Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. Я. ИВРИЙ

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПЕРЕМЕННОЙ КРАТНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 X 1974)

В настоящей заметке мы укажем некоторые необходимые условия корректности в классах Жевре нехарактеристической задачи Коши для гиперболических операторов с характеристическими корнями переменной кратности; условия для операторов с характеристическими корнями постоянной кратности были указаны в ([1]).

Введем обозначения:

$$x=(x_0,\ x')=(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_l)\in R^{l+1},$$

Ω — открытая область в R^{l+1},

$$G=\{x\in\Omega,\ T_-\leqslant x_0\leqslant T_+\},\qquad -\infty\leqslant T_-<T_+\leqslant+\infty,$$

$\bar G$ — замыкание G,

$$G_t=\{x\in G,\ x_0=t\},\quad G_t^+=\{x\in G,\ x_0\geqslant t\},\quad G_t^-=\{x\in G,\ x_0\leqslant t\},$$
$$\Gamma_\pm=\Omega_{T_\pm},\qquad \mathring{G}=G\diagdown(\Gamma_+\cup\Gamma_-);$$

$\xi=(\xi_0,\ \xi')=(\xi_0,\ \xi_1,\dots,\xi_l)$ — двойственные переменные,

$$D=(D_0,\ D_1,\dots,\ D_l),\qquad D_j=-i\,\partial/\partial x_j.$$

Через $\gamma_{\mathrm{loc}}^{(\varkappa)}(G)$, где $1<\varkappa<\infty$, обозначим класс функций u таких, что для любого компакта $K\Subset G$ существуют C, R такие, что для всех α

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha u(x)|\leqslant CR^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|\varkappa},$$

$$\gamma_0^{(\varkappa)}(G)=\gamma_{\mathrm{loc}}^{(\varkappa)}(G)\cup C_0(G).$$

Пусть

$$P=P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha,\quad P_s(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=s}a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

$$P_{s.\alpha}^{(\alpha)}(x,\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha P_s(x,\xi).$$

Мы будем предполагать, что P — гиперболический относительно x_0 в G оператор с аналитическими коэффициентами.

Определение 1. Рассмотрим задачу Коши в слабой форме:

$$Pu=f\quad\text{в}\quad\Omega_{T_+}^-\tag{1_w}$$
$$\operatorname{supp}u\subset\hat\Omega_T^+,\tag{2_w}$$

где $T_-\leqslant T<T_+$.

Назовем ее слабо $\gamma^{(\varkappa)}$-корректной, если для любой $f\in\gamma_0^{(\varkappa)}(\Omega_T^+)$ существует $u\in D'(\Omega)$, удовлетворяющая (1_w), (2_w) в Ω.

Назовем ее слабо локально $\gamma^{(\varkappa)}$-корректной, если для любой $f\in\gamma_0^{(\varkappa)}(\Omega_T^+)$ существуют окрестность G_T $\Omega'\in\Omega$ и $u\in D'(\Omega')$, удовлетворяющая (1_w), (2_w) в Ω'.

Теорема 1. *Пусть* $(\hat{x}, \hat{\xi})\in G\times R^{l+1}$, $\hat{\xi}=(0,\ldots, 0, 1)$ *Пусть* $p=(p_0,\ldots, p_l)$, *причем* $0\leqslant p_k<1$ *для всех* k.

Предположим, что

$$P_{m,\beta}^{(\alpha)}(\hat{x}, \hat{\xi})=0,$$

как только $|\alpha|+\langle\beta-\alpha, p\rangle<r(1-p_0)$, *где* $\langle\gamma, p\rangle=\gamma_0p_0+\ldots+\gamma_lp_l$,

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^r P_m\right)(\hat{x}, \hat{\xi})\neq 0. \qquad (4)$$

Тогда:

(I) *Если задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо* $\gamma^{(\varkappa)}$-*корректна при всех* $T\in[T_-, T_+)$, *то*

$$P_{s,\beta}^{(\alpha)}(\hat{x}, \hat{\xi})=0, \qquad (5)$$

как только $|\alpha|+\langle\beta-\alpha, p\rangle\leqslant r(1-p_0)-(m-s)\varkappa/(\varkappa-1)$, $s<m$.

(II) *Если* $p_0=0$, $\hat{x}\in\mathring{G}\cup\Gamma_-$, *задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$-*корректна при всех* $T\in[T_-, T_+)$, *то* (5) *выполнены, как только* $|\alpha|+\langle\beta-\alpha, p\rangle<r(1-p_0)-(m-s)\varkappa/(\varkappa-1)$, $s<m$.

(III) *Если* $p_0>0$, $\hat{x}\in\mathring{G}\cup\Gamma_-$, *задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$-*корректна при всех* $T\in[T_-, T_+)$, *то* (5) *выполнено, как только* $|\alpha|+\langle\beta-\alpha, p\rangle\leqslant r(1-p_0)-(m-s)\varkappa/(\varkappa-1)$, $s<m$.

Определение 2. Задачу Коши (1_w), (2_w), назовем слабо (локально) $\gamma^{(\varkappa)}$-регулярной, если задача Коши (1_w), (2_w) слабо (локально) $\gamma^{(\varkappa)}$-корректна для оператора $(P+Q)$ при любом Q-операторе порядка не выше $m-1$ с аналитическими коэффициентами.

Следствие 1. *Пусть при* $(\hat{x}, \hat{\xi}')\in G\times(R^l\setminus\{0\})$ *характеристическое уравнение*

$$P_m(\hat{x}, \xi_0, \hat{\xi}')=0 \qquad (6)$$

имеет корень кратности r. *Тогда:*

(I) *Если* $\hat{x}\in\mathring{G}$ *и задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$-*регулярна при всех* $T\in[T_-, T_+)$, *то* $\varkappa<r/(r-2)$.

(II) *Если* $\hat{x}\in\Gamma_-$ *и задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$-*регулярна при всех* $T\in[T_-, T_+)$, *то* $\varkappa<r/(r-3)$.

(III) *Если* $\hat{x}\in\Gamma_+$ *и задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо* $\gamma^{(\varkappa)}$-регулярна при *всех* $T\in[T_-, T_+)$, *то* $\varkappa<r/(r-3)$.

Замечание. Существуют контрпримеры, показывающие, что утверждения следствия 1 неулучшаемы.

Следствие 2. *Пусть* $0\in\Gamma_-$, $a\neq 0$,

$$P\equiv D_0^2-x_0^{2\mu}D_1^2+ax_0^\nu D_1, \qquad \nu<\mu-1.$$

Тогда, если задача (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$-*корректна при* $T=0$, *то* $\varkappa<(2\mu-\nu)/(\mu-\nu-1)$.

Следствие 3. *Пусть* $0\in\Gamma_-$, $a\neq 0$,

$$P=D_0^2-x_1^{2\mu}D_1^2+ax_1^\nu D_1, \qquad \nu<\mu,\ \mu>1.$$

Тогда, если задача (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$-*корректна при* $T=0$, *то* $\varkappa\leqslant\varkappa^*=(2\mu-\nu)/(\mu-\nu)$. *Если же задача* (1_w), (2_w) *слабо* $\gamma^{(\varkappa)}$-*корректна при* $T=0$, *то* $\varkappa<\varkappa^*$.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{x}\in G$, $\hat{\xi}=(0,\ldots,0,1)$, $p=(p_0,\ldots,p_l)$, $1>p_k\leqslant 0$ *для всех* k. *Предположим, что* (5) *выполнено, как только* $|\alpha|+\langle\beta-\alpha, p\rangle<q$. *Тогда:*

(I) *Если задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо* $\gamma^{(\varkappa)}$*-регулярна при любом* $T\in[T_-, T_+]$, *то* $q<q^*=\varkappa/(\varkappa-1)$.

(II) *Если* $p_0=0$, $\hat{x}\in\dot{G}\cup\Gamma_-$, *задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$*-регулярна при любом* $T\in[T_-, T_+]$, *то* $q\leqslant q^*$.

(III) *Если* $p_0>0$, $\hat{x}\in\dot{G}\cup\Gamma_-$, *задача Коши* (1_w), (2_w) *слабо локально* $\gamma^{(\varkappa)}$*-регулярна при любом* $T\in[T_-, T_+]$, *то* $q<q^*$.

Магнитогорский горно-металлургический
институт им. Г. И. Носова

Поступило
21 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Я. Иврий*, ДАН, т. 221, № 4 (1975). [2] *В. Я. Иврий*, УМН, т. 30, № 3 (1975). [3] *В. Я. Иврий, В. М. Петков*, УМН, т. 29, № 5 (179) (1974).