Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

УДК 519.21 **МАТЕМАТИКА**

Г. М. МОЛЧАН

# МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО ПОЛЕЙ ЛЕВИ НА ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 X 1974)*

1. Гауссовское случайное поле $\xi$ в области $G\subset R^n$ может быть разложено в сумму независимых полей $\xi_a$ — регулярного и $\xi_s$ — сингулярного. Иначе говоря, $\sigma$-алгебра, связанная с поведением полей в бесконечно малой окрестности границы области G, тривиальна для регулярной компоненты $\xi_a$ и совпадает со всей алгеброй поля $\xi_s$ для второй компоненты. Важно при этом, что если исходное поле $\xi$ обладало марковским свойством относительно подмножеств G, то компоненты разложения $\xi$ наследуют локальное марковское свойство, т. е. марковость относительно подмножеств, принадлежащих G вместе со своим замыканием (см. [1, 2]), там же соответствующие понятия).

Марковские поля, двойственные обобщенным полям, всегда регулярны и допускают очень простое описание: марковское свойство $\xi$ относительно всех подмножеств G имеет место в том и только в том случае, когда корреляционная функция поля есть слабое фундаментальное решение некоторого дифференциального оператора [1, 2]. В примерах, рассматриваемых ниже, этой теоремы недостаточно. Поэтому возникает задача описания сингулярных наростов $\xi_s$ у заданного марковского регулярного поля $\xi_a$, приводящих к марковским полям $\xi=\xi_a+\xi_s$. Последняя задача эквивалентна описанию всех марковских полей, отвечающих одним и тем же условным вероятностям в смысле Р. Л. Добрушина.

Полное решение задачи в гауссовском случае известно только для однородных полей с дискретным временем [3]. Ниже предлагается для нее частичное решение в общем случае. Это позволяет исследовать марковское свойство полей Леви на римановых многообразиях постоянной кривизны. Случай эвклидова пространства был ранее рассмотрен Мак Кином [4] и автором [1].

2. Ниже используются обозначения и понятия из работы [1, 2]: $\xi(\varphi)$, $\varphi\in\mathscr{D}(G)$,— обобщенное гауссовское поле в области $G$, $M\xi(\varphi)=0$; $\mathscr{D}(G)$ — пространство основных функций Л. Шварца в $G$; $H$ — пополнение $\mathscr{D}(G)$ по скалярному произведению $(\varphi, \psi)=M\xi(\varphi)\xi(\psi)$; $H^*$ — сопряженное пространство к $H$ со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_*$. Известно, что $H^*$ допускает вложение в $\mathscr{D}'(G)$, $H^*\subset\mathscr{D}'(G)$.

Пространство $H$ и скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ в $H$, относящиеся к полю $\xi_\alpha$, с индексом $\alpha$, будем соответственно снабжать тем же индексом: $H_\alpha$, $(\cdot,\ \cdot)_\alpha$.

Теорема 1. *Пусть $\xi=\xi_a+\xi_s$ ортогональное разложение обобщенного гауссова поля в области* G *на регулярную и сингулярную компоненты. Предположим, что:*

1) *метрика в пространстве $H_a^*$ на плотном подмножестве $\mathscr{D}$*(G) *имеет вид*

$$(\varphi, \psi)_{*,a}=\int\sum_{|\alpha|,|\beta|<N}\varphi^{(\alpha)}(t)a_{\alpha,\beta}(t)\psi^{(\beta)}(t)\,dt, \tag{1}$$

*где функции $a_{\alpha,\beta}$ локально интегрируемы, $a_{\alpha,\beta}=\overline{a_{\beta,\alpha}}$; $\alpha$, $\beta$ — мультииндексы вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ и $\varphi^{(\alpha)}$ — частная производная порядка $|\alpha|$, отвечающая вектору $\alpha$;*

*2) элементы пространства $H^*$ локально принадлежат $H_a^*$, т. е. $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{G})$ и $F\in H^*$ обобщенная функция $\varphi\cdot F\in H_a^*$.*

*Тогда поле $\xi$ обладает локальным в $\mathbf{G}$ марковским свойством, если и только если $H_s^*$ состоит из слабых решений однородного уравнения*

$$\sum_{\alpha,\beta}(-D)^\alpha a_{\alpha,\beta}D^\beta F=0,\quad F\in H_s^*, \tag{2}$$

*т. е. $(\psi F,\varphi)_{*,a}=0$ для любых $\psi$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{G})$ таких, что $\psi=1$ в $\varepsilon$-окрестности носителя $\varphi$.*

Для приложений более важна следующая

Теорема 2. *Пусть $P(t,D)$: $\mathscr{D}(\mathbf{G})\to\mathscr{D}(\mathbf{G})$ — сильно эллиптический (см. [5]) формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2p$ в ограниченной области $\mathbf{G}$ с гладкой границей. Предположим, что корреляционный функционал $B(\varphi,\psi)$ поля $\xi(\varphi)$ является слабым фундаментальным решением $P(t,D)$: $B(\varphi,P\psi)=\int\varphi(t)\psi(t)\,dt$ и $B(\varphi,\varphi)<c\int|\varphi(t)|^2dt$, $\varphi,\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{G})$.*

*Тогда*: а) *поле $\xi(\varphi)$ локально марковское в $\mathbf{G}$*; б) *относительно подобластей $\overline{G}\subset\mathbf{G}$ с гладкой границей класса $C^p$ поле $\xi(\varphi)$ является марковским порядка $p$, т. е. инфинитезимальная граничная алгебра $\sigma(\partial G)^+$ порождается слабыми нормальными производными поля на границе до порядка $p$.*

*Более точно, для каждой функции $\psi\in\mathscr{L}^2(\partial G)$ в достаточно малом интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$ определен обобщенный процесс: $\eta_\psi(\varphi)=\xi(\varphi(\rho(t))\psi(\omega(t)))$, $\varphi\in\mathscr{D}(-\varepsilon,\varepsilon)$, где $\rho(t)$ — длина, а $\omega(t)$ — основание перпендикуляра, опущенного из $t$ на $\partial G$. Процесс $\eta_\psi$ эквивалентен обычному процессу, имеющему $p-1$ производных (в среднем) и алгебра $\sigma(\partial G)^+$ порождается величинами $\eta_\psi^{(k)}(0)$, $k=0,\ldots,p-1$, $\psi\in\mathscr{L}^2(\partial G)$.*

Поясним доказательство теоремы 2. Из первого предположения следует, что пространство $H^*$ содержит $\mathscr{D}(\mathbf{G})$, причем для любого элемента $F\in H^*\subset\mathscr{D}'(\mathbf{G})$ и $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{G})$ скалярное произведение $(F,\varphi)_*=\langle F,P\varphi\rangle$, где $\langle F,\psi\rangle$ — значение $F$ на $\psi$. Пусть $H_a^*$ отвечает регулярной компоненте поля $\xi$. Тогда $\mathscr{D}(\mathbf{G})$ плотно в $H_a^*$. Действительно, в $H_a^*$ плотны элементы $\mathscr{D}'(\mathbf{G})\cap H^*$, носители которых принадлежат $\mathbf{G}$. Если $F\in H_a^*$ и $0=(F,\varphi)_{*,a}=(F,\varphi)_*=\langle F,P\varphi\rangle$ для всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{G})$ и носитель $F$ отличен от $\mathbf{G}$, то $F=0$. Это вытекает из эллиптичности оператора $P$ и того, что $F$ есть слабое решение $PF=0$. Далее надо использовать теорему 1. Из эллиптичности оператора $P$ следует, что элементы $H_s^*$, как слабые решения уравнения $P\varphi=0$, являются $\infty$-гладкими. Пространство $H_a^*$ совпадает с точностью до эквивалентности норм с пространством $\mathring{W}_2^{(p)}(\mathbf{G})$, которое получается замыканием $\mathscr{D}(\mathbf{G})$ по норме $\|\varphi\|_p^2=\sum\|\varphi^{(\alpha)}\|_{\mathscr{L}^2}^2$, $|\alpha|\leqslant p$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Действительно, оценка $(\varphi,\varphi)_*<c\|\varphi\|_p^2$ следует из гладкости коэффициентов $P(t,D)$, обратное неравенство следует из неравенства Гординга и предположения 2. Указанных фактов достаточно, чтобы проверить условия теоремы 1. Вторая часть теоремы является несложным обобщением теоремы 5.4 в [6].

3. Поле Леви на римановом многообразии $\mathscr{M}^n$ есть гауссовское случайное поле $\xi(t)$: $M\xi(t)=0$ и $M|\xi(t)-\xi(s)|^2=\theta(t,s)$, где $\theta$ — кратчайшее расстояние по геодезической между точками $t$ и $s$. Ниже в качестве $\mathscr{M}^n$ мы рассмотрим сферу $S^n$, эвклидово пространство $R^n$ и пространство Лобачевского $L^n$. Для полной определенности поля дополнительно введем условия нормировки: $\xi(o)=0$ для $R^n$ и $L^n$ и $\xi(o)=-\xi(o^*)$ для $S^n$. Здесь $o$ — фиксированная точка на $\mathscr{M}^n$, а $o^*$ — диаметрально противоположная ей на сфере. В случае сферы поле оказывается антисимметричным $\xi(t)=-\xi(t^*)$ и однородным с корреляционной функцией $B(\theta)=\pi/4-\theta/2$. Поэтому поле Леви на $S^n$ достаточно рассматривать только по полусфере $S_0^n$.

Теорема 3. *Поля Леви на римановых многообразиях $S_0^n$, $R^n$, $L^n$ локально марковские тогда и только тогда, когда размерность пространства* *нечетна. Марковское свойство относительно областей с гладкой границей класса $C^p$ имеет конечный порядок $p=(n+1)/2$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 2. Необходимо только предъявить оператор $P(t,D)$. Пусть $\square$ — оператор Бельтрами — Лапласа на многообразии $\mathscr{M}^n$ кривизны $k$ и $P_\nu(x)=(4\pi)^{-\nu}/\Gamma(\nu+1)\Pi(-x+4ki(\nu-i))$, $0\leqslant i\leqslant\nu$, где $n=2\nu+1$. Тогда корреляционная функция поля $B(t,s)$ удовлетворяет следующему соотношению: $P_\nu(\square)B(t,\cdot)=\delta_t(\cdot)-\delta_0(\cdot)$, если $k\leqslant0$, и $\delta_t(\cdot)-\delta_{t^*}(\cdot)$, если $k>0$. Здесь $\delta_t(\cdot)$ — функция Дирака на $\mathscr{M}^n$, сосредоточенная в точке $t$.

Условия теоремы 2 выполнены в $\mathscr{M}^n\diagdown\{0\}$, если $k\leqslant0$, и в $S_0{}^n$ при $k>0$, т. е. при нечетных $n$ поля Леви марковские относительно областей $G$, граница которых не содержит 0. Случай, когда $\partial G\ni0$, легко сводится к уже доказанному. Для этого надо рассмотреть новое поле Леви $\tilde\xi(t)$: $\tilde\xi(t-t_0)=\xi(t)-\xi(t_0)$, где $t_0\in G$, в области $G_0=G-t_0$. Поле $\hat\xi$ — марковское относительно $G_0$, поскольку $0\notin\partial G_0$. Отсюда уже очевидно следует марковское свойство $\xi(t)$ относительно $G$.

Необходимость, как это ни странно, вытекает из марковского свойства полей при нечетных $n$. Поясним идею на примере $L^n$, $n$ четно. Если $L^{n+1}$ реализовано в виде гиперболоида $t_0{}^2-\sum t_i{}^2=1$, $i=1,\dots,n+1$, то сужение поля Леви на многообразие $\{t_{n+1}=0\}\cap L^{n+1}$ есть снова поле Леви в $L^n$. Соответственно пространство $H^*(n)$, отвечающее полю в $L^n$, получается сужением элементов $H^*(n+1)$ на указанное подмногообразие с нормой $\|\varphi\|_{*,n}=\inf\|\psi\|_{*,n+1}$, где $\psi(t,0)=\varphi(t)$.

Из доказательства теоремы 2 следует, что для области $G$ $H(n+1)=H_a(n+1)\oplus H_s(n+1)$ и $H_a$ совпадает с точностью до эквивалентности норм с пространством Соболева $\mathring{W}_2{}^p(G)$, $p=n/2+1$. Сужение $\mathring{W}_2{}^p(G)$ на $G'=G\cap\{t_{n+1}=0\}$ есть соболевское пространство $\mathring{W}_2^{p-1/2}(G')$. Противоречие мы получим, если предположим, что поле в $L^n$ марковское. Действительно, $\mathscr{D}(G')$ плотно в $\mathring{W}_2^{p-1/2}(G')$ и, значит, в $H_a{}^*(n)$. Из условия марковости поля в $L^n$ будет следовать марковость регулярной компоненты и вид (1) для скалярного произведения в $H_a{}^*(n)$. Из локальной однородности поля следует, что в $H_n{}^*$ унитарна операция $T_gm(t)=m(gt)-m(g0)$, где $g$ — движение в $\mathscr{M}^n$. Если $G'$ не содержит 0, то форма $(\varphi,\psi)_{*,a}$ в $H_a{}^*(n)$ инвариантна относительно преобразований $\varphi(t)\to\varphi(gt)$ при сдвигах $g$, близких к тождественному. Следовательно, форма (1) имеет вид $\langle\varphi,Q\psi\rangle$, где $Q$ — некоторый полином от оператора Лапласа. Но тогда $H_a{}^*(n)$ эквивалентно пространству Соболева с целым индексом, что невозможно.

Замечание. Приведенные рассуждения показывают также, что сужение полей Леви в нечетномерных пространствах $\mathscr{M}^n$ на геодезические сферы с центром в нуле не могут обладать марковским свойством. По-видимому, это замечание верно для всех $n$. Однако кососимметрическая часть поля Леви в эвклидовом пространстве, $x_-(t)=x(t)-x(-t)$, обладает марковским свойством на подмногообразиях с краем типа полупространств $\mathscr{M}=\{t:\ t_1=0,\dots,t_p=0,\ t_{p+1}>0\}$, $p\geqslant0$, и полусфер $\{|t|=R\}\cap\mathscr{M}$, если только размерность многообразия нечетна. В этом случае условия теоремы выполняются для полупространств с оператором $c_\nu\square^{\nu+1}$, а для полусфер $c_\nu\Pi(-\square+(d-i-1/2)(i-1/2))$, $0\leqslant i\leqslant\nu$. Здесь, по-прежнему, $d=2\nu+1$ — размерность многообразия.

Другой интересный пример марковских обобщенных полей связан с ядром $\ln k^{1/2}\operatorname{ctg}1/2k^{1/2}\theta$ на $\mathscr{M}^n$ кривизны $k$. Ядро определяет однородные поля при $k\neq0$ и локально однородное поле при $k=0$. Аналогично полям Леви для них справедлива теорема 3, но с заменой четности $n$ и $p=n/2$. При четных $n$ соответствующий оператор $P$ для данного ядра есть $c_n\Pi(-\square+k(2i-1)(n-2i))$, $0\leqslant i\leqslant n/2$.

4. Спектральный анализ положительно определенных ядер $B(t,s)=$

$=\frac{1}{2}[\psi(\theta(o,t))+\psi(\theta(o,s))-\psi(\theta(t,s))]$ на однородных пространствах рассматривался в работе ([7]). Здесь $\theta(t,s)$ — расстояние между точками, а $\psi(x)$ — непрерывная функция. Для рассматриваемых пространств $\mathscr{M}^n$ функция $B(t,s)$ является корреляционной, если только имеет место представление

$$\psi(\theta)=\int\limits_{\Lambda\setminus\{0\}}[1-\Phi_\sigma^\nu(\theta)]a_\nu(\sigma)\,dF(\sigma)+c^2g_\nu(\theta)$$

с положительной мерой $F(\sigma)$. Здесь $n=2\nu+1$; $\Phi_\sigma^\nu(\theta)$, $\Phi_\sigma^\nu(0)=1$ — зональные сферические функции унитарных представлений группы движений $\mathscr{M}^n$ ([8]). Они являются собственными функциями оператора $-\Box$ с собственными значениями $\lambda_\sigma^\nu=k\sigma(\sigma+2\nu)>0$, где $k$ — кривизна пространства; $\Lambda$ — множество представлений: $\{0,1,2,\ldots\}$ при $k=1$; $\Lambda=\{\sigma\geqslant0\}$ при $k=0$ и $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$, $\Lambda_1=\{-\nu+ix,\ x>0\}$ — основная серия представлений и $\Lambda_2=\{-\nu\leqslant\sigma\leqslant0\}$ — присоединенная серия. Функция $g_\nu(0)=0$; $\theta^2/2$; $d\Phi_\sigma^\nu(\theta)/d\sigma|_{\sigma=0}$ соответственно для $k=1$; $0$; $-1$. Весовая функция $a_\nu(\sigma)=1$ для присоединенных представлений $\Lambda_2$ и $a_\nu(\sigma)=\|\Phi_\sigma^\nu(\theta)\|^{-2}$ при $k=1$ и $d\|\int^\sigma\Phi_\alpha^\nu(\theta)\,d\alpha\|^2/d\sigma$ при $k\leqslant0$. Норма рассматривается в $\mathscr{L}^2(\mathscr{M}^n)$. Меру $F$ естественно называть спектральной мерой соответствующего случайного поля, а абсолютно непрерывную компоненту $F$ относительно меры Лебега на множестве $\Lambda_1$ ($\Lambda_1=\Lambda$ при $k_1\geqslant0$) — регулярной частью спектра. Оказывается, регулярные поля в $R^n$ и $L^n$ имеют регулярный спектр.

Теорема 4. *Спектр поля Леви на $S^n$ сосредоточен в нечетных точках $\Lambda$ с весами* $c_\nu\left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)_{\nu+1}\right]^{-2}$*; на $R^n$* $F=c_\nu\left[\frac{\sigma}{2}\right]^{-2(\nu+1)}d\sigma$*; на $L^n$, $n$ нечетно, регулярная компонента спектра* $F_a(d\sigma)=c_\nu\left(\frac{\sigma}{2}\right)_{\nu+1}\left(-\frac{\sigma}{2}-\nu\right)_{\nu+1}d\sigma$*, сингулярная часть сосредоточена в четных точках множества $\Lambda_2=[-\nu,0]$ с весами*

$$a_\sigma=\pi\ \text{выч}\ a_\nu(\sigma)\dot F_a(\sigma)=(\nu+\sigma)\binom{\nu}{-\sigma/2}^2\left[-2\sigma(2\nu+\sigma)\binom{2\nu}{-\sigma}\right]^{-1}.$$

*Вес функции $g_\nu(\theta)$ есть $c^2=\frac{1}{2}$. Здесь использованы обозначения $n=2\nu+1$,* $(a)_b=\Gamma(a+b)/\Gamma(a)$, $\binom{a}{b}=\Gamma(a+1)[\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)]^{-1}$, $c_\nu=\pi^\nu\Gamma(\nu)/4$.

Последняя теорема дает ответ на вопрос Ганголли ([7]).

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. М. Молчан*, ДАН, т. 197, № 4 (1971). [2] *Г. М. Молчан*, ДАН, т. 215, № 5 (1974). [3] *Ю. А. Розанов*, Теор. вероятн. и ее примен., т. 12, в. 3, 433 (1967). [4] *Г. Мак Кин*, Теор. вероятн. и ее примен., т. 8, № 4, 357 (1963). [5] *Ю. М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряжений операторов, Киев, 1965. [6] *L. D. Pitt*, Arch. Rational Mech. Anal., v. 43, 5, 367 (1971). [7] *R. Gangolli*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. B, № 2, 121 (1967). [8] *Н. Я. Виленкин*, Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965.