкнутых отображений с произвольными компактными образами вводится новый топологический инвариант — топологическая характеристика многозначного отображения, изучаются свойства этого инварианта, даются приложения к теоремам о неподвижных точках.

1. Основные определения. Отображение F, переводящее топологическое пространство X в топологическое пространство Y, называется многозначным, если $\forall x\in X$ его образ $F(x)$ — непустое подмножество в Y. Отображение F называется замкнутым, если график $\Gamma=\bigcup\limits_{x\in X}(x;\ F(x))$ замкнут в $X\times Y$ (подробнее см., например, [8]).

Пусть $F\colon T\to E^{n+1}$, где T — шар в эвклидовом пространстве E^{n+1}, а F — замкнутое многозначное отображение с компактными образами. Предположим далее, что на S^n (границе шара T) отображение F не имеет неподвижных точек, т. е. $F(x)\not\ni x \quad \forall x\in S^n$. Тогда векторное поле $\Phi(x)=x-F(x)$ не имеет на S^n особых точек, т. е. таких точек, образы которых содержат θ-пространства E^{n+1}. Очевидно, что $\Phi(x)$ — также многозначное замкнутое отображение с компактными образами.

Обозначим через $\Gamma_T(\Phi)$ график векторного поля Φ над шаром T.

Определим следующие отображения: $t\colon \Gamma_T(\Phi)\to T$ — проекция на шар T, $r\colon \Gamma_T(\Phi)\to E^{n+1}$ — проекция в E^{n+1}. Очевидно, что оба эти отображения непрерывны, а в силу замкнутости $\Gamma_T(\Phi)$ отображение t является замкнутым.

Аналогично можно рассмотреть $\Gamma_S(\Phi)$ — график поля Φ над сферой S^n и отображения $t|_{\Gamma_S(\Phi)}$ и $r|_{\Gamma_S(\Phi)}$. В силу того, что поле Φ на S^n не имеет особых точек, получаем, что $r|_{\Gamma_S(\Phi)}\to E^{n+1}\setminus\theta$. В дальнейшем будем обозначать $t|_{\Gamma_S(\Phi)}$ и $r|_{\Gamma_S(\Phi)}$ буквами t_S и r_S соответственно. Кроме того можно рассмотреть отображение вложения $l\colon \Gamma_S(\Phi)\to\Gamma_T(\Phi)$. Справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma_T(\Phi) \arrow[d, "t"] & \Gamma_S(\Phi) \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r_S"] \arrow[d, "t_S"] & E^{n+1}\setminus\theta, \\ T & S^n \arrow[l, "i"] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

i — отображение вложения сферы S^n в шар T.

Рассмотрим коммутативную диаграмму, которая индуцируется диаграммой (1) в когомологиях размерности n. В дальнейшем будем рассматривать когомологии Чеха с коэффициентами в Z-группе целых чисел.

$$\begin{array}{ccccc} H^n(\Gamma_T(\Phi)) & \xrightarrow{l^*} & H^n(\Gamma_S(\Phi)) & \xleftarrow{r_S^*} & H^n(E^{n+1}\setminus\theta). \\ \uparrow t^* & & \uparrow t_S^* & & \\ H^n(T) & \xrightarrow[i^*]{} & H^n(S^n) & & \end{array} \tag{1'}$$

Обозначим через A_Φ коядро отображения l^*, т. е.

$$A_\Phi = H^n(\Gamma_S(\Phi))/\operatorname{Im} l^*.$$

Обозначим через $\hat{j}^*$ проектирование группы $H^n(\Gamma_S(\Phi))$ на группу A_Φ:

$$\hat{j}^*\colon H^n(\Gamma_S(\Phi)) \to H^n(\Gamma_S(\Phi))/\operatorname{Im} l^* = A_\Phi. \tag{2}$$

Рассмотрим гомоморфизм γ: $H^n(E^{n+1}\setminus\theta)\to A_\Phi$, определенный по правилу

$$\gamma\colon H^n(E^{n+1}\setminus\theta) \xrightarrow{r_S^*} H^n(\Gamma_S(\Phi)) \xrightarrow{\hat{j}^*} A_\Phi. \tag{3}$$

Определение 1. Если гомоморфизм γ, определенный равенством (3), является нулевым гомоморфизмом, то будем говорить, что векторное поле Φ имеет топологическую характеристику, равную 0, и обозначать $\gamma(\Phi; T)=0$. В противном случае будем говорить, что поле Φ имеет топологическую характеристику, равную 1, и обозначать $\gamma(\Phi; T)=1$.

Теорема 1. *Если векторное поле Φ не имеет в шаре T особых точек, то $\gamma(\Phi; T)=0$.*

Доказательство. Так как Φ не имеет в шаре T особых точек, то справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{r^*} & H^n(\Gamma_T(\Phi)) \\ H^n(E^{n+1}\setminus\theta) & & \downarrow l^* \\ & \xrightarrow[r_S^*]{} & H^n(\Gamma_S(\Phi)). \end{array}$$

Следовательно, $r_S^*(H^n(E^{n+1}\setminus\theta))\subset\operatorname{Im} l^*(H^n(\Gamma_T(\Phi)))$ и гомоморфизм γ нулевой. Теорема доказана.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Если топологическая характеристика векторного поля равна 1, т. е. $\gamma(T; \Phi)=1$, то в шаре T поле Φ имеет особую точку.*

2. Гомотопия многозначных векторных полей.

Определение 2. Два многозначных векторных поля Φ_0 и Φ_1, определенных на шаре T, со значениями в E^{n+1} назовем **гомотопными**, если найдется такое семейство векторных полей с компактными образами $\Phi(t; x)$: $[0; 1]\times E^{n+1}\to E^{n+1}$, для которого выполнены следующие условия:

1) $\Phi(0; x)=\Phi_0(x)$, $\Phi(1; x)=\Phi_1(x)$;

2) $\Phi(t; x)$ замкнуто по совокупности переменных и не имеет особых точек на $[0; 1]\times S^n$.

Лемма 1. *Для того чтобы два векторных поля Φ_1 и Φ_0 были гомотопны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое векторное поле $\tilde{\Phi}$: $T\to E^{n+1}$, без неподвижных точек на S^n, что $\tilde{\Phi}(x)\supset\Phi_0(x)$ и $\tilde{\Phi}(x)\supset\Phi_1(x)$ $\forall x\in T$.*

Пусть Φ и $\tilde{\Phi}$ — многозначные векторные поля, переводящие T в E^{n+1}; при этом выполняется следующее условие: $\tilde{\Phi}(x)\supset\Phi(x)$ $\forall x\in T$. Посмотрим, как связаны между собой $\gamma(\Phi; T)$ и $\gamma(\tilde{\Phi}; T)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_T(\tilde{\Phi}) & \xleftarrow{\tilde{l}} & \Gamma_S(\tilde{\Phi}) & \xrightarrow{\tilde{r}_S} & \\ \nwarrow i_T & & \nwarrow i_S & & E^{n+1}\setminus 0. \\ \Gamma_T(\Phi) & \leftarrow & \Gamma_S(\Phi) & \xrightarrow{r_S} & \end{array} \tag{4}$$

Диаграмме (4) соответствует диаграмма

$$H^n(E^{n+1} \setminus \theta) - \left| \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\tilde r_S^*} H^n(\Gamma_S(\tilde\Phi)) & \xrightarrow{\hat j_{\tilde\Phi}^*} & A_{\tilde\Phi} \\ \downarrow i_S^* & & \downarrow \hat i_{\Phi}^* \\ \xrightarrow{r_S^*} H^n(\Gamma_S(\Phi)) & \xrightarrow{\hat j_{\Phi}^*} & A_{\tilde\Phi}, \end{array} \right. \tag{4'}$$

гомоморфизм $\hat i^*$ естественно возникает из коммутативности диаграммы (4).

Теорема 3. а) *Если гомоморфизм $\hat i^*$ является мономорфизмом, то* $\gamma(\Phi;\ T)=\gamma(\tilde\Phi;\ T)$.

б) *Если* $\gamma(\Phi;\ T)=1$, *то и* $\gamma(\tilde\Phi;\ T)=1$.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из коммутативности диаграммы (4) и определения топологической характеристики.

Конкретизируя теорему 3, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $\tilde\Phi(x)\supset\Phi(x)$ $\forall x\in T$, *сквозной гомоморфизм* $H^n(S^n)\xrightarrow{\tilde t_S^*} H^n(\Gamma_S(\Phi))\xrightarrow{\hat j^*} A_\Phi$ *является изоморфизмом и* $\gamma(\Phi;\ T)=1$, *то* $\gamma(\Phi;\ T)=1$ *тогда и только тогда, когда гомоморфизм* $H^n(S^n)\xrightarrow{\tilde t_S^*} H^n(\Gamma_S(\Phi))\xrightarrow{\hat j^*} A_\Phi$ *ненулевой*.

3. Некоторые теоремы о неподвижных точках. Пусть, как и раньше, $F\colon T\to E^{n+1}$ — многозначное замкнутое отображение с компактными образами. Справедлива

Теорема 4. *Пусть F — многозначное замкнутое отображение, отображающее шар T в себя, без неподвижных точек на границе. Для того чтобы* $\gamma(\Phi;\ T)=1$, *где* $\Phi=I/F$, *необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм*

$$H^n(S^n)\xrightarrow{t_S^*} H^n(\Gamma_S(\Phi))\xrightarrow{\hat j^*} A_\Phi \tag{5}$$

не был нулевым.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $\theta\in\mathring{T}$. Рассмотрим тогда многозначное замкнутое отображение $\tilde F=\bigcup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} t\cdot$ $\cdot F(x)$. Очевидно, что $\tilde F\colon T\to T$ без неподвижных точек на границе и $\tilde F(x)\supset$ $\supset F(x)$ для $\forall x\in T$.

Рассмотрим поле $\tilde\Phi(x)=x-\tilde F(x)$. $\tilde\Phi(x)$ — ациклическое множество для $\forall x\in T$. Тогда отображения $\tilde t_S\colon\Gamma_S(\tilde\Phi)\to S^n$ и $\tilde t\colon\Gamma_T(\tilde\Phi)\to T$ порождают изоморфизмы n-мерных когомологий (см. ([10])).

Очевидно, что $A_{\tilde\Phi}\overset{\hat j^*}{\approx} H^n(\Gamma_S(\tilde\Phi))\overset{\tilde t_S^*}{\approx} H^n(S^n)$, и мы получили, что $\hat j^*\tilde t_S^*$ является изоморфизмом. Для того чтобы воспользоваться леммой 2, нам осталось проверить, что $\gamma(\tilde\Phi;\ T)=1$, но это вытекает из теоремы 3б), так как поле $\tilde\Phi$ содержит единичное поле $I(x)=x$. Это доказывает полностью теорему 4.

Рассмотрим некоторые применения этой теоремы.

Следуя ([10]), введем ряд обозначений.

$$\begin{gathered} M_0=\{x\in T\mid H^0(t^{-1}(x))\neq Z\}; \\ M_k=\{x\in T\mid H^k(t^{-1}(x))\neq 0\},\quad k\geqslant 1, \end{gathered} \tag{6}$$

где $t\colon\Gamma_T(\Phi)\to T$. Через d_k обозначим относительную размерность множества M_k в T; если $M_k\neq 0$, положим $d_k=-\infty$.

Теорема 5. *Пусть* F: $T\to T$, *причем множества* M_k, *где* $0\leqslant k\leqslant n-1$, *удовлетворяют условию* $1+\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(d_k+k)<n$, *а множество* M_k, *если оно не пусто, состоит из конечного числа точек* $\{x_j\}_{j=1}^{S}$, *лежащих внутри* T *и таких, что* $\forall x_j\in M_n$, $\exists\varepsilon_0>0$:

1) *Отображение вложения* $F(x_j)\subset F_\varepsilon(x_j)$, *где* $F_\varepsilon(x_j)$ — ε-*раздутие множества* $F(x)$) *индицирует изоморфизм* n-*мерных когомологий, если* $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.

2) $\exists\lambda_j$ *такое, что сфера радиуса* λ_j; *с центром в точке* x_j *отображается* F *в ациклическое в размерности* n *множество* $Oj\subset F_\varepsilon(x_j)$, *где* $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.

Тогда отображение Φ *имеет в* T *неподвижную точку*.

Доказательство этой теоремы основано на подсчете гомоморфизма (5) с помощью обобщения теоремы Вьеториса — Бегла ([10]).

Определение 3. Будем говорить, что многозначное отображение F имеет гомологически постоянные образы, если $\forall x_0\in T$ и $\forall\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ (достаточно малого числа) найдется окрестность $U(x_0)$ такая, что $\forall x\in U(x)$, $F(x)\subset F_\varepsilon(x_0)$ и отображение вложения индицирует изоморфизм групп когомологией до размерности n включительно.

Теорема 6. *Многозначное отображение* F *с гомологически постоянными образами, отображающее шар* T *в себя, имеет неподвижную точку*.

Доказательство этой теоремы вытекает из непосредственного подсчета групп когомологий $H^n(\Gamma_T(\Phi))$ и $H^n(\Gamma_S(\Phi))$ и гомоморфизма (5) с помощью спектральной последовательности Лере непрерывного отображения (см. ([11])).

Заметим, что предыдущие теоремы связаны с теорией совпадений однозначных отображений.

Пусть f и g — непрерывные отображения, отображающие компакт K в шар $T\subset E^{n+1}$, где $S^n=\partial T$.

Теорема 7. *Если* $f\colon K\xrightarrow{\text{на}}T$, *причем* $H^n(K)=0$ *и гомоморфизм* $f^*\colon H^n(S^n)\to H^n(f^{-1}(S^n))$ *ненулевой, то существует совпадение отображений* f *и* g, *т. е. точка* $x\in K$, *что* $f(x)=g(x)$.

Доказательство этой теоремы основано на применении теоремы 4 к отображению $F=gf^{-1}$: $T\to T$.

В заключение я хочу выразить свою искреннюю признательность Ю. Г. Борисовичу за интерес, проявленный к работе, и ценные замечания.

Поступило
25 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Kakutani*, Duke Math. J., v. 7, 457 (1941). [2] *S. Eilenberg, D. Montgomery*, Am. J. Math., v. 68, № 2, 214 (1946). [3] *A. Granas, I. W. Iaworowski*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astron. et phys., v. 7, 277 (1959). [4] *Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман и др.*, ДАН, т. 187, № 5 (1969). [5] *Ю. Г. Борисович, Ю. Е. Гликлих*, 7-я летняя математическая школа, Киев, 1970. [6] *Б. Д. Гельман*, ДАН, т. 209, № 1 (1973). [7] *Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, В. В. Обуховский*, Тр. сем. по функц. анализу, Воронежск. гос. унив., в. 12, Воронеж, 85 (1969). [8] *D. G. Bourgin*, Pacif. J. Math., v. 45, № 2, 403 (1973). [9] *C. Berge*, Espas Topologiques, Fonction Multircoques, Paris, 1959. [10] *Е. Г. Скляренко*, УМН, т. 19, в. 6 (120) (1964). [22] *Р. Годеман*, Алгебраическая топология и теория пучков, М.— Л., 1961.