Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 4

УДК 517

МАТЕМАТИКА

С. М. ВОРОНИН

ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 IX 1974)

Пусть $\zeta(s)$ означает дзета-функцию Римана.

Теорема. *Пусть $0<r<{}^1/_4$. Пусть функция $f(s)$ является аналитической внутри круга $|s|\leqslant r$ и непрерывной вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s|\leqslant r$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует $T=T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|s|\leqslant r}|f(s)-\zeta(s+{}^3/_4+iT)|<\varepsilon.$$

Доказательство теоремы основывается на лемме, относящейся к конечным эйлеровым произведениям по простым числам.

Лемма. *Пусть r и $f(s)$ удовлетворяют условиям теоремы.*

Тогда для всякого $y>0$ и $\varepsilon>0$ существует конечное множество простых чисел M, содержащее все простые числа, меньшие y, такое, что

$$\max_{|s|\leqslant r}\left|f(s)-\prod_{p_k\in M}\left(1-\frac{e^{-2\pi ik/4}}{p_k^{\ s}}\right)^{-1}\right|<\varepsilon,$$

где p_k — k-е простое число в порядке следования в натуральном ряде.

Вывод теоремы из леммы проводится в основных чертах по схеме Г. Бора (см. ([1]), стр. 300).

Доказательство леммы основывается на применении условно сходящихся рядов в гильбертовом пространстве (см. ([2]), стр. 1285) и провóдится аналогично доказательству леммы 11 из ([3]).

Замечание. Утверждение теоремы справедливо для всех L-функций Дирихле.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. К. Титчмарш*, Теория дзета-функции Римана, М., 1953. [2] *Д. В. Печерский*, ДАН, т. 209, № 6 (1973). [3] *С. М. Воронин*, О распределении ненулевых значений функции Римана. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 128 (1972).