Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 513.881 *МАТЕМАТИКА*

М. А. ГОЛЬДМАН, С. Н. КРАЧКОВСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА НУЛЬ-ЭЛЕМЕНТОВ С КОНЕЧНОМЕРНЫМ ВЫСТУПОМ НА РИССОВСКОМ ЯДРЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком С. М. Никольским 5 XI 1974)

Рассмотрим в векторном пространстве X два подпространства E и F таких, что $F\setminus E\neq\varnothing$. Назовем выступом F на E каждое подпространство $F\ominus(F\cap E)$, дополнительно к $F\cap E$ в F. В дальнейшем роль E и F будут играть некоторые подпространства, связанные с действующими в X линейными операторами. Пусть T — такой оператор; $\mathscr{D}(T)$ и $\mathscr{R}(T)$ — соответственно область определения и область значений T; $\mathscr{N}(T)=\{x\in\mathscr{D}(T): Tx=0\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(T)$ риссовское ядро оператора T,

$$\mathfrak{M}(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}(T^n),$$

а через $\mathfrak{N}(T)$ — множество всех его нуль-элементов,

$$\mathfrak{N}(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{N}(T^n).$$

Будем рассматривать следующие выступы нулей и нуль-элементов оператора T:

$$\mathscr{N}'(T)=\mathscr{N}(T)\ominus(\mathscr{N}(T)\cap\mathfrak{M}(T)),\quad \mathfrak{N}'(T)=\mathfrak{N}(T)\ominus(\mathfrak{N}(T)\cap\mathfrak{M}(T)),$$

$$\mathscr{N}_1(T)=\mathscr{N}(T)\ominus(\mathscr{N}(T)\cap\mathscr{R}(T)),\quad \mathfrak{N}_1(T)=\mathfrak{N}(T)\ominus(\mathfrak{N}(T)\cap\mathscr{R}(T)).$$

Заметим, что если размерность какого-либо одного из выступов $\mathscr{N}'(T)$, $\mathfrak{N}'(T)$, $\mathfrak{N}_1(T)$ конечна, то конечны размерности всех четырех выступов; при этом $\dim\mathscr{N}'(T)=\dim\mathfrak{N}_1(T)$.

Введем понятие о высоте выступа линейного множества F на $E=\mathfrak{M}(T)$. Пусть $x\in F\setminus\mathfrak{M}(T)$; будем называть высотой $h_T(x)$ элемента x (относительно оператора T) целое число $n\geq1$ такое, что $x\in\mathscr{R}(T^{n-1})$, но $x\notin\mathscr{R}(T^n)$. Если F' — какой-либо выступ F на $\mathfrak{M}(T)$, то его высотой $h_T(F')$ назовем $\sup\{h_T(x): x\in F\setminus\mathfrak{M}(T)\}$. Легко видеть, что $h_T(F')=\sup\{h_T(x): x\in F'\setminus\{0\}\}$ при любом выборе выступа F'. Заметим, еще, что всегда $h_T(\mathfrak{N}'(T))=h_T(\mathscr{N}'(T))$.

Пусть $\dim\mathscr{N}'(T)<\infty$. Возьмем в $\mathscr{N}'(T)$ какой-либо канонический базис $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1$ и рассмотрим набор чисел $h_T(x_1^1), h_T(x_2^1), \ldots, h_T(x_m^1)$. Такой набор не зависит ни от выбора канонического базиса в $\mathscr{N}'(T)$, ни от выбора самого $\mathscr{N}'(T)$. Из определения символа $h_T(x_k^1)$ следует существование нуль-элементов $x_k^2, \ldots, x_k^{h_T(x_k)}$ таких, что $Ax_k^{r+1}=x_k^r$, $r=1, 2, \ldots, h_T(x_k)-1$. Совокупность всех $x_k^{r_k}$, где $k=1, 2, \ldots, m$ и $r_k=1, 2, \ldots, h_T(x_k)$, образует базис некоторого выступа нуль-элементов $\mathfrak{N}'(T)$, содержащего $\mathscr{N}'(T)$. Набор чисел $h_T(x_1^1), h_T(x_2^1), \ldots, h_T(x_m^1)$ можно рассматривать как характеристику структуры любого выступа $\mathfrak{N}'(T)$.

К характеристике структуры конечномерного выступа $\mathfrak{N}'(T)$ можно подойти несколько иначе. Рассмотрим выступы $\mathfrak{N}_r(T)$ нуль-элементов $\mathfrak{N}(T)$ на $\mathscr{R}(T^r)$, $r=1, 2, \ldots, h_T(\mathfrak{N}'(T))$, содержащиеся в $\mathfrak{N}'(T)$. Очевидно,

$\mathfrak{N}'(T)$ совпадает с $\mathfrak{N}_r(T)$ при $r=h_T(\mathfrak{N}'(T))$. Пусть $d_r=\dim\mathfrak{N}_r(T)$, $r=1,2,\ldots$ $\ldots, h_T(\mathfrak{N}'(T))$, где $\dim\mathfrak{N}_0(T)=0$. Тогда $d_1=\dim\mathscr{N}'(T)=m$ и $d_r\geqslant d_{r+1}$, $r=1,2,\ldots,h_T(\mathfrak{N}'(T))-1$. Рассмотренный выше набор чисел $h_T(x_1^1)$, $h_T(x_2^1),\ldots,h_T(x_m^1)$ можно получить, повторив каждое r, $r=1,2,\ldots$ $\ldots,h_T(\mathfrak{N}'(T))$, d_r-d_{r+1} раз (при этом надо считать $d_{r+1}=0$, если $r=h_T(\mathfrak{N}'(T))$).

Пусть, далее X — банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в X. Будем предполагать, что $\mathscr{R}(A)$ замкнуто в X и что $\dim\mathscr{N}'(A)<\infty$. Нас будут интересовать пространства $\mathscr{N}(A+B)$, $\mathfrak{N}(A+B)$, $\mathscr{N}'(A+B)$, $\mathfrak{N}'(A+B)$, где возмущающий оператор B принадлежит пространству $L_A(X)$ линейных ограниченных операторов в X, коммутирующих с A (т. е. таких, что $\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(AB)$ и $BAx=ABx$ $\forall x\in\mathscr{D}(A)$). Вспомогательным средством для изучения этих пространств будут служить операторы $\hat{A}$, Π_A и $W(B)$, а также формула

$$\mathscr{N}(A+\Pi_AB)=\overline{\mathscr{L}(\mathscr{R}(W(B)\,|_{\mathscr{N}(A)}))}\tag{1}$$

(см. [1а, б]), где B предполагается достаточно малым. При этом, в силу соотношения

$$\hat{A}(\mathscr{R}(A)\cap\overline{\mathfrak{N}(A)})\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}\tag{2}$$

(доказательство которого опускаем), оператор $W(B)$ можно считать определенным на $\overline{\mathfrak{N}(A)}$, а не только на $\mathfrak{N}(A)$, как было в [1б]. Если заменить в формуле (1) сужение $W(B)$ на $\mathscr{N}(A)$ сужением на $\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)$, то мы получим все нули оператора $A+B$, содержащиеся в $\mathfrak{M}(A)$:

$$\mathscr{N}(A+B)\cap\mathfrak{M}(A)=\overline{\mathscr{L}(\mathscr{R}(W(B)\,|_{\mathscr{N}(A)\cap\mathfrak{M}(A)}))}.\tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор, действующий в X. Если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто и $\dim\mathscr{N}'(A)<\infty$, то для достаточно малых $B\in L_A(X)$ имеет место включение $\mathfrak{N}(A+B)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$.*

Доказательство. Требуется показать, что $\mathscr{N}((A+B)^n)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$ при любом натуральном n. Если $n=1$, то устанавливаемый факт вытекает из формулы (1), дающей включение $\mathscr{N}(A+\Pi_AB)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$, и из очевидного включения $\mathscr{N}(A+B)\subset\mathscr{N}(A+\Pi_AB)$. Далее рассуждаем по индукции. Пусть $\mathscr{N}((A+B)^n)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$ при некотором натуральном n и пусть $x\in\mathscr{N}((A+B)^{n+1})$; тогда $(A+B)x\in\mathscr{N}((A+B)^n)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$, откуда $\Pi_A(A+B)x=(A+\Pi_AB)x\in\mathscr{R}(A)\cap\overline{\mathfrak{N}(A)}$.

Далее, воспользовавшись соотношением (2), заключаем, что $(A+\Pi_AB)x=Au$, где $u=\hat{A}(A+\Pi_AB)x\in\overline{\mathfrak{N}(A)}$. Таким образом, x является решением уравнения $(A+\Pi_AB)z=Au$. С другой стороны, $z=W(B)u$ $(\in\overline{\mathfrak{N}(A)})$ также будет решением этого уравнения. Значит, $x-z\in\mathscr{N}(A+\Pi_AB)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$, откуда $x\in\overline{\mathfrak{N}(A)}$, чем индукция завершается.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 для достаточно малых $B\in L_A(X)$ имеют место соотношения*:

1) $\dim\mathfrak{N}'(A+B)\leqslant\dim\mathfrak{N}'(A)$,
2) $\dim\mathscr{N}'(A+B)\leqslant\dim\mathscr{N}'(A)$,
3) $h_{A+B}(\mathfrak{N}'(A+B))\leqslant h_A(\mathfrak{N}'(A))$.

Доказательство. 1) В силу включения $\mathfrak{N}(A+B)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$ (теорема 1), конечномерности $\mathfrak{N}'(A)$ и замкнутости $\mathfrak{M}(A)$ (см. [1б]), имеем $\mathfrak{M}(A)+\mathfrak{N}(A+B)\subset\mathfrak{M}(A)+\mathfrak{N}(A)$. Отсюда заключаем, что размерность выступа нуль-элементов $\mathfrak{N}(A+B)$ на $\mathfrak{M}(A)$ не превышает $\dim\mathfrak{N}'(A)$. Тем более (поскольку $\mathfrak{M}(A)\subset\mathfrak{M}(A+B)$, см. [1в]) $\dim\mathfrak{N}'(A+B)\leqslant\dim\mathfrak{N}'(A)$.

2) Подобно доказательству теоремы 1 устанавливаем, что $\mathfrak{N}(A+\Pi_AB)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$, откуда получаем $\mathscr{R}(A)+\mathfrak{N}(A+B)\subset\mathscr{R}(A)+\mathfrak{N}(A)$. Это показывает (поскольку $\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(A+\Pi_AB)$), что $\dim\mathfrak{N}_1(A+\Pi_AB)\leqslant\dim\mathfrak{N}_1(A)$, т. е.

$\dim \mathcal{N}'(A+\Pi_A B) \leqslant \dim \mathfrak{N}^1(A)$. Для завершения доказательства следует еще учесть, что $\mathcal{N}(A+B) \subset \mathcal{N}(A+\Pi_A B)$ и $\mathfrak{M}(A+\Pi_A B) \subset \mathfrak{M}(A+B)$.

3) Возьмем какой-либо элемент $x \in \mathfrak{N}(A+B) \setminus \mathfrak{M}(A)$. Тогда $x \in \mathfrak{M}(A) + \mathfrak{N}(A)$ и может быть представлен в виде $x=y+z$, где $y \in \mathfrak{M}(A)$, а $z \in \mathfrak{N}(A) \setminus \mathfrak{M}(A)$. Ясно, что $h_{A+B}(x) = h_{A+B}(z)$. Покажем теперь, что $h_{A+B}(z) \leqslant h_A(z)$ $(\leqslant h_A(\mathfrak{N}(A)))$, чем и завершится доказательство (ибо $\mathfrak{N}(A+B) \setminus \mathfrak{M}(A+B) \subset \mathfrak{N}(A+B) \setminus \mathfrak{M}(A)$). Для этого предположим сначала, что $h_A(z)=0$, т. е. что уравнение $Au=z$ неразрешимо. Тогда уравнение $(A+B)v=z$ также будет неразрешимо при достаточно малых B, в чем можно убедиться, рассуждая от противного. Значит, в этом случае $h_{A+B}(z)=0=h_A(z)$. Если $h_A(z)>0$, то аналогичным образом можно доказать, что уравнение $(A+B)^{h_A(z)}v=z$ неразрешимо. Впрочем, не исключено, что неразрешимость уравнения $(A+B)^k v=z$ будет иметь место при $k<h_A(z)$. Таким образом, всегда $h_{A+B}(z) \leqslant h_A(z)$.

Замечания. 1) Пункт 2) теоремы 2 был также доказан в ([15]), однако приведенное там доказательство применимо лишь при существовании линейного непрерывного оператора проектирования P_A пространства X на $\mathcal{N}(A)$.

2) Из доказательства пункта 3) теоремы 2 видно, что в множестве $\mathfrak{M}(A+B) \setminus \mathfrak{M}(A)$ нет ни одного нуль-элемента оператора $A+B$, т. е. $\mathfrak{N}(A+B) \cap \mathfrak{M}(A+B) = \mathfrak{N}(A+B) \cap \mathfrak{M}(A)$.

Теорема 3. *При условиях теоремы 1 для достаточно малых $B \in L_A(X)$ пространство $\overline{\mathfrak{N}(A+B)} \cap \mathfrak{M}(A+B)$ постоянно*:

$$\overline{\mathfrak{N}(A+B)} \cap \mathfrak{M}(A+B) = \overline{\mathfrak{N}(A)} \cap \mathfrak{M}(A). \tag{4}$$

Доказательство сходно с выводом равенства $\overline{\mathfrak{N}(A+B)} = \overline{\mathfrak{N}(A)}$ в ([1a]) для случая, когда $\mathfrak{N}(A) \subset \mathfrak{M}(A)$. При этом не предполагается существования используемого там линейного непрерывного оператора проектирования Q_A пространства X на $\mathscr{R}(A)$, а вместо Q_A и $u(B)$ применяются операторы Π_A и $u(B)$.

В предыдущих теоремах содержались общие высказывания относительно $\mathfrak{N}(A+B)$ при любом малом $B \in L_A(X)$. При специальном выборе B эти высказывания могут в том или другом направлении уточняться. Например, в двух пунктах следующей теоремы уточняются высказывания соответственно теорем 1 и 2.

Теорема 4. *При условиях теоремы 1 для достаточно малых $B \in L_A(X)$, удовлетворяющих условию $B(\mathfrak{N}(A)) \subset \mathscr{R}(A)$, справедливы следующие утверждения*:

1) $\overline{\mathfrak{N}(A+B)} = \overline{\mathfrak{N}(A)}$;

2) *структура выступа $\mathfrak{N}'(A+B)$ совпадает со структурой выступа $\mathfrak{N}'(A)$.*

Возмущения, рассматриваемые в этой теореме, представляют собой в некотором роде крайний случай. Противоположный крайний случай будем иметь, когда B является биективным (в частности, тождественным) оператором. Тогда для достаточно малых $B \in L_A(X)$ выступ $\mathfrak{N}'(A+B)$ вообще исчезает и $\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$ составляет правильную часть $\overline{\mathfrak{N}(A)}$. Пусть, например, A ограничен, и будем рассматривать в качестве возмущающих операторов B полиномы от A (или степенные ряды по A, сходящиеся по операторной норме); тогда, при отсутствии свободного члена, мы будем находиться в условиях применимости теоремы 4; если же свободный член достаточно велик по сравнению с остальной частью полинома, то B будет биективным оператором и $\mathfrak{N}'(A+B)$ сводится к нулю при достаточно малом B.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило
11 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский*, а) ДАН, т. 209, № 4 (1973); б) ДАН, т. 215, № 6 (1974), в) ДАН, т. 197, № 6 (1971).