Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

М. И. КАНОВИЧ

СТУПЕНЧАТАЯ СЕМАНТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 1 X 1974)

В данной заметке рассматривается вариант расширения ступенчатой семантической системы А. А. Маркова [1–7]. Мы используем терминологию и результаты работ [1–8].

1. А. А. Марковым было предложено построить систему языков, «параллельную» системе $\text{Я}_1, \ldots, \text{Я}_N, \ldots, \text{Я}_\omega$ работ [1–7], в которой можно было бы рассуждать о множествах. Здесь предлагается следующий вариант такого построения.

2. Я_N-м н о ж е с т в а. Слова вида ЧXA, где X – переменная, A–X-формула языка Я_N, будем называть Я_N-м н о ж е с т в а м и.

Будем говорить, что в е р б о и д P п р и н а д л е ж и т Я_N-м н о ж е с т в у ЧXA, если формула $\mathfrak{F}_{N}\llcorner XAP\lrcorner$ верна в семантике языка Я_N. Пусть X, Y – переменные, A–X-формула, B–Y-формула языка Я_N. Я_N-множества ЧXA и ЧYB считаются о д и н а к о в ы м и, если формула

$$\forall X \& \supset (N-1) A \mathfrak{F}_{N}\llcorner YBX\lrcorner \supset (N-1) \mathfrak{F}_{N}\llcorner YBX\lrcorner A$$

верна в семантике Я_{N+1}.

Можно доказать, что класс Я_1-множеств совпадает с классом рекурсивно перечислимых подмножеств множества всех вербоидов и что для всякого положительного целого числа N класс Я_N-множеств является собственным подклассом класса Я_{N+1}-множеств. Более того, можно дать «количественную» оценку несовпадения этих классов.

Пусть n – натуральное число. Будем говорить, что Я_N-множества M_1 и M_2 n-э к в и в а л е н т н ы, если произвольный вербоид длины не более чем n принадлежит множеству M_1 тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству M_2.

Т е о р е м а 1. *Для любого положительного целого числа N можно указать такое Я_{N+1}-множество M и такое положительное число C, что, каково бы ни было натуральное число n, длина всякого слова, являющегося Я_N-множеством, n-эквивалентным множеству M, не меньше чем $2^{n/C}$.*

Отметим, что имеется и верхняя экспоненциальная оценка.

3. Перенумеруем Я_N-множества следующим образом. Всякое Я_N-множество M есть слово в алфавите A_4, получаемом присоединением к алфавиту A_3 (см. [10], § 6.1) символа Ч. Под н о м е р о м Я_N-множества M будем понимать вербоид, являющийся результатом применения к слову M операции перевода (см. [10], § 4.9) из алфавита A_4 в алфавит a ( ).

4. Построим ступенчатую систему языков $\text{Я}_1^{(N)}$, $\text{Я}_2^{(N)}, \ldots, \text{Я}_L^{(N)}, \ldots$, позволяющих рассуждать о Я_N-множествах. При построении системы будем использовать алфавит A_5, получаемый из алфавита A_4 присоединением символов s, ε, $\mathscr{N}$.

Слова вида (P), где P – непустое слово в алфавите s, будем называть s-п е р е м е н н ы м и.

Я_N-множества и s-переменные будем называть s_N-т е р м а м и. Переменные и термы определяются, как в [1].

Дадим индуктивное определение ф о р м у л ы я з ы к а $\text{Я}_1^{(N)}$:

Fr 1.1. Всякая формула языка Я_1 считается формулой языка $\text{Я}_1^{(N)}$.

Fr 1.2. Если T – терм, W–s_N-терм, то $(T\varepsilon W)$ – формула языка $\text{Я}_1^{(N)}$.

Fr 1.3. Если T – терм, W–s_N-терм, то $(T\mathscr{N}W)$ – формула языка $\text{Я}_1^{(N)}$.

Fr 1.4. Если A и B – формулы языка $\text{Я}_1^{(N)}$, то $\&AB$ – формула языка $\text{Я}_1^{(N)}$.

Дадим индуктивное определение формулы языка $Я^{(N)}_{L+1}$ (здесь и в дальнейшем L и N — положительные целые числа).

Fr $L+1.1$. Если A — формула языка $Я_L{}^{(N)}$, то A — формула языка $Я^{(N)}_{L+1}$.

Fr $L+1.2$. Если A и B — формулы языка $Я_L{}^{(N)}$, то $\supset(L-1)AB$ — формула языка $Я^{(N)}_{L+1}$.

Fr $L+1.3$. Если A и B — формулы языка $Я^{(N)}_{L+1}$, то $\&AB$ — формула языка $Я^{(N)}_{L+1}$

Fr $L+1.4$. Если A — формула языка $Я^{(N)}_{L+1}$, X — переменная или s-переменная, то $\forall XA$ — формула языка $Я^{(N)}_{L+1}$.

Параметры и s-параметры формулы, замкнутые формулы, X-формулы определяются аналогично языку $Я_L$ ([5]). Аналогичным же образом определяется результат подстановки терма (s-терма) T вместо переменной (s-переменной) X в формулу A (обозначаемый $\mathfrak{F}_\llcorner XAT_\lrcorner$).

5. Для языков $Я_L{}^{(N)}$ принимаются следующие семантические соглашения.

Семантические соглашения для $Я_1{}^{(N)}$ таковы.

Сс 1.1. Всякая замкнутая формула языка $Я_1$ на языке $Я_1{}^{(N)}$ выражает то же, что и на языке $Я_1$.

Сс 1.2. Всякая замкнутая формула вида $(T\varepsilon W)$, где T — постоянный терм, W—$Я_N$-множество, выражает на языке $Я_1{}^{(N)}$, что значение терма T принадлежит $Я_N$-множеству W.

Сс 1.3. Всякая замкнутая формула вида $(T\mathcal{N}W)$, где T — постоянный терм, W—$Я_N$-множество, выражает на языке $Я_1{}^{(N)}$, что одинаковы $Я_N$-множество W и $Я_N$-множество, номером которого является значение терма T.

Сс 1.4. Всякая замкнутая формула вида $\&AB$, где A и B — такие замкнутые формулы языка $Я_1{}^{(N)}$, что хотя бы одна из них не есть формула языка $Я_1$, выражает на языке $Я_1{}^{(N)}$, что обе эти формулы A и B верны в языке $Я_1{}^{(N)}$.

Теорема 2. *Каково бы ни было положительное целое число N, для языка $Я_1{}^{(N)}$ не существует полного исчисления.*

Рассмотрим следующую систему правил вывода $S_1{}^{(N)}$, определяющую 1-выводимость из формулы K языка $Я_1{}^{(N)}$:

ПВ 1.1. Формула K считается 1-выводимой из K.

ПВ 1.2. Всякая верная замкнутая формула языка $Я_{N+1}$ считается 1-выводимой из K.

ПВ 1.3. Всякий раз, когда A и B 1-выводимы из K, $\&AB$ может считаться 1-выводимой из K.

ПВ 1.4. Всякий раз, когда $\&AB$ 1-выводима из K, и A и B могут считаться 1-выводимыми из K.

ПВ 1.5. Всякий раз, когда $\mathfrak{F}_\llcorner XCT_\lrcorner$ 1-выводима из K, $(T\varepsilon \daleth XC)$ может считаться 1-выводимой из K.

ПВ 1.6. Всякий раз, когда $(T\varepsilon\daleth XC)$ 1-выводима из K, $\mathfrak{F}_\llcorner XCT_\lrcorner$ может считаться 1-выводимой из K.

ПВ 1.7. Всякий раз, когда

$$\forall X\&\supset(N-1)C\mathfrak{F}_{N\llcorner}YDX_\lrcorner\supset(N-1)\mathfrak{F}_{N\llcorner}YDX_\lrcorner C$$

1-выводима из K и значение терма T есть номер $Я_N$-множества $\daleth YD$, $(T\mathcal{N}\daleth XC)$ может считаться 1-выводимой из K.

ПВ 1.8. Всякий раз, когда $(T\mathcal{N}\daleth XC)$ 1-выводима из K и значение T есть номер $\daleth YD$, $\forall X\&\supset(N-1)C\mathfrak{F}_{N\llcorner}YDX_\lrcorner\supset(N-1)\mathfrak{F}_{N\llcorner}YDX_\lrcorner C$ может считаться 1-выводимой из K.

Здесь A и B — замкнутые формулы языка $Я_1{}^{(N)}$, T — постоянный терм, X, Y — переменные, C—X-формула языка $Я_N$, D—Y-формула языка $Я_N$.

Определим 2-выводимость из формулы K языка $Я_2{}^{(N)}$ с помощью системы правил вывода $S_2{}^{(N)}$, состоящей из правил вывода ПВ2.1 — ПВ 2.13 работы ([3]) со следующими изменениями: в ПВ 2.2 словосочетание «верная ЗФ2» заменяется на словосочетание «верная замкнутая формула языка $Я_2{}^{(N)}$», буквы K, D, E обозначают произвольные замкнутые формулы языка $Я_2^{(N)}$, A, B, C — замкнутые формулы языка $Я_1^{(N)}$, в ПВ 2.7 в качестве A и B могут быть только замкнутые формулы языка $Я_1$, X — переменная (s-переменная), Q — вербоид (соответственно $Я_N$-множество), H—X-формула языка $Я_2^{(N)}$, G—X-формула языка $Я_1$ (в ПВ 2.13 буква X обозначает только переменную).

Определим, наконец, $(L+1)$-выводимость ($L\geqslant 2$) из формулы K языка $Я_{L+1}^{(N)}$ с помощью системы правил вывода $S_{L+1}^{(N)}$, состоящей из правил вывода ПВ $L|$.1 — ПВ $L|$.13 работы ([5]) со следующими изменениями: в ПВ $L|$.2 словосочетание «верная ЗФ $L|$» заменяется на словосочетание «верная замкнутая формула языка $Я_{L+1}^{(N)}$», буквы K, D, E обозначают замкнутые формулы языка $Я_{L+1}^{(N)}$, A, B, C — замкнутые формулы языка $Я_L^{(N)}$, X — переменная (s-переменная), Q — вербоид ($Я_N$-множество), H—X-формула языка $Я_{L+1}^{(N)}$, G—X-формула языка $Я_L^{(N)}$, J — замкнутая формула языка $Я_{L-1}^{(N)}$ (в случае $L=2$ J — замкнутая формула языка $\&^{\omega}\supset Я_1^{(N)}$ (см. определение ([8])).

Замкнутая формула M языка $Я_L^{(N)}$ считается L-выводимой из замкнутой формулы K языка $Я_L^{(N)}$, если в этом можно убедиться на основании правил вывода системы $S_L^{(N)}$.

Семантические соглашения для языка $Я_{L+1}^{(N)}$ таковы.

Сс $L+1$.1. Всякая замкнутая формула языка $Я_L^{(N)}$ на языке $Я_{L+1}^{(N)}$ выражает то же, что и на языке $Я_L^{(N)}$.

Сс $L+1$.2. Всякая замкнутая формула вида $\supset(L-1)AB$, где A и B — замкнутые формулы языка $Я_L^{(N)}$, выражает на языке $Я_{L+1}^{(N)}$, что B L-выводима из A.

Сс $L+1$.3. Всякая замкнутая формула вида $\&AB$, где A и B такие замкнутые формулы языка $Я_{L+1}^{(N)}$, что хотя бы одна из них не есть формула языка $Я_L^{(N)}$, выражает на языке $Я_{L+1}^{(N)}$, что обе эти формулы верны в языке $Я_{L+1}^{(N)}$.

Сс $L+1$.4. Всякая замкнутая формула вида $\vee XA$, где X — переменная (s-переменная), A—X-формула языка $Я_{L+1}^{(N)}$, выражает на языке $Я_{L+1}^{(N)}$, что мы владеем общим методом, позволяющим для произвольного вербоида Q (произвольного $Я_N$-множества Q) убедиться в истинности формулы $\mathfrak{F}_{\llcorner}XAQ_{\lrcorner}$.

Теорема 3. *Каково бы ни было положительное целое число L, система правил вывода $S_L^{(N)}$ семантически пригодна, т. е. если K — произвольная верная замкнутая формула языка $Я_L^{(N)}$ и замкнутая формула M языка $Я_L^{(N)}$ L-выводима из K, то M верна (в семантике $Я_L^{(N)}$).*

6. Построенные языки $Я_L^{(N)}$ обладают свойством согласованности относительно одинаковых $Я_N$-множеств.

Теорема 4. *Пусть X—s-переменная, A—X-формула языка $Я_L^{(N)}$. Пусть W_1 и W_2 — одинаковые $Я_N$-множества. Тогда формула $\supset(L-1)\mathfrak{F}_{\llcorner}XAW_{1\lrcorner}\mathfrak{F}_{\llcorner}XAW_{2\lrcorner}$ верна в семантике $Я_{L+1}^{(N)}$.*

Всякую формулу языка $Я_L^{(N)}$ можно рассматривать как формулу языка $Я_L^{(N+1)}$. Оказывается, что суждение одной и той же «структуры» может быть верным для $Я_N$-множества и неверным для $Я_{N+1}$-множеств.

Теорема 5. *Всякая верная замкнутая формула языка $Я_1^{(N)}$ является верной формулой языка $Я_1^{(N+1)}$. Для любого положительного целого числа N можно указать верную замкнутую формулу языка $Я_2^{(N)}$, не являющуюся верной формулой языка $Я_2^{(L+1)}$.*

7. Построенные языки $Я_L^{(N)}$ можно «погрузить» в ступенчатую семантическую систему А. А. Маркова.

Теорема 6. *Каковы бы ни были положительные целые числа N и L, язык $Я_L^{(N)}$ эквивалентен языку $Я_{N+L}$.*

Как следствие отметим, что языки $Я_L^{(N)}$ и $Я_N^{(L)}$ эквивалентны, т. е. L-ступенчатые суждения о $Я_N$-множествах обладают той же «выразительностью», что и N-ступенчатые суждения о $Я_L$-множествах.

Следствие 1. *Каковы бы ни были положительные целые числа N и L, язык $Я_{L+1}^{(N)}$ не редуцируется к языку $Я_L^{(N)}$.*

8. Аналогично языку $Я_\omega$ можно построить язык $Я_\omega^{(N)}$, являющийся «объединением» языков $Я_1^{(N)}, Я_2^{(N)}, \ldots, Я_L^{(N)} \ldots$

Из теоремы 6 получаем

Следствие 2. *Для любого N язык $Я_\omega^{(N)}$ эквивалентен языку $Я_\omega$.*

9. Будем называть $Я_N$-множества при произвольном N $Я_\omega$-**множествами.**

Аналогично системе языков $Я_1^{(N)}, \ldots, Я_L^{(N)} \ldots$ для $Я_N$-множеств построим систему языков $Я_1^{(\omega)}, \ldots, Я_L^{(\omega)}, \ldots$ для $Я_\omega$-множеств, производя соответствующие изменения в п.п. 4 и 5 (в частности, заменяя слова «$Я_N$-множество» на «$Я_\omega$-множество»; под номером $Я_\omega$-множества M попрежнему понимается перевод слова M в алфавит a ( ) (см. п. 3)).

Нетрудно показать, что язык $Я_1^{(\omega)}$ эквивалентен языку $Я_\omega$.

Теорема 7. *Для любого положительного целого числа L язык $Я_{L+1}^{(\omega)}$ не редуцируется к языку $Я_L^{(\omega)}$.*

Следствие 3. *Язык $Я_2^{(\omega)}$ не редуцируется к языку $Я_\omega$ (и к языку $Я_{\omega+1}$).*

10. В работе [9] рассматривается другой подход к расширению ступенчатой семантической системы А. А. Маркова. Оказывается, что в обоих случаях получаются языки той же «выразительности».

Теорема 8. *Язык $Я_2^{(\omega)}$ эквивалентен языку $[Я_{2\omega}]$ статьи* [9].

11. Теоремы 6 и 8 остаются справедливыми и для более сильного понятия эквивалентности языков, а именно: будем говорить, что язык $Я'$ (из рассматриваемой системы) сильно редуцируется к языку $Я''$, если осуществим такой алгорифм $\mathfrak{R}$, что если A — произвольная формула языка $Я'$, не обладающая s-параметрами, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — список всех ее параметров, то $\mathfrak{R}$ перерабатывает A в формулу B языка $Я''$, не обладающую s-параметрами и имеющую те же параметры $X_1, X_2, \ldots, X_n$, и такую, что равнозначны результаты подстановки любых допустимых значений вместо параметров $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в формулы A и B соответственно; языки, сильно редуцируемые один к другому, назовем сильно эквивалентными. В формулировках теорем 6 и 8 слово «эквивалентен» можно заменить на слова «сильно эквивалентен».

Теорема 6 показывает, что языки $Я_L^{(N)}$, на которых можно разговаривать о $Я_N$-множествах, не являются «новыми» с точки зрения выразительности по сравнению со ступенчатой семантической системой А. А. Маркова [1–7]. «Новые» языки, согласно следствию 3, возникают только на уровне $Я_\omega$-множеств. Отметим также, что во всех здесь построенных языках доказывается принцип А. А. Маркова (принцип конструктивного подбора) и закон снятия двойного отрицания.

Автор глубоко благодарен чл.-корр. АН СССР А. А. Маркову за внимание и советы.

Поступило
24 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, № 1, 40 (1974). [2] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, № 2, 279 (1974). [3] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, № 3, 513 (1974). [4] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, № 4, 765 (1974). [5] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, № 5, 1031 (1974). [6] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, № 6, 1262 (1974). [7] *А. А. Марков*, ДАН, т. 215, № 1, 57 (1974). [8] *М. И. Канович*, ДАН, т. 212, № 4, 800 (1973). [9] *М. И. Канович*, Сборн. Теория алгорифмов и математическая логика, М., 1974, стр. 62. [10] *A. A. Markov*, Rev. Intern. Philosophie, № 98, Fasc. 4, 477 (1971).