

где $H(t) = B^{-1}(t)A(t)$. Учитывая, что $H \in \Omega_n^+(\Gamma)$, из (2) с помощью принципа непрерывного продолжения и обобщенной теоремы Лиувилля заключаем, что H — блочно-треугольная полиномиальная матрица с постоянным определителем. Отсюда вытекает существование полиномиальной матрицы-функции $\Phi(t)$, удовлетворяющей равенству

$$H(t)\Lambda_0(t) = \Phi(t)\Lambda_0(t)\Phi^*(t).$$

Полагая $A_0(t) = B(t)\Phi(t)$, получим искомую факторизацию (1).

Т е о р е м а 2. Для эрмитовой матрицы-функции $G \in \Omega_2(\Gamma)$ справедливо альтернативное утверждение:

1) $\Delta(t) = \det G(t) > 0$, тогда частные индексы матрицы G равны нулю и имеет место факторизация

$$G(t) = \text{sign } G \cdot A(t)A^*(t).$$

2) $\Delta(t) = \det G(t) < 0$, тогда частные индексы матрицы G равны $k(\geq 0)$ и $-k$ и имеет место факторизация

$$G(t) = A(t) \begin{pmatrix} 0 & t^k \\ t^{-k} & 0 \end{pmatrix} A^*(t); \quad (3)$$

здесь $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Omega_2^+(\Gamma)$, $\text{sign } G = 1(-1)$, если $G(t)$ положительно (отрицательно) определена.

В случае, когда все частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю, утверждение теоремы 1 было получено Ю. Л. Шмульяном (1). Им же (2) доказано первое утверждение теоремы 2.

2. Рассмотрим эрмитовы матрицы второго порядка

$$G(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & d(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

предполагая, что

$$d(t) \neq 0 \quad \text{при всех } t \in \Gamma. \quad (5)$$

Интерес представляет лишь случай

$$\Delta(t) = a(t)d(t) - |b(t)|^2 < 0, \quad (6)$$

поскольку при $\Delta(t) > 0$ частные индексы матрицы (4) равны нулю.

Класс эрмитовых матриц-функций $G \in \Omega_2(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям (5) и (6), обозначим $\tilde{\Omega}_2(\Gamma)$. Следующая теорема дает оценки для частных индексов таких матриц.

Т е о р е м а 3. Пусть существуют рациональные функции r_1 и r_2 , не имеющие общих полюсов в D^+ , совпадающие (с учетом кратности) в m точках области D^+ и удовлетворяющие неравенствам:

$$|b(t) - d(t)r_1(t)|^2 < -\Delta(t) < |b(t) - d(t)r_2(t)|^2 \quad \text{при всех } t \in \Gamma. \quad (7)$$

Тогда частные индексы матрицы (4) по модулю не превосходят m .

Доказательство. За счет малого шевеления полюсов r_2 можно добиться, чтобы ни один из них не лежал на Γ , а неравенства (7) по-прежнему выполнялись. Используя факторизацию (3) и неравенства (7), находим:

$$|b - dr_1| < \left| b - d \frac{\alpha}{\gamma} \right| = \left| b - d \frac{\beta}{\delta} \right| < |b - dr_2|.$$

Отсюда вытекают соотношения для индексов Коши:

$$\text{Ind} \left(r_2 - \frac{\alpha}{\gamma} \right) = \text{Ind}(r_2 - r_1); \quad \text{Ind} \left(b - d \frac{\alpha}{\gamma} \right) = \text{Ind} \left(r_1 - \frac{\alpha}{\gamma} \right),$$

влекущие за собой неравенства

$$P\left(r_2 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \geq P(r_1) + P(r_2) - m; \quad P\left(r_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \geq 2N(\gamma) + k. \quad (8)$$

Символы N и P используются для указания соответственно числа нулей и полюсов функций в области D^+ .

Учитывая очевидные неравенства $P\left(r_i - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \geq P(r_i) - N(\gamma)$, $i=1, 2$, получим из (8) оценку $k \leq m^*$.

Следствие. Если r — мероморфная в D^+ функция, непрерывно продолжимая на Γ , причем $|b-dr|^2 + \Delta < 0$, то частные индексы матрицы (4) не превосходят по модулю числа полюсов r в D^+ .

Теорема 4. Частные индексы матрицы $G \in \tilde{\Omega}_2(\Gamma)$ устойчивы тогда и только тогда, когда существуют рациональные функции r_1 и r_2 , удовлетворяющие неравенствам (7) и такие, что

$$r_1(z) \neq r_2(z) \quad \text{при} \quad z \in D^+. \quad (9)$$

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 3. Для доказательства необходимости можно воспользоваться тем, что при $k=0$ и $d>0$ условию теоремы удовлетворяют функции $r_1=p_1/q_1$ и $r_2=p_2/q_2$, где p_1, q_1, p_2 и q_2 — многочлены, близкие соответственно к $(\alpha+\beta)/2$, $(\gamma+\delta)/2$, $(\beta-\alpha)/2$ и $(\delta-\gamma)/2$ в смысле равномерного приближения на $D^+ \cup \Gamma$. При $d < 0$ следует поменять ролями r_1 и r_2 .

3. Применим доказанные теоремы к исследованию следующей краевой задачи:

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \quad (10)$$

где $a, b, c \in H_\mu(\Gamma)$, a не обращается в нуль на Γ .

Задача (10) при условии $\varphi^-(\infty) = 0$ равносильна краевой задаче Римана с матрицей

$$\frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} |b(t)|^2 - |a(t)|^2 & tb(t) \\ \overline{tb(t)} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a(t)} G_1(t) \quad (11)$$

и называется устойчивой, если частные индексы матрицы (11) устойчивы⁽³⁾. Из теоремы 4 вытекает следующий критерий устойчивости задачи (10):

Теорема 5. Задача (10) устойчива тогда и только тогда, когда существуют рациональные функции r_1 и r_2 , удовлетворяющие условию (9) и такие, что

$$|tb(t) - r_1(t)| < |a(t)| < |tb(t) - r_2(t)| \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad t \in \Gamma. \quad (12)$$

Обозначим через κ индекс Коши функции $a(t)$; частные индексы матрицы-функции $G_1(t)$ через $\pm k$, число линейно независимых решений однородной задачи (10) через l , а число условий разрешимости неоднородной — через p .

Теорема 6. Если существуют рациональные функции r_1 и r_2 , не имеющие общих полюсов в D^+ , удовлетворяющие неравенствам (12) и совпадающие не более чем в $|\kappa|$ точках области D^+ , то числа l и p задачи (10) устойчивы.

Доказательство. По теореме 3, $k \leq |\kappa|$. Но тогда числа $\kappa+k$ и $\kappa-k$ одного знака. Следовательно, $l = \max(0, 2\kappa)$; $p = \max(0, -2\kappa)$, а это и означает устойчивость l и p ⁽⁶⁾.

* Доказательство теоремы можно провести иным путем, используя результаты одного из авторов⁽⁴⁾ об изменении частных индексов при умножении на рациональную матрицу-функцию.

Заметим, что если число совпадений функций r_1 и r_2 в области D^+ превышает $|x|$, то теорема 3 позволяет получить оценки для чисел l и p .

Авторы выражают глубокую благодарность Г. С. Литвинчуку за руководство работой.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
28 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. Л. Шмудьян, УМН, т. 9, в. 4, 243 (1954). ² Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. ³ Ю. Л. Шмудьян, УМН, т. 8, в. 2, 143 (1953). ⁴ А. М. Николайчук, Укр. матем. журн., т. 23, № 6, 793 (1971). ⁵ Г. С. Литвинчук, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 12, 47 (1967). ⁶ Б. В. Боярский, В сборн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, 1961, стр. 57.