Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СВЕРТКАХ С РАЗРЫВНЫМ СИМВОЛОМ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 9 IV 1973)

Рассматривается сингулярный оператор в свертках:

$$(A\varphi)(t)\equiv$$

$$\equiv\varphi^+(t)-G(t)\varphi^-(t)+\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_1(t-\tau)\varphi^+(\tau)\,d\tau-\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_1(t-\tau)\varphi^-(\tau)\,d\tau, & t>0,\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}h_2(t-\tau)\varphi^+(\tau)\,d\tau-\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_2(t-\tau)\varphi^-(\tau)\,d\tau, & t<0,\end{cases} \tag{1}$$

в пространстве $\mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, в предположении, что $G(t)$ кусочно-непрерывна на оси с разрывами в конечных точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и что $h_j(t)$, $k_j(t)\in\mathscr{L}_1(-\infty,\infty)$, $j=1, 2$. Здесь $\varphi(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$, $\varphi^\pm(t)=\pm(P_\pm\varphi)(t)$, $P_\pm={}^1/_2(I\pm S)$,

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)(\tau-t)^{-1}\,d\tau.$$

Оператор (1) представляет собой возмущение хорошо известной ([1], [2]) краевой задачи Римана интенгральными слагаемыми типа свертки (парными операторами, типа Винера — Хопфа и др.). Ранее в ([3]) оператор (1) был изучен в случае, когда $h_1(t)\equiv h_2(t)$ и $k_1(t)\equiv k_2(t)$. Нарушение этих равенств изменяет задачу по существу и она по своей природе близка к краевым задачам с разрывными коэффициентами: символ оператора (1) разрывен в начале координат (даже в случае непрерывности $G(t)$). Естественным и удобным аппаратом, позволяющим преодолеть возникающие здесь трудности, являются операторы бесселева и лиувиллева интегродифференцирования. Основываясь на предварительном изучении одного специального класса операторов с разрывным символом, порожденного бесселевыми и лиувиллевыми потенциалами, мы получим для оператора (1) в общем случае необходимые и достаточные условия нётеровости в $\mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$ и формулу для его индекса.

Некоторые операторы вида (1) в случае $p=2$ рассматривались в ([4]). Отметим также работу ([5]), в которой изучается некоторый дискретный аналог оператора с разрывным символом.

Будем обозначать $\theta_\pm(x)={}^1/_2(1+\operatorname{sign}x)$,

$$(H\varphi)(t)=(h*\varphi)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad \hat h(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}h(t)\,dt,$$

так что

$$A=P_++GP_-+(\theta_+H_1+\theta_-H_2)P_++(\theta_+K_1+\theta_-K_2)\mathrm{P}_-. \tag{2}$$

Пару функций $\{G(x),\sigma(x)\}$ назовем **с и м в о л о м** оператора A. Здесь

$$\sigma(x)=\frac{1+\hat h_2(x)}{1+\hat h_1(x)}\theta_+(x)+\frac{G(\infty)+\hat k_2(x)}{G(\infty)+\hat k_1(x)}\theta_-(x). \tag{3}$$

1. Условие $G(\infty)\neq 0$ необходимо для нётеровости A.

2. Пусть вначале $G(x)$ непрерывна и $\hat{h}_j(0)=\hat{k}_j(0)=0$ (так что $\sigma(x)$ «склеена» в нуле). Тогда справедливо равенство

$$A=NA_1A_2+T_1, \tag{4}$$

где

$$N=P_++GP_-,\quad A_1=I+\frac{1}{G(\infty)}(\theta_+K_1+\theta_-K_2)P_-,\quad A_2=I+(\theta_+H_1+\theta_-H_2)P_+,$$

причем в (4) операторы N, A_1, A_2 перестановочны с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

Вопрос о нётеровости операторов A_1, A_2 решает следующая

Лемма 1. *Пусть $\hat{h}_1(0)=\hat{h}_2(0)=0$. Оператор*

$$A_2'=(\lambda_1\theta_++\lambda_2\theta_-)I+(\theta_+H_1+\theta_-H_2)P_+$$

нётеров в $\mathscr{L}_p$ тогда и только тогда, когда $\lambda_j+\hat{h}_j(x)\neq 0$, $x\geqslant 0$, $j=1, 2$. При этом

$$\varkappa(A_2')=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\arg\frac{\lambda_2+\hat{h}_2(x)}{\lambda_1+\hat{h}_1(x)}. \tag{5}$$

Из (4) и леммы 1 вытекает

Теорема 1. *Пусть $\hat{h}_j(0)=\hat{k}_j(0)=0$, $j=1, 2$, и $G(x)$ непрерывна на оси. Для того чтобы оператор A был нётеров в $\mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$, $p>1$, необходимо и достаточно, чтобы $G(t)\neq 0$, $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$; $1+\hat{h}_j(x)\neq 0$, $x\geqslant 0$; $G(\infty)+\hat{k}_j(x)\neq 0$, $x\leqslant 0$; $j=1, 2$. При выполнении этих условий*

$$\varkappa(A)=\operatorname{ind}G(t)+\operatorname{ind}\sigma(x).$$

3. В общем случае, когда не обязательно $\hat{h}_j(0)=0$, $\hat{k}_j(0)=0$, вместо (4) имеем лишь равенство

$$A=\left[P_++\frac{G}{G(\infty)}P_-\right]A'[P_++G(\infty)P_-]+T_2, \tag{6}$$

где

$$A'=\theta_+\left[(I+H_1)P_++\left(I+\frac{1}{G(\infty)}K_1\right)P_-\right]+$$
$$+\theta_-\left[(I+H_2)P_++\left(I+\frac{1}{G(\infty)}K_2\right)P_-\right].$$

Лемма 2. *Пусть*

$$1+\hat{h}_j(0)\neq 0,\quad G(\infty)+\hat{k}_j(0)\neq 0,\quad j=1, 2. \tag{7}$$

Тогда оператор A' представляется в виде

$$A'=A_0B+T_3=BA_0+T_4, \tag{8}$$

где A_0 — оператор с ядрами, имеющими нулевые моменты, равные нулю, а B — оператор с ядрами специального вида. Именно:

$$A_0=I+(\theta_+H_1{}^0+\theta_-H_2{}^0)P_++(\theta_+K_1{}^0+\theta_-K_2{}^0)P_-; \tag{9}$$

$$B=I+(\theta_+B_1+\theta_-B_2)P_++(\theta_+C_1+\theta_-C_2)P_-, \tag{10}$$

где для ядер $h_j{}^0(x)$, $k_j{}^0(x)$, $b_j(x)$, $c_j(x)\in\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, $j=1, 2$, выполнены условия: а) $\hat{h}_j{}^0(0)=\hat{K}_j{}^0(0)=0$, $j=1, 2$; б) $\hat{b}_j(x)$, $\hat{c}_j(x)$ *— финитные бесконечно дифференцируемые функции, причем* $\hat{b}_j(0)=\hat{h}_j(0)$, $\hat{c}_j(0)=\dfrac{1}{G(\infty)}\hat{k}_j(0)$

и $1+\hat{b}_j(x)\neq 0$, $1+\hat{c}_j(x)\neq 0$, $-\infty<x<\infty$, $\operatorname{ind}(1+\hat{b}_j(x))=\operatorname{ind}(1+\hat{c}_j(x))=0$, $j=1, 2$.

Оператор A_0 изучен в 2. Что касается оператора B, то он, в свою очередь, разбивается в композицию:

$$B=U(I+\theta_+\Omega P_+)V+T_5, \tag{11}$$

где $U=\theta_-+\theta_+(I+C_1)(I+C_2)^{-1}$, $V=(I+B_2)P_++(I+C_2)P_-$ — операторы, обратимые в силу построения в лемме 2, а Ω — оператор свертки с функцией $\omega(x)\in\mathscr{L}_1(-\infty,\infty)$:

$$1+\hat{\omega}(x)=\frac{[1+\hat{b}_1(x)][1+\hat{c}_2(x)]}{[1+\hat{b}_2(x)][1+\hat{c}_1(x)]},\quad 1+\hat{\omega}(0)=\frac{\sigma(-0)}{\sigma(+0)}.$$

Таким образом, исследование оператора (1) сведено к изучению «модельного» оператора

$$M=I+\theta_+\Omega P_+ \tag{12}$$

с разрывным символом $\sigma(x)=1+\theta_+(x)\hat{\omega}(x)$.

4. Для изучения оператора (12) рассмотрим оператор с разрывным символом специального вида

$$\theta_-+\theta_+\Psi^\alpha,\quad \Psi^\alpha\varphi=F^{-1}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\alpha F\varphi,$$

где $F\varphi=\hat{\varphi}$, α — комплексное и $((x-i)/(x+i))^\alpha$ понимается как

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\alpha=\exp\left[\alpha\pi i\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x-\operatorname{sign}x\right)\right].$$

В случае $-1<\operatorname{Re}\alpha<1$ оператор Ψ^α можно выразить в терминах сингулярных операторов: $\Psi^\alpha=N^\alpha N_1{}^\alpha=N_1{}^\alpha N^\alpha$, где $(N^\alpha\varphi)(x)=\cos\alpha\pi\cdot\varphi(x)+$ $+i\sin\alpha\pi\cdot(S\varphi)(x)$, $(N_1{}^\alpha\varphi)(x)=\cos\alpha\pi\cdot\varphi(x)+i\sin\alpha\pi\cdot(S_1\varphi)(x)+(b_\alpha{}^*\varphi)(x)$, где

$$(S_1\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|t-x|}}{t-x}\varphi(t)\,dt,$$

$$b_\alpha(x)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}e^{-|x|}\operatorname{sign}x\int_0^\infty\left[\left(\frac{s+1}{s}\right)^{\alpha\operatorname{sign}x}-1\right]e^{-2s|x|}\,ds\in\mathscr{L}_r,\quad r\geqslant1.$$

Оператор Ψ^α можно представить также с помощью операторов бесселева и лиувиллева интегродифференцирования. Обозначим

$$(I_\pm{}^\alpha\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t_\pm^{\alpha-1}*\varphi),\quad (B_\pm{}^\alpha\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(e^{\mp t}t_\pm^{\alpha-1}*\varphi),$$
$$0\leqslant\operatorname{Re}\alpha<1,$$

понимая при $\operatorname{Re}\alpha=0$ эти свертки как аналитическое продолжение регулярных функционалов $\dfrac{1}{\Gamma(1+\lambda)}t_\pm{}^\lambda$, $\dfrac{1}{\Gamma(1+\lambda)}e^{\mp t}t_\pm{}^\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda>-1$, рассматриваемых как обобщенные функции класса Φ', где Φ — пространство функций, ортогональных многочленам, введенное П. И. Лизоркиным ([6]). Положим еще

$$(D_\pm{}^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x\mp t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

$$(\mathbf{D}_\pm{}^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty\frac{e^{-t}f(x\mp t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ и $D_\pm{}^\alpha=I_\pm{}^{-\alpha}$, $\mathbf{D}_\pm{}^\alpha=B_\pm{}^{-\alpha}$ при $\operatorname{Re}\alpha=0$.

Если $0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 1$, то на плотном [6] в $\mathscr{L}_p$, $p>1$, множестве Φ справедливо представление

$$\Psi^\alpha = \mathbf{D}_-^{\alpha} I_-^{\alpha} D_+^{\alpha} B_+^{\alpha} \tag{13}$$

(при этом $D_+^\alpha I_-^\alpha = N^\alpha$, $\mathbf{D}_-^\alpha B_+^\alpha = N_1^\alpha$). В случае $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1/p$ представление (13) имеет место на всем $\mathscr{L}_p$. С помощью (13) осуществляется факторизация оператора Ψ^α:

$$\Psi^\alpha = (\Psi_-^{\alpha})^{-1} \Psi_+^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 1,$$

где ограниченные в $\mathscr{L}_p$, $p>1$, операторы $\Psi_\pm^\alpha = D_\pm^\alpha B_\pm^\alpha = I - A_\pm^\alpha B_\pm^\alpha$, $A_\pm^\alpha \varphi = a_\pm * \varphi$, $a_\pm(x) = \Gamma^{-1}(-\alpha) x_\pm^{-1-\alpha} [e^{\mp x} - 1]$, обладают свойством

$$\theta_- \Psi_+^\alpha \theta_+ = \theta_+ \Psi_-^\alpha \theta_- = \theta_- (\Psi_+^\alpha)^{-1} \theta_+ = (\Psi_-^\alpha)^{-1} \theta_- = 0.$$

Теорема 2. *Оператор $K^\alpha = \theta_- + \theta_+ \Psi^\alpha$ нётеров в $\mathscr{L}_p$, $p>1$, тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}\alpha \neq 1/p'$ (mod 1), $p' = p(p-1)$. *При выполнении этого условия $\varkappa(K^\alpha) = -[1/p + \operatorname{Re}\alpha]$ и оператор K^α обратим слева при $\varkappa \leqslant 0$ и справа при $\varkappa \geqslant 0$.*

5. Привлечение оператора Ψ^α позволяет свести исследование «модельного» оператора (12) к парному оператору типа свертки. Именно, при выборе

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \ln(1 + \hat{\omega}(0)) = -\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(-0)}{\sigma(+0)}$$

оператор $\Psi^{-\alpha}(I + \Omega P_+)$ является оператором свертки $I + \Omega_1$, $\Omega_1 \varphi = \omega_1 * \varphi$, с суммируемым ядром $\omega_1(x) \in \mathscr{L}_1$. Но тогда для «модельного» оператора M справедливо равенство

$$M = [\theta_- + \theta_+ (I + \Omega_1)][\theta_- + \theta_+ \Psi^\alpha] + T_6. \tag{14}$$

Мы приходим к следующей основной теореме.

Теорема 3. *Пусть $h_j(t)$, $k_j(t) \in \mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, $j = 1, 2$,, и $G(t)$ кусочно-непрерывна на оси с разрывами в конечных точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Для того чтобы оператор A был нётеров в $\mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\inf|G(t)| \neq 0$, $\quad \arg \dfrac{G(t_k - 0)}{G(t_k + 0)} \neq \dfrac{2\pi}{p'} (\operatorname{mod} 2\pi)$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$;

2) $1 + \hat{h}_j(x) \neq 0$, $x \geqslant 0$; $G(\infty) + \hat{k}_j(x) \neq 0$, $x \leqslant 0$; $j = 1, 2$;

3) $\arg \dfrac{\sigma(-0)}{\sigma(+0)} \neq \dfrac{2\pi}{p} (\operatorname{mod} 2\pi)$.

При выполнении этих условий $\varkappa(A) = \operatorname{ind}_{p'} G(t) + \operatorname{ind}_p \sigma(x)$ [7].

В теореме 3 $\operatorname{ind}_p a(t)$ — p-индекс функции [7].

Ростовский государственный университет

Поступило 2 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, М., 1963. [2] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [3] *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*, ДАН, т. 194, № 3, 504 (1970); Изв. АН АрмССР, математика, т. 8, № 1 (1973). [4] *Г. И. Савельев*, Тр. Новочерк. политехн. ин-та, № 109, 3 (1960); № 116, 3 (1961). [5] *Р. В. Дудучава*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 67, № 1, 17 (1972). [6] *П. И. Лизоркин*, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 105, 89 (1969). [7] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*, Studia math., v. 31, № 4, 347 (1968).