Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

УДК 512.83 *МАТЕМАТИКА*

Д. О. ЛОГОФЕТ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ СООБЩЕСТВ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 27 VIII 1974)

В математической теории сообществ (1) возникает система уравнений

$$\frac{dN_i(t)}{dt}=\frac{r_i}{K_i}N_i(t)\left[K_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}N_j(t)\right];\quad i=1,2,\ldots,n;\quad r_i>0;\quad K_i>0, \tag{1}$$

описывающая численности n видов, которые обитают в n пересекающихся некоторым образом экологических нишах и конкурируют за один ресурс. Здесь $N_i(t)$ — численность вида, занимающего i-ю нишу; величины $a_{ii}=1$, $a_{ij}>0$ суть коэффициенты конкуренции i-го вида с j-м и в противоположность ситуации типа «хищник — жертва», обладают свойством симметричности $a_{ij}=a_{ji}$.

Будем считать, что конкуренция между i-м и j-м видами тем слабее, чем дальше индексы отстоят один от другого, а точнее, $a_{ij}=\alpha(|i-j|)$, где $\alpha(x)$ — монотонно убывающая функция. Тогда, если обозначить $\alpha(m)=\alpha_m$; $m=0, 1, \ldots, n$, будем иметь

$$1>\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n>0, \tag{2}$$

и матрица коэффициентов конкуренции принимает следующий вид (для удобства записи порядок матрицы увеличен на единицу):

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Можно показать, что для устойчивости (асимптотической, по Ляпунову) стационарного решения системы (1), в котором представлены все n видов (т. е. $N_i^*>0$, $i=1, 2, \ldots, n$), из критерия Ляпунова следует положительная определенность матрицы A. Доказательство опирается на тот факт, что собственные числа произведения двух эрмитовых положительно определенных операторов положительны. В данной работе доказывается следующая

Теорема. *Положительная матрица A вида* (3) *положительно определена, если выполнены условия* (2) *и условия «строгой выпуклости» функции $\alpha(m)$:*

$$\alpha_m<{}^1/_2(\alpha_{m-1}+\alpha_{m+1});\quad m=1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Несмотря на довольно простую структуру матрицы A, не удается выписать значения собственных чисел в явном виде. Кроме того, без ограничения общности поставленной задачи, не удается доказать положительность всех собственных значений с помощью различных областей локализации типа «кругов Гершгорина» (2), «овалов Кассини» (3) и других.

Для доказательства положительной определенности матрицы A при наличии условий (2) и (4) поступим следующим образом. Дополним первую строку матрицы до размера $2n$, как показано ниже,

$$1\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\ \alpha_n\ \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1,$$

и по полученной строке построим циркулянт $C(A)$ размера $2n\times 2n$, который будет иметь следующий вид [3]:

$$C(A)=\left\|\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & & \alpha_{n-1} & \ldots & & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \ldots & 1 & \alpha_1 & & \alpha_2 & \cdots & & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 & 1 & & \alpha_1 & \cdots & & \alpha_{n-1} \\ \hline \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & & 1 & \cdots & & \alpha_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n-1} & & \alpha_{n-2} & \cdots & & 1 \end{array}\right\|. \qquad (5)$$

Матрица A является подматрицей $C(A)$, образованной первыми $n+1$ строками и столбцами. Ясно, что матрица $C(A)$ симметрична тогда и только тогда, когда симметрична матрица A. Заметим, кстати, что любой симметричный циркулянт порядка $2n$ определяется однозначно набором первых $n+1$ элементов первой строки и имеет при этом структуру (5).

Обозначим через μ_i и λ_k собственные числа матриц A и $C(A)$ соответственно. Тогда, в силу симметричности матриц, их собственные числа вещественны и из теоремы отделимости Штурма (см., например, [4], стр. 146) следует, что во всяком случае

$$\min_k \lambda_k \leqslant \mu_i \leqslant \max_k \lambda_k; \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \qquad (6)$$

Таким образом, для доказательства положительной определенности A достаточно доказать положительность величин λ_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1$.

Собственные числа циркулянта известны [3]:

$$\lambda_k=1+\alpha_1 r_k+\alpha_2 r_k^2+\ldots+\alpha_n r_k^n+\alpha_{n-1} r_k^{n+1}+\ldots+\alpha_1 r_k^{2n-1}; \quad k=0,\ldots,2n-1, \qquad (7)$$

где r_k — корень степени $2n$ из единицы. Но поскольку величины λ_k должны быть вещественны, в правой части (7) должны остаться лишь члены с косинусами:

$$\lambda_k=1+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j[\cos j\varphi_k+\cos(2n-j)\varphi_k]+\alpha_n\cos n\varphi_k; \qquad (8)$$

$$\varphi_k=\pi k/n. \qquad (9)$$

Упрощая выражение (8) с учетом (9), получим

$$\lambda_k=1+2\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\cos j\varphi_k+(-1)^k\alpha_n; \quad k=0,1,\ldots,2n-1, \qquad (10)$$

и, кроме того, легко показать, что

$$\lambda_i=\lambda_{2n-i}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Итак, требуется проверить выполнение условия

$$\lambda_k=1+2\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\cos j\varphi_k+(-1)^k\alpha_n>0, \quad k=0,1,\ldots,n, \qquad (11)$$

при ограничениях (2) и (4). Легко видеть, что при $k=0$ условие (11) вытекает непосредственно из соотношений (2) и (4).

Заметим, что в левой части (11) стоит линейная функция переменных α_j, а ограничения (2) и (4) того же типа, что и ограничения в задачах линейного программирования с той лишь разницей, что последние представляют собой нестрогие неравенства. Обозначим

$$\Omega=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\ 1>\alpha_1>\ldots>\alpha_n>0;\ \alpha_m<{}^1/_2(\alpha_{m-1}+\alpha_{m+1}),\quad m=1,\,2,\,\ldots,\,n-1\};$$

$$\overline{\Omega}=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\ 1\geqslant\alpha_1\geqslant\ldots\alpha_n\geqslant0;\ \alpha_m\leqslant{}^1/_2(\alpha_{m-1}+\alpha_{m+1}),\quad m=1,\,2,\,\ldots,\,n-1\}.$$

Тогда ясно, что $\Omega\supset\Omega$ и

$$\inf_{\Omega}\lambda_k\geqslant\min_{\overline{\Omega}}\lambda_k,\qquad k=0,\,1,\,\ldots,\,n. \tag{12}$$

Задача минимизации λ_k на множестве $\overline{\Omega}$ представляет собой типичную задачу линейного программирования, и ниже методами этой теории будет показано, что, во-первых,

$$\min_{\overline{\Omega},\,k}\lambda_k=0,$$

во-вторых, этот минимум не достигается ни в одной точке множества Ω и, в третьих,

$$\inf_{\Omega}\min_{k}\lambda_k=0.$$

Введением новых переменных x_j по формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_0\ &=1=x_0+2x_1+\ldots+nx_{n-1}+x_n;\\
\alpha_1\ &=x_1+2x_2+\ldots+(n-1)x_{n-1}+x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_m\ &=x_m+2x_{m+1}+\ldots+(n-m)x_{n-1}+x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1}&=x_{n-1}+x_n;\\
\alpha_n\ &=x_n
\end{aligned} \tag{13}$$

задача сводится к минимизации линейной формы (11) при одном ограничении — равенстве

$$x_0+2x_1+\ldots+nx_{n-1}+x_n=1 \tag{14}$$

и $n+1$ ограничениях — неравенствах

$$x_m\geqslant0,\qquad m=0,\,1,\,\ldots,\,n. \tag{15}$$

Известно, что решение задачи линейного программирования достигается в одной или нескольких вершинах симплекса $\overline{\Omega}$, определяемого условиями (14), (15), причем в последнем случае решением является и любая точка выпуклого множества, натянутого на вершины, которые доставляют минимум линейной формы.

В пространстве переменных $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ вершины симплекса Ω принимают вид

$$\left(\frac{m-1}{m},\ \frac{m-2}{m},\ldots,\frac{1}{m},0,\ldots,0\right);\qquad m=2,3,\ldots,n; \tag{16}$$

$$(1,\,1,\,\ldots,\,1). \tag{17}$$

Подставляя (16) в (11), получаем

$$\lambda_k\left(\frac{m-1}{m},\ldots,\frac{1}{m},0,\ldots,0\right)=1+\frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)\cos j\varphi_k;\qquad m=2,3,\ldots,n. \tag{18}$$

Далее воспользуемся тригонометрическим тождеством, которое можно доказать индукцией по N:

$$Y_N(\alpha)=N\cos\alpha+(N-1)\cos2\alpha+\ldots+\cos N\alpha=\frac{(N+1)\cos\alpha-\cos(N+1)\alpha-N}{2(1-\cos\alpha)} \tag{19}$$

Тогда из (19) и (18) получаем

$$\lambda_k\left(\frac{m-1}{m},\ldots,\frac{1}{m},0,\ldots,0\right)=1+\frac{2}{m}Y_{m-1}(\varphi_k)=\frac{1-\cos m\varphi_k}{m(1-\cos\varphi_k)}. \tag{20}$$

Очевидно,

$$\lambda_k\left(\frac{m-1}{m},\ldots,\frac{1}{m},0,\ldots,0\right)>0 \quad \text{для всех } m<n,$$

а для $m=n$ из (20) с учетом (9) следует

$$\lambda_k\left(\frac{n-1}{n},\ldots,\frac{1}{n},0\right)=\frac{1-(-1)^k}{n(1-\cos\varphi_k)}=$$
$$=\begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное;} \\ \dfrac{2}{n(1-\cos\varphi_k)}, & \text{если } k \text{ нечетное.}\end{cases} \tag{21}$$

Для вершины (17) имеем

$$\lambda_k(1,1,\ldots,1)=\frac{\sin(n-{}^1/{}_2)\varphi_k}{\sin\varphi_k/2}+(-1)^k=0. \tag{22}$$

Итак, минимальное значение λ_k, равное нулю, достигается в вершине $(1, 1, \ldots, 1)$ и для четных k еще в вершине $\left(\frac{n-1}{n},\ldots,\frac{1}{n},0\right)$. В последнем случае решением задачи минимизации на $\overline{\Omega}$ является и весь отрезок Γ, соединяющий указанные вершины,

$$\Gamma=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=\alpha\left(\frac{n-1}{n},\ldots,\frac{1}{n},0\right)+\beta(1,1,\ldots,1);\ \alpha\geqslant0,\ \beta\geqslant0,\ \alpha+\beta=1\right\}.$$

Таким образом, $\min\limits_{\overline{\Omega},\,k}\lambda_k=0$ и достигается на множестве $\Gamma\subset\overline{\Omega}$.

Легко показать, что $\Gamma\cap\Omega=\varnothing$. Отсюда следует, что для любой точки множества Ω, т. е. для любого набора α_j, удовлетворяющего строгим неравенствам (2) и (4), $\lambda_k>0$, поскольку $\Omega\subset\overline{\Omega}$, а все точки $\overline{\Omega}$, в которых $\lambda_k=0$, принадлежат Γ.

С другой стороны, из непрерывности λ_k по переменным α_j следует, что

$$\inf_{\Omega}\min_{k}\lambda_k=0,$$

т. е. в положительном спектре матрицы $C(A)$ вида (5) выбором коэффициентов α_j всегда можно получить сколь угодно малое собственное значение.

Автор выражает благодарность Ю. М. Свирежеву за полезное обсуждение рукописи.

Институт медико-биологических проблем
Москва

Поступило
16 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. М. Свирежев, Е. Я. Елизаров,* Математическое моделирование биологических систем, «Наука», 1972. [2] *Ф. Р. Гантмахер,* Теория матриц, «Наука», 1966. [3] *М. Маркус, Х. Минк,* Обзор по теории матриц и матричных неравенств, «Наука», 1972. [4] *Р. Беллман,* Введение в теорию матриц, «Наука», 1969.