

Б. И. ПЛОТКИН, Ц. Е. ДИДИДЗЕ, Е. М. КУБЛАНОВА

О МНОГООБРАЗИЯХ АВТОМАТОВ

(Представлено академиком И. Н. Векун 22 X 1974)

1. Основным объектом в этой статье являются полугрупповые автоматы. Под этим понимается трехосновная алгебраическая система $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, Y)$, в которой A — множество состояний, Γ — полугруппа входных сигналов и Y — множество выходных сигналов. Кроме того определено действие \circ полугруппы Γ на множестве A и определено также внешнее действие $*$: $a * \gamma \in Y$ при любых $a \in A$ и $\gamma \in \Gamma$. Операции \circ и $*$ удовлетворяют тождествам: $a \circ \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$ и $a * \gamma_1 \gamma_2 = (a * \gamma_1) * \gamma_2$. Обычные конструкции, определяемые для многоосновных алгебраических систем (ср. ⁽¹⁻³⁾), применяются и для полугрупповых автоматов. В частности, гомоморфизмы полугрупповых автоматов меняют все три основных множества. Каждому автомату Мили известным приемом ⁽⁴⁾ сопоставляется полугрупповой автомат со свободной полугруппой входных сигналов. Такое сопоставление есть функтор из категории автоматов Мили в категорию полугрупповых автоматов. Автоматам Мура сопоставляются полугрупповые автоматы Мура. При этом полугрупповой автомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, Y)$ называется автоматом Мура, если Γ обладает единицей и эта единица действует в A как единичное преобразование.

Многообразия полугрупповых автоматов — это, как обычно, классы полугрупповых автоматов, характеризуемые тождествами. Согласно инвариантной характеристике Биркгофа, это также классы, замкнутые относительно декартовых произведений, гомоморфизмов и относительно взятия подавтоматов. Теорема Биркгофа утверждает также, что многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с вполне характеристическими конгруэнциями подходящих свободных объектов.

Интерес к многообразиям алгебраических систем оправдан многими известными соображениями. В случае автоматов сюда можно добавить еще возможности практических приложений. Классификация автоматов по признаку тождеств, которые в них выполняются, может, по-видимому, представлять и практический интерес. То же самое можно сказать и о представлении автоматов в качестве гомоморфных образцов свободных автоматов различных многообразий. Наконец, вербальные конгруэнции, вероятно, могут быть использованы в задачах декомпозиции.

В настоящей работе многообразия полугрупповых автоматов будут охарактеризованы в достаточно привычных для полугрупп преобразований терминах. Одновременно рассматриваются многообразия полигонов и многообразия акций. Полигон — это одноосновная система, состоящая из множества A , на котором действует полугруппа Γ . Акция — это двусосновная система (A, Γ) , состоящая из полугруппы Γ и Γ -полигона A . В категории Γ -полигонов меняется только A , а в категории акций переменны и A и Γ . Понятно, что полигоны и акции тесно связаны с автоматами. Связаны также и доказательства теорем о многообразиях в этих разных категориях.

2. Рассмотрим сейчас многообразия полигонов для некоторой фиксированной полугруппы Γ . Наряду с Γ будем еще рассматривать моноид Γ^* , получающийся внешним присоединением к Γ единицы. Каждый Γ -полигон A будем одновременно рассматривать и как Γ^* -полигон: единица из Γ^* действует в A тривиально. Пусть, далее, ρ — бинарное отношение и U — подмножество в Γ . Сопоставим паре (ρ, U) класс Γ -полигонов \mathfrak{X} , определяемый тождествами вида $z \circ \gamma_1 \equiv z \circ \gamma_2$ с $\gamma_1 \rho \gamma_2$ и $z_1 \circ \gamma \equiv z_2 \circ \gamma$ по всем $\gamma \in U$. Здесь z, z_1 и z_2 — переменные, пробегающие полигон. Понятно, что \mathfrak{X} есть многообразие Γ -полигонов.

Пусть, с другой стороны, \mathfrak{X} — некоторый класс Γ -полигонов.

Ядро этого \mathfrak{X} в Γ^* есть бинарное отношение ρ , определяемое правилом: $\gamma_1 \rho \gamma_2$, если во всех полигонах из \mathfrak{X} выполняется тождество $z^\circ \gamma_1 \equiv z^\circ \gamma_2$. Такое ядро является конгруэнцией в Γ^* и совпадает с пересечением ядер представлений моноида Γ^* , отвечающих всем полигонам из \mathfrak{X} . Кроме того определим аннулятор класса \mathfrak{X} в Γ^* . Аннулятор есть множество U элементов из Γ^* ; $\gamma \in U$, если во всех полигонах из \mathfrak{X} выполняется тождество $z_1^\circ \gamma \equiv z_2^\circ \gamma$. Этот аннулятор есть двусторонний идеал в Γ^* , совпадающий с пересечением аннуляторов всевозможных полигонов из \mathfrak{X} . Отметим еще, что ρ и U связаны здесь следующими двумя условиями:

- 1) U есть объединение некоторых смежных классов конгруэнции ρ .
- 2) Каждый смежный класс конгруэнции ρ , принадлежащий U , есть левый идеал в Γ^* .

Если идеал U и конгруэнция ρ некоторой полугруппы удовлетворяют указанным двум условиям, то скажем, что они составляют согласованную пару (ρ, U) .

Теорема 1. *Многообразия Γ -полигонов находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами (ρ, U) из идеала и конгруэнции моноида Γ^* .*

Соответствие это устанавливается по отмеченным только что правилам.

Доказательство теоремы 1 опирается на теорему Биркгофа и еще на замечания, которые сейчас приведем.

Пусть A — свободный Γ -полигон над некоторым множеством Z , содержащим не менее двух элементов, и пусть (ρ, U) — согласованная пара в Γ^* . Сопоставим этой паре бинарное отношение η в A , определяемое правилом: $a \eta a'$, если в представлении $a = z_1^\circ \gamma_1$ и $a' = z_2^\circ \gamma_2$ выполняется $z_1 = z_2$ и $\gamma_1 \rho \gamma_2$ или $z_1 \neq z_2$, $\gamma_1 \rho \gamma_2$ и оба элемента γ_1 и γ_2 принадлежат U .

Предложение 1. *Отношение η есть вполне характеристическая конгруэнция в A , и каждая вполне характеристическая конгруэнция свободного полигона A может быть так получена.*

Условимся теперь многообразия Γ -полигонов \mathfrak{X} называть специальным многообразием, если это \mathfrak{X} замкнуто относительно взятия свободных объединений полигонов. Легко понять, что для такого \mathfrak{X} в соответствующей паре (ρ, U) множество U должно быть пустым. Это дает следующее

Предложение 2. *Специальные многообразия Γ -полигонов находятся во взаимно однозначном соответствии с конгруэнциями моноида Γ^* .*

Отдельно отметим еще случай, когда Γ — группа и речь идет о групповых полигонах. В этом случае все нетривиальные многообразия специальные и они находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными делителями группы Γ . Кроме того, легко проверяется следующее замечание.

Пусть многообразию групповых Γ -полигонов \mathfrak{X} отвечает нормальный делитель Σ в Γ и пусть A — произвольный Γ -полигон. Тогда разбиение A на Σ -орбиты есть вербальная конгруэнция в A по многообразию \mathfrak{X} .

3. Здесь мы рассмотрим многообразия в категории автоматов с фиксированной полугруппой входных сигналов Γ . С этой целью будем рассматривать кортежи $(\rho, U; \tau, V)$. Здесь U и ρ — согласованные идеал и конгруэнция в Γ^* , V и τ — левый идеал и левая конгруэнция в Γ , согласованные в том же смысле, что и U и ρ , и, кроме того, предполагаем, что выполнены следующие условия:

- 1) Если $\gamma_2 \rho \gamma_1$, то при любом $\gamma \in \Gamma$ выполняется $(\gamma_1 \gamma) \tau (\gamma_2 \gamma)$.
- 2) Если $\sigma \in U$, то при любом $\gamma \in \Gamma$ имеем $\sigma \gamma \in V$.

Такие кортежи условимся называть согласованными кортежами полугруппы Γ . Будем еще говорить, что \mathfrak{X} — правильное многообразие Γ -автоматов, если среди его тождеств нет тождества $y_1 \equiv y_2$.

Теорема 2. *Все правильные многообразия Γ -автоматов взаимно однозначно связаны с согласованными кортежами полугруппы Γ .*

Соответствие это устанавливается следующим образом. Пусть \mathfrak{X} — класс

Γ -автоматов. Имея в виду, что каждый Γ -автомат является одновременно и Γ -полигоном, классу \mathfrak{X} сопоставляем его ядро ρ и аннулятор U в Γ^* . Кроме того определяем внешнее ядро τ и внешний аннулятор V в Γ по правилу: $\gamma_1 \tau \gamma_2$, если во всех автоматах из \mathfrak{X} выполняются тождества $z^* \gamma_1 \equiv z^* \gamma_2$, и $\gamma \in V$, если в \mathfrak{X} имеем $z_1^* \gamma \equiv z_2^* \gamma$. Проверяется, что здесь возникает согласованный кортеж $(\rho, U; \tau, V)$. Многообразие \mathfrak{X} , определяемое таким кортежем, задается тождествами:

- 1) $z^* \gamma_1 \equiv z^* \gamma_2$, если $\gamma_1 \rho \gamma_2$;
- 2) $z_1^* \gamma \equiv z_2^* \gamma$ при $\gamma \in U$;
- 3) $z^* \gamma_1 \equiv z^* \gamma_2$, если $\gamma_1 \tau \gamma_2$;
- 4) $z_1^* \gamma \equiv z_2^* \gamma$ для $\gamma \in V$.

Доказательство теоремы 2 использует двусосновную теорему Биркгофа, в также описание соответствующих вполне характеристических конгруэнций свободных Γ -автоматов через согласованные кортежи. Это описание аналогично тому, что приводится в предложении 1.

4. Перейдем теперь к многообразиям акций. Пусть (A, F) — свободная акция над парой множеств (Z, X) . Здесь $F = F(X)$ — свободная полугруппа, порожденная множеством X , и A — свободный F -полигон над Z . Многообразия акций находятся во взаимно однозначном соответствии с вполне характеристическими конгруэнциями в (A, F) при счетных Z и X .

Пусть, далее η — вполне характеристическая конгруэнция свободного F -полигона A , и пусть η в соответствии с предложением 1 определяется согласованной парой (ρ, U) в F^* .

Предложение 3. Отношение η тогда и только тогда инвариантно относительно всех эндоморфизмов акции (A, F) , когда U и ρ выдерживают все эндоморфизмы полугруппы F .

Многообразие акций \mathfrak{X} условимся называть насыщенным многообразием, если для любого эпиморфизма $(B, \Gamma) \rightarrow (B, \Sigma)$, тождественного на B , из того, что правый член лежит в \mathfrak{X} , следует, что и левый принадлежит \mathfrak{X} . Нетрудно понять, что такие \mathfrak{X} характеризуются конгруэнциями η отмеченного в предложении 3 типа. Применяя это предложение, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть F — свободная полугруппа счетного ранга. Насыщенные многообразия акций находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами (ρ, U) в F^ , выдерживающими все эндоморфизмы полугруппы F .*

Теорема 4. Произвольному многообразию акций \mathfrak{X} однозначно отвечают насыщенное многообразие \mathfrak{Y} и многообразие полугрупп Θ , такие, что $(B, \Gamma) \in \mathfrak{X}$ равносильно тому, что $(B, \Gamma) \in \mathfrak{Y}$ и $\Gamma \in \Theta$.

При этом многообразия акций задаются уже битожествами с переменными, пробегающими B и Γ .

Приведем, далее, некоторые замечания о многообразиях моноидных акций — акций (A, Γ) , в которых Γ — моноид и единица из Γ действует в A тривиально.

Теорема 5. Все невырожденные насыщенные многообразия моноидных акций находятся во взаимно однозначном соответствии с многообразиями моноидов.

Опишем это соответствие. Если (A, Γ) — некоторая акция, то через $(A, \bar{\Gamma})$ обозначим соответствующую точную акцию. Пусть теперь θ — некоторое многообразие моноидов. Через $\mathfrak{X} = \omega \theta$ обозначим класс акций (A, Γ) , для которых $\bar{\Gamma} \in \theta$. Легко понять, что \mathfrak{X} — насыщенное многообразие и оно невырождено в том смысле, что в акциях (A, Γ) из \mathfrak{X} множество A может иметь более одного элемента. Пусть, с другой стороны, \mathfrak{X} — такое многообразие акций. Через $\theta = \omega^{-1} \mathfrak{X}$ обозначается класс моноидов, допускающих точное представление в \mathfrak{X} : $\Gamma \in \theta$, если существует точная акция (A, Γ) , принадлежащая \mathfrak{X} . Можно показать, что $\theta = \omega^{-1} \mathfrak{X}$ всегда многообразие моноидов и что отображения ω и ω^{-1} взаимно обратны. Это приводит к теореме 5.

5. В этом пункте речь идет о многообразиях полугрупповых автоматов с переменной полугруппой входных сигналов. Если (Z, X, Y_1) — тройка множеств, то свободный полугрупповой автомат $\mathfrak{A} = (A, F, Y)$, определяемый этой тройкой, реализуется следующим образом. Акция (A, F) есть свободная акция над парой множеств (Z, X) . Пусть, далее, Y_2 есть множество формальных выражений вида z^*u , $z \in Z$ и $u \in F$. В качестве Y берем свободное объединение множеств Y_1 и Y_2 . Операция $*$ определяется правилом: если $a \in A$, $a = z^*v$, и $u \in F$, то $a^*u = z^*vu$. Для описания многообразий автоматов нужно знать строение вполне характеристических конгруэнций в свободном автомате \mathfrak{A} со счетными Z , X и Y_1 . Эти конгруэнции могут быть построены через согласованные вполне характеристические кортежи $(\rho, U; \tau, V)$ полугруппы F .

Как и для акций, многообразие автоматов \mathfrak{X} назовем насыщенным многообразием, если для каждого эпиморфизма $(B, \Gamma, Y) \rightarrow (B, \Sigma, Y)$, тождественного на B и Y , из того, что правый член принадлежит \mathfrak{X} , следует, что и левый также содержится в \mathfrak{X} . Кроме того, как и раньше, выделяем правильные многообразия.

Теорема 6. *Все правильные насыщенные многообразия полугрупповых автоматов взаимно однозначно характеризуются согласованными вполне характеристическими кортежами типа $(\rho, U; \tau, V)$ в свободной полугруппе F счетного ранга.*

Если \mathfrak{X} — такое многообразие и \mathfrak{X} определяется кортежем $(\rho, U; \tau, V)$, то \mathfrak{X} задается битожествами:

- 1) $z^*u(x_1, \dots, x_n) \equiv z^*v(x_1, \dots, x_n)$ при $u \rho v$;
- 2) $z_1^*u(x_1, \dots, x_n) \equiv z_2^*u(x_1, \dots, x_n)$ для $u \in U$;
- 3) $z^*u(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv z^*v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с $u \tau v$;
- 4) $z_1^*u(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv z_2^*u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $u \in V$.

Теорема 7. *Произвольному многообразию полугрупповых автоматов \mathfrak{X} однозначно отвечают насыщенное многообразие автоматов \mathfrak{Y} и многообразие полугрупп θ такие, что включение $(B, \Gamma, Y) \in \mathfrak{X}$ равносильно включениям $(B, \Gamma, Y) \in \mathfrak{Y}$ и $\Gamma \in \theta$.*

Отдельно можно рассматривать многообразия полугрупповых автоматов Мура. Доказывается, что каждое такое насыщенное многообразие определяется парой (ρ, τ) , где ρ — конгруэнция и τ — левая конгруэнция в F^* , обе они вполне характеристичны и $\rho \in \tau$. Соответствующие U и V в нетривиальных случаях здесь пусты.

Наконец, можно говорить и о многообразиях групповых автоматов.

Здесь доказывается, что каждое такое многообразие \mathfrak{X} определяется тремя групповыми многообразиями θ_1, θ_2 и θ_3 с $\theta_1 \subset \theta_2 \subset \theta_3$. При этом включение $(A, \Gamma, Y) \in \mathfrak{X}$ означает, что $\Gamma \in \theta_3$, вербальная подгруппа $\theta_2^*(\Gamma)$ принадлежит ядру представления акции (A, Γ) и $\theta_1^*(\Gamma)$ содержится в соответствующем внешнем ядре: $a^*u = a^*e$ для любых $a \in A$ и $u \in \theta_1^*(\Gamma)$. e — единица в Γ (через $\theta^*(\Gamma)$ обозначается вербальная подгруппа в Γ по многообразию θ).

Вычислительный центр
Академии наук ГрузССР
Тбилиси

Поступило
22 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. J. Higgins, Math. Nachrichten, В. 27, № 1–2, 115 (1963). ² Б. И. Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966. ³ Ц. Е. Дидидзе, О гомоморфизмах автоматов, Тр. ВЦ АН ГрузССР, т. 12, № 1, 118 (1973). ⁴ В. М. Глушкова, УМН, т. 16, 5 (101), 3 (1961).