Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 4

УДК 517.947.5.37 *МАТЕМАТИКА*

Л. И. ВАЙНЕРМАН, М. Л. ГОРБАЧУК

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 27 VII 1972)

1. Как показано в работе ([1]), самосопряженные расширения минимального оператора, порожденного эллиптическим формально самосопряженным выражением в конечной области, могут быть описаны с помощью некоторых граничных условий. Для некоторого класса дифференциальных выражений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, охватывающего как эллиптические, так и многие неэллиптические выражения, описание самосопряженных расширений минимального оператора дано в ([2]). Описание в терминах граничных условий других классов расширений (разрешимых, вполне разрешимых, максимально диссипативных и др.) для определенных классов дифференциальных выражений, в частности эллиптических, имеется в работах ([1-3]). Что касается общих неэллиптических выражений, то даже для классического выражения Даламбера ($\partial^2u/\partial t^2-\partial^2u/\partial x^2$) этот вопрос мало исследован; здесь имеются лишь отдельные результаты (см., например, ([4], [5])).

В данной заметке рассматривается дифференциальное выражение

$$l[y]=y''+Ay+q(t)y, \tag{1}$$

где $y(t)$, $t\in[0,\ b]$, $0<b<\infty$, — вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве H, A — полуограниченный снизу самосопряженный оператор в H (можно сразу считать $A\geqslant E$, E — тождественный оператор), $q(t)$ при каждом $t\in[0,\ b]$ — ограниченный самосопряженный оператор в H, причем $q(t)$ как функция от t слабо измерима и ограничена по норме на $[0,\ b]$. На множестве D_0' элементов вида $y(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}\varphi_k(t)f_k$, где $f_k\in D(A)$, $\varphi_k(t)$ — финитные на $[0,\ b]$ бесконечно дифференцируемые функции, определяется оператор L_0': $L_0'y=l[y]$, $y\in D_0'$. Этот оператор эрмитов; его замыкание L_0 в пространстве $\mathscr{L}_2(H,\ (0,\ b))$ называется минимальным оператором, порожденным выражением (1). Сопряженный к L_0 оператор L_0^* называется максимальным. Для минимального оператора L_0 описываются все максимально диссипативные (в том числе самосопряженные) расширения с помощью граничных условий.

В случае, когда оператор A имеет дискретный спектр, среди самосопряженных расширений оператора L_0 имеются как расширения с дискретным спектром, так и расширения, спектр которых непрерывен. В этом случае в терминах граничных условий дается описание всех самосопряженных расширений с дискретным спектром. Кроме того описываются и другие классы самосопряженных расширений, обладающих некоторыми наперед заданными свойствами.

Ввиду неограниченности оператора A в выражении (1), полученные результаты можно применить к исследованию граничных задач для определенного класса уравнений в частных производных (например, для уравнения Даламбера).

2. Обозначим через H_τ, $-1\leqslant\tau\leqslant 1$, гильбертову шкалу пространств ([4]), порожденную оператором A. Тогда оператор A можно рассматривать как непрерывно действующий из H_1 в H. Сопряженный к нему оператор $\tilde{A}$ действует из H в H_{-1} ([4]). Наряду с выражением (1) введем выражение

$$\tilde{l}[y]=y''+\tilde{A}y+q(t)y. \tag{2}$$

Как показано в работах ([6-8]), область определения $\mathscr{D}(L_0^*)$ оператора L_0^* состоит из тех и только тех вектор-функций из $\mathscr{L}_2(H,\ (0,\ b))$, которые сильно непрерывны в H на $[0,\ b]$, имеют первую производную в $H_{-1/2}$, эта производная абсолютно непрерывна в H_{-1} и $\tilde{l}[y]\in\mathscr{L}_2(H,\ (0,\ b))$. При этом вектор-функция $y(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$ принадлежит $\mathscr{D}(L_0)$ тогда и только тогда, когда она сильно непрерывна в $H_{1/2}$, сильно непрерывно дифференцируема в H на $[0,\ b]$ и $y(0)=y'(0)=y(b)=y'(b)=0$.

Таким образом, всякая вектор-функция из $\mathscr{D}(L_0^*)$ на концах интервала $[0,\ b]$ принимает значения в H, а ее производная — в $H_{-1/2}$. В связи с этим возникает вопрос, при каких условиях на элементы $f_1,\ g_1\in H,\ f_2,\ g_2\in H_{-1/2}$ существует вектор-функция $y(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$ такая, что

$$y(0)=f_1,\quad y'(0)=f_2;\quad y(b)=g_1,\quad y'(b)=g_2. \tag{3}$$

Ответ дает

Лемма 1. *Для того чтобы для $f_1,\ g_1\in H,\ f_2,\ g_2\in H_{-1/2}$ существовала вектор-функция $y(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$, удовлетворяющая (3), необходимо и достаточно, чтобы принадлежали пространству H векторы $\cos\sqrt{A}bg_2+ +A^{1/2}\sin\sqrt{A}bg_1-f_2$ и $-\sin\sqrt{A}bg_2+A^{1/2}\cos\sqrt{A}bg_1-A^{1/2}f_1$.*

Для любой вектор-функции $y(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$ положим

$$\begin{aligned}
y_0&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\sqrt{A}\,bA^{-1/2}y'(b)+\cos\sqrt{A}\,by(b)+y(0)),\\
y_b&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\sqrt{A}\,bA^{-1/2}y'(b)-\sin\sqrt{A}\,by(b)-A^{-1/2}y'(0)),\\
y_0'&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{A}\,by'(b)+A^{1/2}\sin\sqrt{A}\,by(b)-y'(0)),\\
y_b'&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\sqrt{A}\,by'(b)+A^{1/2}\cos\sqrt{A}\,by(b)-A^{1/2}y(0));
\end{aligned} \tag{4}$$

$$Y=\{y_0,\ y_b\},\qquad Y'=\{y_0',\ y_b'\}. \tag{5}$$

Из леммы 1 вытекает, что для любой вектор-функции $y(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$ векторы Y и Y', построенные по формулам (4), (5), принадлежат пространству $H\oplus H$. Из однозначной разрешимости системы (4) относительно $y(0)$, $y'(0)$, $y(b)$, $y'(b)$ и леммы 1 следует

Лемма 2. *Для произвольной пары векторов $Y,\ Y'\in H\oplus H$ существует вектор-функция $y(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$ такая, что $Y=\{y_0,\ y_b\}$, $Y'=\{y_0',\ y_b'\}$.*

3. Для любых дважды непрерывно дифференцируемых в H вектор-функций $y(t)$, $z(t)\in\mathscr{D}(L_0^*)$ имеет место формула

$$\langle L_0^*y,z\rangle-\langle y,L_0^*z\rangle=[(y'(t),z(t))-(y(t),z'(t))]\Big|_0^b, \tag{6}$$

где $\langle y,z\rangle=\int\limits_0^b(y(t),z(t))\,dt.$

Так как правая часть формулы (6) инвариантна относительно преобразований (4), то, учитывая обозначения (5), ее можно переписать в виде

$$\langle L_0^*y,\ z\rangle-\langle y,\ L_0^*z\rangle=(Y',\ Z)_{H\oplus H}-(Y,\ Z')_{H\oplus H}. \tag{7}$$

Лемма 1 позволяет утверждать, что формула (7) справедлива уже для любых вектор-функций $y(t)$, $z(t) \in \mathscr{D}(L_0^*)$.

Расширение L минимального оператора L_0 называется диссипативным (аккумулятивным), если $\operatorname{Im}\langle Ly, y\rangle \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) для любой вектор-функции $y(t) \in \mathscr{D}(L)$. Это расширение называется максимально диссипативным (аккумулятивным), если оно не имеет в $L_2(H, (0, b))$ собственных диссипативных (аккумулятивных) расширений. Расширение L является самосопряженным в том и только том случае, когда оно одновременно максимально диссипативно и максимально аккумулятивно.

Исходя из формулы (7) и леммы 2 и используя технику бинарных отношений ([2], [9]), получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Каково бы ни было сжатие K в пространстве $H \oplus H$, граничные условия*

$$(E-k)Y'+i(K+E)Y=0, \tag{8}$$

$$(E-K)Y'-i(K+E)Y=0 \tag{9}$$

определяют в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$ соответственно максимально диссипативное и максимально аккумулятивное расширения оператора L_0.

Обратно, всякое максимально диссипативное (аккумулятивное) расширение в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$ оператора L_0 порождается операцией $\tilde{l}[y]$ и граничным условием вида (8) ((9)), где K — сжатие в $H \oplus H$. Максимально симметрические расширения L_0 в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$ описываются условиями (8) и (9), в которых K — изометрический оператор в $H \oplus H$. Эти условия задают самосопряженное расширение L_0 в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$ тогда и только тогда, когда K — унитарный оператор в $H \oplus H$.

4. Обозначим через $R_\lambda(L_K)$ резольвенту максимально диссипативного (аккумулятивного) расширения L_K оператора L_0, соответствующего граничному условию (8) ((9)) (предполагается, что λ — регулярная точка для оператора L_K). Учитывая, что для любой $h(t) \in \mathscr{L}_2(H, (0, b))$ вектор-функция $y(t) = R_\lambda(L_K)h(t)$ является решением уравнения $\tilde{l}[y]=h$, удовлетворяющим условию (8) ((9)), можно показать, что в случае $q(t) \equiv 0$

$$R_\lambda(L_K)h(t) = U(K-E)Th(t) - iU(K+E)A^{-1/2}Sh(t) + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-x)}{\sqrt{A-\lambda E}}\, h(x)\,dx, \tag{10}$$

где U — линейный оператор, непрерывный из $H \oplus H$ в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$, T, S — операторы, непрерывные из $\mathscr{L}_2(\mathrm{H}, (0, b))$ в $H \oplus H$, причем оператор TU непрерывно обратим в $H \oplus H$.

$$\hat{A}^{-1/2} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & A^{-1/2} \end{pmatrix},$$

Теорема 2. *Пусть оператор A имеет дискретный спектр. Для того чтобы оператор $R_\lambda(L_K)$ был вполне непрерывным в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $K-E$ был вполне непрерывным в $H \oplus H$. Если же A^{-1} — оператор Гильберта — Шмидта в H, то для того, чтобы оператор $R_\lambda(L_K)$ был оператором Гильберта — Шмидта в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$, необходимо и достаточно, чтобы $K-E$ был оператором Гильберта — Шмидта в $H \oplus H$.*

Первое утверждение теоремы в случае $q(t) \equiv 0$ следует из равенства (10) в силу полной непрерывности второго и третьего слагаемых. Если же $q(t) \not\equiv 0$, то нужно воспользоваться соотношением

$$R_\lambda(L_K) = R_\lambda(L_K^0) - R_\lambda(L_K)QR_\lambda(L_K^0),$$

где L_K^0 — максимально диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора L_0, соответствующего случаю, когда в выражении (1) $q(t) \equiv 0$, а

Q $(Qy=q(t)y)$ — ограниченный оператор в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

5. Через $C(H_\tau, (0, b))$ обозначим пространство сильно непрерывных на $[0, b]$ вектор-функций со значениями в H_τ. В частности, $\mathscr{D}(L_0)\in \in C(H_{1/2}, (0, b)), \mathscr{D}(L_0^*)\in C(H, (0, b))$.

Будем называть расширение L оператора L_0 в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$ τ-гладким, если $\mathscr{D}(L)\in C(H_\tau, (0, b))$. Имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы максимально диссипативное (аккумулятивное) расширение L_K было τ-гладким ($0\leqslant\tau\leqslant{}^1/_2$), необходимо и достаточно, чтобы оператор $A^\tau(K-E)$ был непрерывен в $H\oplus H$.*

Отсюда и из теоремы 2 вытекает, что если оператор A имеет дискретный спектр, то всякое τ-гладкое, $\tau>0$, максимально диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора L_0 имеет вполне непрерывную резольвенту.

Расширение L оператора L_0 в $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$ назовем разрешимым, если оператор L^{-1} существует и ограничен на всем $\mathscr{L}_2(H, (0, b))$. В случае, когда в выражении (1) $q(t)\equiv0$, можно доказать, что максимально диссипативное (аккумулятивное) расширение L_K является разрешимым тогда и только тогда, когда оператор $K+E$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем $H\oplus H$.

6. В качестве примеров рассмотрим самосопряженные расширения L_D и L_N оператора L_0, порожденные граничными условиями Дирихле $y(0)= =y(b)=0$ и Неймана $y'(0)=y'(b)=0$. Если в выражении (1) $q(t)\equiv0$, то расширения L_D и L_N разрешимы тогда и только тогда, когда оператор $\sin\sqrt{A}b$ обратим в H. Отсюда, при условии, что оператор A имеет дискретный спектр, непосредственно вытекает неустойчивость разрешимости операторов L_D и L_N относительно малых изменений интервала $[0, b]$.

Для конкретного случая: A равно замыканию $-d^2/dx^2$ с гладких функций, удовлетворяющих граничному условию $y(0)=y(a)=0$, в пространстве $\mathscr{L}_2(0, a)$, $0<a<\infty$, задача Дирихле для выражения (1) с $q(t)\equiv0$ переходит в задачу Дирихле для выражения Даламбера $\square u=\partial^2u/\partial t^2-\partial^2u/\partial x^2$ в прямоугольнике, разрешимость которой, как известно ([4]), не является устойчивой относительно малых изменений размеров прямоугольника. Пользуясь теоремами 1, 2, нетрудно показать, что задачи Дирихле и Неймана для выражения (1) в указанном конкретном случае имеют дискретный спектр тогда и только тогда, когда оператор $\sin\sqrt{A}b$ обратим в $\mathscr{L}_2(0, a)$, т. е. когда эти задачи разрешимы при $q(t)\equiv0$.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
8 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. И. Вишик*, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 1, 187 (1952). [2] *М. Л. Горбачук*, Функц. анализ и его приложения, т. 5, 1, 10 (1971). [3] *М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей, М. А. Рыбак*, ДАН, т. 205, № 5 (1972). [4] *Ю. М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. [5] *А. А. Дезин, В. Н. Масленникова*, Дифференциальные уравнения с частными производными, «Наука», 1970, стр. 81. [6] *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук*, ДАН, т. 184, № 4, 774 (1969). [7] *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук*, Укр. матем. журн., т. 23, № 1, 3 (1971). [8] *Л. И. Вайнерман*, Доп. АН УРСР, № 1, 3 (1972). [9] *Ф. С. Рофе-Бекетов*, ДАН, т. 184, № 5, 1034 (1969).