Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 519.95 МАТЕМАТИКА

И. Я. КАЦ, А. Б. КУРЖАНСКИЙ

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 9 IX 1974)

Излагаются определяющие соотношения задачи наблюдения — фильтрации [1-3], сочетающей вероятностные и минимаксные постановки. Подход к решению опирается на работы [4-7].

1. Минимаксная фильтрация. Рассматривается n-векторная система управления

$$x_{k+1}=A_kx_k+B_ku_k+\xi_k, \quad k=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где на каждом шаге измерению (наблюдению) доступны r-векторные величины

$$y_k=G_kx_k+H_kv_k+\eta_k, \quad k=1, 2, \ldots; \tag{2}$$

здесь ξ_k, η_k — независимые гауссовские последовательности, причем

$$M\xi_k=M\eta_k=0, \quad M\xi_k\xi_i'=Q_k\delta_{ki}, \quad M\eta_k\eta_k'=R_k\delta_{ki}.$$

В принятых обозначениях $M[\ ]$, $M[\,|\,]$ суть операторы математического ожидания и условного математического ожидания, δ_{ki} — символ Кронекера, штрих означает транспонирование. Матрицы ковариаций Q_k, R_k предполагаются положительно определенными.

Информация о детерминированных векторах u_k и v_k ограничивается заданием условий

$$u_k\in U_k, \quad v_k\in V_k, \tag{3}$$

где U_k и V_k — известные выпуклые компакты эвклидовых пространств $R^{(m)}$ и $R^{(p)}$. Матрицы A_k, B_k, G_k, H_k считаются заданными.

Начальное состояние x_0 системы (1) есть гауссовский случайный вектор, независимый по отношению к ξ_k, η_k, с заданной матрицей ковариаций P_0 и с неизвестным заранее средним $\bar{x}_0=Mx_0\in X_0$, где X_0 — заданный выпуклый компакт в $R^{(n)}$.

Для каждой фиксированной пары N-векторов $u_{N-1}(\cdot)=\{u_0, \ldots, u_{N-1}\}$, $v_N(\cdot)=\{v_1, \ldots, v_N\}$ величины $\bar{\xi}_k^*=B_ku_k$, $\bar{\eta}_k^*=H_kv_k$ суть средние значения для гауссовских последовательностей $\xi_k^*=B_ku_k+\xi_k$, $k=0, \ldots, N-1$; $\eta_j^*=H_jv_j+\eta_j$, $j=1, \ldots, N$. Таким образом, (1), (2) можно рассматривать как уравнения с гауссовскими входными воздействиями ξ_k^*, η_k^* и гауссовским начальным вектором x_0 при ограничениях типа неопределенности на средние значения процессов ξ_k^*, η_k^* и вектора x_0. Соответствующие матрицы ковариаций Q_k, R_k, P_0 считаются при этом точно известными. Фиксация вектора $\zeta_N(\cdot)=\{u_{N-1}(\cdot), v_N(\cdot), \bar{x}_0\}$ тем самым означает и фиксацию априорных распределений величин ξ_k, η_k, x_0.

Пусть символ $M[x|y_N(\cdot), \zeta_N(\cdot)]$ означает оператор $M[x|y_N(\cdot)]$, взятый при фиксированном $\zeta_N(\cdot)$. Рассматриваемая задача А состоит в следующем: по известной реализации $y_N(\cdot)=\{y_1,\ldots,y_N\}$ найти для каждого N оценку $x_N^0(\cdot)=x_N^0(y_N(\cdot))$, доставляющую соотношение

$$\max_{\zeta_N(\cdot)} M[\|x_N-x_N^0(\cdot)\|^2|y_N(\cdot),\ \zeta_N(\cdot)]=$$
$$=\min_z \max_{\zeta_N(\cdot)} M[\|x_N-z\|^2|y_N(\cdot),\ \zeta_N(\cdot)]=\varepsilon_{0N}^2 \tag{4}$$

по всем $z\in R^{(n)}$, $\zeta_N(\cdot)\in D[U,\ V,\ X_0]=\{\zeta_N(\cdot):\ u_k\in U_k,\ k=0,\ldots,N-1;\ v_j\in V_j,\ j=1,\ldots,N;\ \bar{x}_0\in X_0\}$.

Иным аспектам задач оценивания в статистически неопределенной ситуации посвящены работы ([8], [9]).

Определяющие соотношения. Пусть вектор $\zeta_N(\cdot)$ зафиксирован. Введем обозначения

$$\bar{x}_N=M[x_N|y_N(\cdot),\zeta_N(\cdot)];\quad X_N=\bigcup_{\zeta_N(\cdot)}\bar{x}_N,\quad \zeta_N(\cdot)\in D[U,V,X_0].$$

При каждом $\zeta_N(\cdot)$ апостериорные распределения x_N здесь будут гауссовскими с известными матрицами ковариаций P_N, не зависящими от выбора детерминированных величин $\zeta_N(\cdot)$. Пара $\{\bar{x}_N,\ P_N\}$ образует при заданном $\zeta_N(\cdot)$ достаточную статистику рассматриваемого процесса ([4]).

Задача А может быть теперь трансформирована следующим образом:

$$\varepsilon_{N0}^2=\sigma_{N0}^2+\delta_{N0}^2, \tag{5}$$

где

$$\delta_{N0}^2=\min_{z\in R^{(n)}}\ \max_{\bar{x}_N\in X_N}\|\bar{x}_N-z\|^2=\max_{\bar{x}_N\in X_N}\|\bar{x}_N-x_N^0(\cdot)\|^2 \tag{6}$$

и величина

$$\sigma_{N0}^2=M[\|x_N-\bar{x}_N\|^2|y_N(\cdot),\zeta_N(\cdot)]=\operatorname{tr}P_N \tag{7}$$

не зависит при заданном $y_N(\cdot)$ от выбора $\zeta_N(\cdot)\in D[U,\ V,\ X_0]$, а следовательно, и соответствующего $\bar{x}_N\in X_N$, фигурирующего в (7). Здесь $\operatorname{tr}P$ означает след матрицы P.

Используя байесову процедуру оценивания и учитывая марковость последовательности x_k, приходим к утверждению.

Теорема 1. *Множества X_N удовлетворяют, начиная с известного X_0, рекуррентным соотношениям*

$$X_{N+1}=(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})A_NX_N+(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})B_NU_N+$$
$$+\Lambda_{N+1}(y_{N+1}-H_{N+1}V_{N+1}),\quad N=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где $\Lambda_N=P_NG_N'R_N^{-1}$, E — единичная матрица,

$$P_N=M_N-M_NG_N'(G_NM_NG_N'+R_N)^{-1}G_NM_N,$$
$$M_N=A_{N-1}P_{N-1}A_{N-1}'+Q_{N-1} \tag{9}$$

при заданном P_0. Соответствующие опорные функции $\rho(l|X)=\max l'x$, $x\in X$, удовлетворяют соотношениям

$$\rho(l|X_{N+1})=\rho(l'(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})A_N|X_N)+$$
$$+\rho(l'(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})B_N|U_N)+l'\Lambda_{N+1}y_{N+1}+\rho(-l'\Lambda_{N+1}H_{N+1}|Q_{N+1}). \tag{10}$$

Нахождение вектора $x_N^0(\cdot)$ сводится к детерминированной минимаксной задаче (6) определения чебышевского центра множества X_N.

Пусть $l^0(X)$ означает экстремальный элемент задачи

$$\delta^0(X)=\min_{z\in X}\max_{\|l\|\leqslant 1}[l'z+\rho(-l|X)]=$$

$$=\max_{\|l\|\leqslant 1}[-\rho(-l|X)+\beta(-l|X)],$$

где $\beta(l|X)$ есть вогнутая на множестве $\|l\|\leqslant 1$ оболочка (верхняя огибающая ([5])) функции $\rho(l|X)$.

Пусть

$$\Psi(X, z)=\beta(0|X)-\max_{\|l\|\leqslant 1}\{l'z+\rho(-l|X)\}, \text{ если } l^0(X)=0,$$

$$\Psi(X, z)=-\rho(-l^0(X)\,|X)-(l^0(X))'z, \text{ если } l^0(X)\neq 0,$$

$$s_{N+1}(\cdot)=s_{N+1}(u_N, v_{N+1}, y_{N+1})=A_Nx_N^0(\cdot)+$$
$$+\Lambda_{N+1}(y_{N+1}-G_{N+1}A_Nx_N^0(\cdot))+(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})B_Nu_N-$$
$$-\Lambda_{N+1}H_{N+1}v_{N+1}.$$

Теорема 2. *Вектор $x_N^0(\cdot)$, $N\geqslant 1$, удовлетворяет уравнению*

$$\overset{0}{x}_{N+1}(\cdot)=A_Nx_N^0(\cdot)+\Lambda_{N+1}(y_{N+1}-G_{N+1}A_Nx_N^0(\cdot))+(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})B_Nu_N^0-$$
$$-\Lambda_{N+1}H_{N+1}\overset{0}{v}_{N+1}+g^0(y_{N+1}, X_N), \tag{11}$$

где Λ_N определяется равенствами (9) *и векторы $u_N^0\in P_N$, $\overset{0}{v}_{N+1}\in Q_{N+1}$, $g^0(y_{N+1}, X_N)$ суть экстремальные элементы задачи*

$$\Psi(X_{N+1}, s_{N+1}+g)\geqslant 0, \qquad \|g\|=\min.$$

Начальный вектор $x_0^0(\cdot)$ есть решение задачи (6) (*чебышевский центр*) *для множества X_0 и определяется условием $\Psi(X_0, x_0^0(\cdot))\geqslant 0$.*

В отсутствие неопределенности по $\zeta_N(\cdot)$ функции u_N^0, $\overset{0}{v}_{N+1}$ определяются однозначно, $g^0(y_{N+1}, X_N)=0$, множества X_N одноточечные и (11) совпадает с уравнением дискретного среднеквадратичного гауссовского фильтра ([1]).

3. Детерминированная задача. Рассмотрим систему (1), (2) при $\xi_k\equiv 0$, $\eta_k\equiv 0$ и при ограничениях (3). Информация относительно детерминированного начального состояния x_0 ограничивается заданием условия $x_0\in\mathscr{X}_0$, где $\mathscr{X}_0$ — заданное выпуклое и замкнутое множество в $R^{(n)}$. В частности, может быть $\mathscr{X}_0=R^{(n)}$. Пусть за N шагов системы реализовался вектор $y_N(\cdot)$. В отличие от статистической ситуации, здесь заданный вектор может реализоваться не при любых $\{u_{N-1}(\cdot), v_N(\cdot), x_0\}=\zeta_N(\cdot)\in D[U, V, \mathscr{X}_0]$, а лишь при таком наборе этих величин, который был бы совместим с реализацией $y_N(\cdot)$.

Определение 1. Множеством $\mathscr{X}_N(\cdot)=\mathscr{X}_N(y_N(\cdot))$, совместимым с реализацией $y_N(\cdot)$, будем называть совокупность тех и только тех векторов $\{z_N\}$, для каждого из которых найдется вектор $\{\overset{*}{u}_{N-1}(\cdot), v_N^*(\cdot), x_0^*\}=\zeta^*(\cdot)\in D[U, V, \mathscr{X}_0]$ такой, что соответствующие траектории x_N^*, y_N^* уравнений (1), (2) будут удовлетворять условиям $x_N^*=z_N$; $y_k^*=y_k$, $k=1, \ldots, N$.

Неопределенность в задании u_k, v_k и x_0 приводит к следующей минимаксной задаче Б: по известной реализации $y_N(\cdot)$ найти для каждого N оценку $x_N^*(\cdot)=x_N^*(y_N(\cdot))$, удовлетворяющую условию

$$\delta_N^*=\max_x\|x-x_N^*(\cdot)\|=\min_z\max_x\|x-z\|, \quad x\in\mathscr{X}_N(\cdot), \quad z\in\mathscr{X}_N(\cdot), \tag{12}$$

Обозначим

$$X[y_N]=\{x:\ Gx+Hv=y_N,\quad v\in V_N\},$$

$$\mathscr{X}^*_{N+1}[\mathscr{X}]=A_N\mathscr{X}+B_NU_N;$$

здесь $\mathscr{X}^*_{N+1}[\mathscr{X}]$ есть область достижимости из множества $\mathscr{X}$ за один шаг системы (1).

Теорема 3. *Имеют место рекуррентные соотношения* $(\mathscr{X}_0(\cdot)=\mathscr{X}_0)$

$$\mathscr{X}_{N+1}(\cdot)=\mathscr{X}^*_{N+1}[\mathscr{X}_N(\cdot)]\cap X[y_{N+1}],\qquad N=0,1,\ldots \tag{13}$$

Вычисление функции $\rho(l|\mathscr{X}_N(\cdot))$, $N\geqslant1$, производится на основе пошаговой процедуры применения операции инфимальной конволюции к опорным функциям

$$\rho(l|\mathscr{X}_{N-1}(\cdot))\ \text{и}\ \rho(l|X[y_N])=\inf_p\{\rho(pH_N|V_N)-p'y_N\}$$

по всем $\{-pG_N=l\}$. Соотношения (13) суть дискретные аналоги уравнений, выведенных для непрерывных систем в работе ([10]).

Отметим, что $\mathscr{X}^*_{N+1}[X_N]$ есть априорный прогноз для совокупности всех допустимых векторов $\bar{x}_{N+1}$ системы (1), полученный по известному X_N без использования величины y_{N+1} — результата $(N+1)$-го измерения. Уравнение (8) может быть записано в виде

$$X_{N+1}=(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})\mathscr{X}_{N+1}[X_N]+\Lambda_{N+1}G_{N+1}X[y_{N+1}]. \tag{14}$$

Матрицы $\Lambda_{N+1}G_{N+1}$, $(E-\Lambda_{N+1}G_{N+1})$ здесь неотрицательны.

Сравнивая (13) и (14), приходим к выводу, что справедлива

Теорема 4. *Пусть* $X_0=\mathscr{X}_0$. *Тогда для любого* $N\geqslant0$ *будет справедливо условие*

$$\mathscr{X}_{N+1}(\cdot)=\cap X_{N+1},$$

где пересечение берется по всем положительно определенным ковариационным матрицам R_k, Q_j, $k=1,\ldots,N+1$; $j=0,\ldots,N$, *определяющим множества* X_{N+1} *в силу* (8), (9), (14).

Авторы выражают искреннюю признательность акад. Н. Н. Красовскому за внимание к работе и ценное обсуждение.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
2 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. Kalman,* Trans. ASME, D, v. 82, 35 (1960). [2] *Н. Н. Красовский,* Теория управления движением, «Наука», 1967. [3] *А. Брайсон, Хо Ю-Ши,* Прикладная теория оптимального управления, М., 1972. [4] *Г. Крамер,* Математические методы статистики, ИЛ, 1948. [5] *Р. Рокафеллар,* Выпуклый анализ, М., 1973. [6] *Н. Н. Красовский,* Прикладная математика и механика, т. 24, № 1, 64 (1960). [7] *Н. Н. Красовский,* Прикладная математика и механика, т. 28, № 1, 3 (1964). [8] *И. Я. Кац, А. Б. Куржанский,* Автоматика и телемеханика, № 12, 15 (1970). [9] *И. И. Богуславский,* Автоматика и телемеханика, № 1, 31 (1971). [10] *А. Б. Куржанский,* Прикладная математика и механика, т. 38, № 1, 12 (1974).