Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

УДК 62.501.1

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. КИСЕЛЕВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 6 VIII 1974)

Важным направлением развития современной теории автоматического управления ([1]) является теория так называемого терминального управления. Решено уже много задач этого класса ([2-5]). Важным направлением этого раздела теории управления является аналитическая теория нестационарных систем автоматического управления (с.а.у.) — с.а.у., описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением типа Лапласа

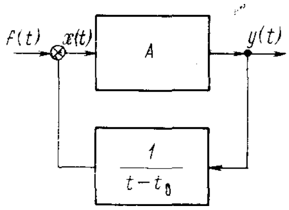

Рис. 1

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k+\beta_k t)\,\xi^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{m}\mu_k\eta^{(k)}(t),$$

α_k, β_k, μ_k — вещественные постоянные, и его дискретным аналогом (см., например, ([6-12])). Общая модель этих с.а.у. приведена на рис. 1, где A — стационарное звено с.а.у., t — текущее время, t_0 — время всего процесса. Эти системы функционируют на конечном промежутке времени $t\in[0, t_0]$. К ним могут быть отнесены системы управления сближением объектов различных классов в воде, воздухе и космическом пространстве и др. Для объектов некоторых классов эта модель служит основой при исследовании конкретных систем.

В статье рассматриваются стохастические системы, приводимые к лапласовым с.а.у. Квазистационарное звено A описывается уравнением

$$\tilde a_0(t)y^{(n)}(t)+\ldots+\tilde a_k(t)y^{(k)}(t)+\ldots+\tilde a_n(t)y(t)=$$
$$=b_0(t)x^{(m)}(t)+\ldots+b_m(t)x(t),\tag{1}$$

коэффициенты которого $a_i(t)$, $b_i(t)$ — случайные функции, представимые в виде канонического разложения ([13]) с конечным числом членов,

$$\tilde a_k(t)=\bar a_k+\sum_{i=0}^{\nu}\alpha_{ki}a_{ki}(t),\quad b_k(t)=\bar b_k+\sum_{i=0}^{\mu}\beta_{ki}b_{ki}(t),\quad \bar a_k,\bar b_k=\text{const}.\tag{2}$$

В настоящее время сильное развитие получили методы исследования с.а.у. с произвольными (см., например, ([14])), либо случайными вариациями параметров (например, ([15])) на основе аппроксимации систем с помощью функций чувствительности I-го рода.

В работе предлагается метод анализа стохастических систем рассматриваемого класса на основе аппроксимации с помощью функций чувствительности I-го рода, позволяющей исследовать не только точность, но и устойчивость систем. Пусть в (1) $\tilde a_k(t)=\bar a_k+\alpha_k a_k(t)$, $\tilde a_i(t)=\bar a_i$, $b_j(t)=\bar b_j$, $i=0, 1,\ldots, n$; $j=0, 1,\ldots, m$, тогда полное движение $y(t)$ выхода квазистационарного звена определится в виде

$$y(t)=\bar y_x(t)+\alpha_k T^a(t);\tag{3}$$

здесь основное движение

$$\bar y_x(t)=\int_0^t\Phi(t-\theta)x(\theta)\,d\theta,$$

функция чувствительности

$$T^a(t) = -\int_0^t T(t-\theta)\, a_k(\theta)\, \bar{y}_x^{\cdots}(\theta)\, d\theta, \quad x(t) = f(t) + \zeta(t),$$

$$\Phi(p) = \sum_{i=0}^{m} \bar{b}_i p^{m-i} \Big/ \sum_{i=0} \bar{a}_i p^{n-i}, \quad T(p) = 1 \Big/ \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i p^{n-i}.$$

Аппроксимированная с.а.у. описывается интегральным уравнением

$$\zeta(t)\,(t-t_0) =$$
$$= \int_0^t \Phi(t-\theta)\,\zeta(\theta)\, d\theta - \alpha_k \int_0^t T(t-\theta)\, a_k(\theta) \frac{dk}{d\theta^k} \int_0^\theta \Phi(\theta-\theta_1)\,\zeta(\theta_1)\, d\theta_1\, d\theta + R(t),$$

$$R(t) = \bar{y}_F(t) - \alpha_k \Delta R(t), \ \Delta R(t) = \int_0^t T(t-\theta)\, \varkappa_F(\theta)\, d\theta, \ \varkappa_F(t) = a_k(t)\, \bar{y}_F^{(k)}(t). \tag{5}$$

Для решения уравнения (4) предлагается метод последовательных приближений. Основная идея метода в том, что каждое приближение описывается уравнением Лапласа и может быть получено в виде интегрального представления

$$\zeta_0(t)\,(t-t_0) = \int_0^t \Phi(t-\theta)\,\zeta_0(\theta)\, d\theta + R(t),$$

. . . .

$$\zeta_k(t)\,(t-t_0) = \int_0^t \Phi(t-\theta)\,\zeta_k(\theta)\, d\theta + R(t) - \alpha_k T_{k-1}^a(t), \tag{6}$$

. . . .

где

$$T_i^a(t) = \int_0^t T(t-\theta)\, \varkappa_i(\theta)\, d\theta, \quad \varkappa_i(t) = a_k(t)\, y_i^{(k)}(t), \quad y_i(t) = \int_0^t \Phi(t-\theta)\,\zeta_i(\theta)\, d\theta. \tag{7}$$

Согласно (5)—(7) и принципу суперпозиций, для определения k-го приближения необходимо найти весовые функции $A_\zeta^T(t, \tau)$, $A_\zeta(t, \tau)$, определяемые из (5)—(7); тогда

$$\zeta_k(t) = \int_0^t f(\theta)\, A_\zeta(t, \theta)\, d\theta + \alpha_k \int_0^t [\varkappa_F(\theta) + \varkappa_{k-1}(\theta)]\, A_\zeta^T(t, \theta)\, d\theta;$$

$A_\zeta^T(t, \tau)$, $A_\zeta(t, \tau)$ могут быть найдены известными методами, например ([6], [7], [16]). Весовая функция стохастической с.а.у. может быть представлена в виде суммы $\bar{\zeta}_{(0)}(t, \tau)$ — основного и $\delta\zeta(t, \tau)$ — дополнительного движения с.а.у. при воздействии $f(t) = \delta(t-\tau)$:

$$\zeta(t, \tau) = \bar{\zeta}_{(0)}(t, \tau) + \delta\zeta(t, \tau), \tag{8}$$

$$\delta\zeta(t, \tau) = \lim_{k\to\infty} \delta\zeta_k(t, \tau) = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_k^i \bar{\bar{\zeta}}_{(i)}(t, \tau) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_k^{i+1} \tilde{\zeta}_{(i)}(t, \tau) \right].$$

$\bar{\bar{\zeta}}_{(i)}(t, \tau)$ и $\tilde{\zeta}_{(i)}(t, \tau)$ определяются из уравнения

$$\bar{\zeta}_{(0)}(t)\,(t-t_0) = \int_0^t \Phi(t-\theta)\,\bar{\zeta}_{(0)}(\theta)\, d\theta + \bar{y}_F(t),$$

$\zeta_0(t)$ — при $-\Delta R(t)$, $\zeta_{(0)}(t) = \alpha_k \tilde{\zeta}_{(0)}(t)$, если $i \geqslant 1$ $\bar{\bar{\zeta}}_{(i)}(t)$ — при $-\bar{\bar{T}}_{(i-1)}^a(t)$, аналогично $\tilde{\zeta}_{(i)}(t)$; $\bar{\bar{T}}_{(i)}^a(t)$, $\tilde{T}_{(i)}^a(t)^{(i)}$ находятся согласно (7).

Теорема 1. *На интервале* $\tau, t \in [0, t']$, $t' < t_0$, $t_0 \in [0, T)$, T — *любое положительное число, где* $a_k(t)$ — *ограниченная функция, которая может иметь не более чем конечное число точек разрывов I-го рода, ряд* $\delta\zeta(t, \tau)$ *сходится равномерно и* $\zeta(t, \tau)$ *является решением уравнения* (4).

Доказательство. Из (8) с использованием, например, ([7], [16]), $\tilde{\zeta}_{(0)}(t, \tau) = A_\zeta(t, \tau)$, где

$$A_\zeta(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{z(t-\tau)} T_\zeta(t, z)\, dz,$$

$$T_\zeta(t, z) = \Phi(z) \frac{1}{\varphi(z)} e^{-(t-t_0)z} \int_{\infty}^{z} e^{(t-t_0)\eta} \varphi(\eta)\, d\eta, \tag{9}$$

$$\varphi(z) = z^{-\mu} \exp - \int_{\infty}^{z} \left[\Phi(\eta) - \frac{\mu}{\eta} \right] d\eta, \quad \mu = \lim_{z\to\infty} z\Phi(z)$$

μ — конечное число (если $\underset{z\to\infty}{\Phi(z)} \sim z^{-\nu} \cdot O(1)$, $\nu > 1$, то $\mu = 0$). Далее,

$$\tilde{\tilde{\varkappa}}_{(0)}(t, \tau) = a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} A_y(t, \tau).$$

Можно показать, что если функция $T_y(t, \tau)$ регулярна в бесконечности непрерывно по t, то

$$T_y^{(k)}(t, z) = \Phi(z) \frac{1}{y(z)} e^{-(t-t_0)z} \int_{\infty} e^{(t-t_0)\eta} \varphi(\eta) \Phi(\eta) \eta^k\, d\eta - \sum_{i=1} z^{k-i} A_y^{(i-1)}(t, \tau)\,|_{\tau=t}, \tag{10}$$

$$\tilde{\tilde{\zeta}}_{(1)}(t, \tau) = \int_{\tau} \tilde{\tilde{\varkappa}}_{(0)}(\theta, \tau) A_\zeta^T(t, \theta)\, d\theta, \quad \tilde{\tilde{y}}_{(1)}(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} \tilde{\tilde{\varkappa}}_{(0)}(\theta, \tau) A_y^T(t, \theta)\, d\theta,$$

$$T_y^T(t, z) = -T(z) \frac{1}{\varphi(z)} e^{-(t-t_0)z} \int_{\infty}^{z} e^{(t-t_0)\eta} \varphi(\eta) \Phi(\eta)\, d\eta;$$

так как $A_y^{(i-1)}(t, \tau)\,|_{\tau=t} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ см. (10), то

$$\frac{d^k}{dt^k} \tilde{y}_{(1)}(t, \tau) = \int_{\tau} \varkappa_{(0)}(\theta, \tau) A_y'(t, \theta)\, d\theta.$$

Для $i \geqslant 2$ получим рекуррентные соотношения

$$\tilde{\tilde{\zeta}}_{(i)}(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} \tilde{\tilde{\varkappa}}_{(i-1)}(\theta, \tau) A_\zeta^T(t, \theta)\, d\theta, \quad \tilde{\tilde{\varkappa}}_{(i-1)}(t, \tau) = a_k(t) \int_{0} \tilde{\tilde{\varkappa}}_{(i-2)}(\theta, \tau) A_y^{T(k)}\, d\theta,$$

аналогично и для $\tilde{\zeta}_{(i)}(t, \tau)$. Тогда имеет место оценка

$$|\delta\zeta(t, \tau)| < \frac{2LM_\zeta}{M_y} \left[e^{(M_y \bar{A} |\alpha_k|)t} - 1 \right], \quad \bar{A} = \max |a_k(t)|,$$

$$M_k = \max \left| \frac{d^k}{dt^k} A_y(t, \tau) \right|, \quad M_\zeta = \max |A_\zeta^T(t, \tau)|, \quad M_y = \max |A_y^{T(k)}(t, \tau)|,$$

$$H = \max \left| \frac{d^k}{dt^k} \Phi(t - \tau) \right|, \quad L = \sup[H, M_k] \ \text{для}\ t, \tau \in [0, t'],\ t' < t_0,\ t_0 \in [0, T),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Подставив $\zeta(t, \tau)$ в (3), можно получить весовую функцию $y(t, \tau)$ в виде

$$y(t, \tau) = \bar{y}_{(0)}(t, \tau) + \delta y(t, \tau), \quad \bar{y}_{(0)}(t, \tau) = \Phi(t - \tau) + A_y(t, \tau),$$

$\bar{y}_{(0)}(t, \tau)$ — основное движение, $\delta y(t, \tau)$ — дополнительное движение стохастической с.а.у. при воздействии $f(t)=\delta(t-\tau)$,

$$\delta y(t,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_k^{i+1}\{[\tilde{\bar{y}}_{(i+1)}-\tilde{\bar{T}}_{(i)}+\tilde{y}_{(i)}]-\alpha_k\tilde{T}^{a}_{(i)}\}-\alpha_k\int_{\tau}T(t-\theta)\varkappa_F(\theta,\tau)\,d\theta, \quad (11)$$

$$\tilde{\bar{y}}_{(i)}(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}\tilde{\tilde{\varkappa}}_{(i-1)}(\theta,\tau)A_y{}^{T}(t,\theta)\,d\theta,$$

аналогично получаем $\tilde{y}_{(i)}(t,\tau)$; $\tilde{\bar{T}}^{a}_{(i)}(t,\tau)$ и $\tilde{T}^{a}_{(i)}(t,\tau)$, см. (7).

В случае анализа стохастической с.а.у. с помощью функции чувствительности I-го рода при воздействии $f(t)$ с известными статистическими характеристиками ее выражение может быть получено из (11) в виде

$$S_y(t)=\int_{0}^{t}\mathscr{L}_y{}^{a}(t,\theta)f(\theta)\,d\theta, \quad (12)$$

$$\mathscr{L}_y{}^{a}(t,\tau)=\tilde{\bar{y}}_{(1)}(t,\tau)+\tilde{y}_{(0)}(t,\tau)-\tilde{\bar{T}}_{(0)}(t,\tau)-\int_{\tau}^{t}T(t-\theta)\varkappa_F(\theta,\tau)\,d\theta.$$

Далее статистические характеристики выхода с.а.у. определяются, например, методом ([15]). Для исследования устойчивости фиксируем момент наблюдения $t=t_н$ так, чтобы $t_н-t_0=\tau_н-\mathrm{const}$ при $t_н\in[0,T)$, $T\to\infty$. $t_н$ может определяться моментом так называемого «ослепления» информационных средств системы управления при сближении объекта с целью.

Преобразуя по Лапласу (11), (12) по $t_н$ при $f(t)=\delta(t)$, можно показать, что справедлива

Теорема 2. *Пусть основное движение стохастической с.а.у. устойчиво: если, например,* $\Phi(z)$ *не имеет особенности в нуле, то полюсы лежат в левой полуплоскости* ([7]). q_k *— полюс* $\Phi(z)$ *с наименьшей* $|\mathrm{Re}\,q_k|$, $\mathrm{Re}\,q_k<0$. *Пусть* z_k *— полюс* $a_k(z)$ *с наибольшей* $\mathrm{Re}\,z_k>0$. *Тогда*:

1) *дополнительное движение с.а.у. будет неустойчивым при* $\mathrm{Re}\,z_k>|\mathrm{Re}\,q_k|$ *вместе с дополнительным движением, определяемым функцией* $\mathscr{L}_y{}^{a}(t,\tau)$.

2) *при* $\mathrm{Re}\,z_k<|\mathrm{Re}\,q_k|$ *дополнительное движение с.а.у., определяемое* $\mathscr{L}_y{}^{a}(t,\tau)$, *устойчиво.*

Характеристики точности с.а.у. могут быть определены с помощью асимптотических оценок ([7], [12]), графо-аналитическими методами, методом сопряженных систем.

Считаю своим долгом выразить глубокую признательность акад. Б. Н. Петрову за внимание к работе.

Поступило
3 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. Н. Петров*, Тр. IV Всесоюзн. совещ. по автоматическому управлению (технической кибернетике), Тбилиси, 1968. Теория автоматического управления, М., 1972. [2] *Б. Н. Петров, А. Я. Андриенко, Ю. П. Портнов-Соколов*, II Симпозиум ИФАК «Автоматическое управление в пространстве», Вена, 1967. [3] *Е. Л. Федосов, А. М. Батков и др.*, Тр. IV Всесоюзн. сов. по автоматическому управлению (технической кибернетике), Тбилиси, 1968; Управление движущимися объектами, М., 1972. [4] *А. М. Батков, И. Б. Тарханов*, Системы телеуправления, М., 1972. [5] *И. А. Богуславский*, Методы навигации и управления по неполной статистической информации, М., 1970. [6] *Б. Е. Рудницкий*, Автоматика и телемеханика, № 12 (1960). [7] *А. Т. Барабанов*, там же, № 6 (1969). [8] *А. Т. Барабанов*, Тр. V Всемирного конгресса ИФАК. Париж, июнь, 1972, ч. IV. [9] *Г. Л. Агасандян*, ДАН, т. 153, № 4 (1963). [10] *В. А. Киселев*, ДАН, т. 190, № 6 (1970). [11] *В. А. Киселев*, ДАН, т. 215, № 6 (1974). [12] *В. М. Чиликин*, Автоматика и телемеханика, № 8 (1971). [13] *В. С. Пугачев*, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, М., 1967. [14] *П. В. Кокотович, Р. С. Рутман*, Автоматика и телемеханика, № 4 (1965). [15] *В. Г. Коньков, П. С. Матвеев*, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1 (1968). [16] *В. М. Чиликин*, Автоматика и телемеханика, № 1 (1969).