Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 539.379 — *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Э. И. ГОЛЬДЕНГЕРШЕЛЬ

О ПРИНЦИПЕ ПРЕДЕЛЬНОГО МОДУЛЯ ДЛЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 9 VII 1974)

Рассмотрим первую краевую задачу линейной вязко-упругости для однородной изотропной среды ([1], [4]).

$$\Delta u+((1-2\nu)I+V_\nu)^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div} u=-(\mu I-V_\mu)^{-1}K, \tag{1}$$

$$u=u(x, t);\quad K=K(x, t);\quad x\in\Omega,\quad t\in[0, \infty);$$

$$u|_{\partial\Omega}=0. \tag{1'}$$

Здесь Ω — конечная область, заполненная вязко-упругой средой с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ν — мгновенный коэффициент Пуассона вязко-упругой среды *, μ — мгновенный модуль сдвига той же среды, $u(x, t)$ — вектор смещений, $K(x, t)$ — вектор объемной силы, V_ν, V_μ — вязко-упругие операторы, действующие по t:

$$(V_\nu f)(t)=\int_0^t H_\nu(t, \tau)f(\tau)\,d\tau,\qquad 0\leqslant t<\infty;$$

$$(V_\mu f)(t)=\int_0^t H_\mu(t, \tau)f(\tau)\,d\tau,\qquad 0\leqslant t<\infty.$$

Будем предполагать, что

а) $\sup\limits_t\int_0^t |H_\nu(t, \tau)|\,d\tau<\infty$,

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_d H_\nu(t, \tau)\partial\tau$ для любого измеримого ограниченного множества $d\subset[0, \infty)$,

в) $LH_\nu=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t H_\nu(t, \tau)\,d\tau$ существует;

то же самое остается в силе при замене ν на μ.

Всюду в дальнейшем через $\sigma(X)$ будем обозначать спектр оператора X. Положим $\omega=(1-2\nu)^{-1}$.

Будем говорить, что краевая задача (1), (1′) асимптотически устойчива, если для каждого K из существования конечного по норме $\mathscr{L}^2(\Omega)$ предела $\lim\limits_{t\to\infty} K(x, t)=(LK)(x)$ следует существование конечного в том же смысле предела $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{u}(x, t)=(L\mathbf{u})(x)$.

Нас будет интересовать условие асимптотической устойчивости краевой задачи (1), (1′).

* Будем предполагать, что $\nu>0$.

Обозначим через $\mathscr{L}^2\Lambda$ пространство вектор-функций $f(t)$, $t\in[0, \infty)$, со значениями из $\mathscr{L}^2(\Omega)$, измеримых и почти всюду ограниченных на каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$, имеющих конечный предел (по норме $\mathscr{L}^2(\Omega)$) при $t\to\infty$ с нормой

$$\|f\|=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t<\infty}|f(t)|_{\mathscr{L}^2},$$

где $|\cdot|_{\mathscr{L}^2}$ обозначает норму в $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Асимптотическая устойчивость (1), (1′) означает, что для каждого $K(x, t)\in\mathscr{L}^2\Lambda$ решение $u(x, t)$ также принадлежит этому пространству.

Операторы V_ν и V_μ будем рассматривать в пространстве $\Lambda_{\langle 1\rangle}(0, \infty)$ [6]. Будем предполагать, что

$$\mu\notin\sigma(V_\mu),\quad -1/\omega\notin\sigma(V_\nu),\quad -{}^1/_2-1/\omega\notin\sigma(V_\nu),\quad K(x, t)\in\mathscr{L}^2\Lambda.$$

Краевую задачу (1), (1′) перепишем следующим образом:

$$\left(I+\left(\frac{1}{\omega}I+V_\nu\right)^{-1}B\right)\mathbf{u}=(\mu I-V_\mu)^{-1}A^{-1}K,\tag{2}$$

где через A обозначен оператор $-\Delta$ при краевом условии (1′),

$$B=-A^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div},$$

и оба эти оператора рассматриваются в пространстве $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Спектр Коссера упругой задачи [4], соответствующей (1), (1′), связан с $\sigma(B)$ соотношением

$$\xi=-1/b,\quad b\in\sigma(B).$$

Теорема. 1) *Для асимптотической устойчивости краевой задачи* (1), (1′) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\omega\neq\frac{\xi}{1-\xi v},$$

где v — пробегает спектр оператора V_ν в $\Lambda_{\langle 1\rangle}(0, \infty)$, а ξ — спектр Коссера упругой задачи, соответствующей (1), (1′).

2) *При соблюдении этого условия $(L\mathbf{u})(x)$ является решением упругой задачи, получающейся из* (1), (1′) *заменой $\mathbf{u}(x, t)$ на $(L\mathbf{u})(x)$, $K(x, t)$ — на $(LK)(x)$, вольтерровых операторов V_ν и V_μ — операторами умножения на константы LH_ν и LH_μ соответственно.*

При доказательстве теоремы используется следующая

Лемма. *Если λ является регулярной точкой оператора V,*

$$(Vf)(t)=\int_0^t H(t, \tau)f(\tau)\,d\tau$$

в $\Lambda_{\langle 1\rangle}(0, \infty)$, то

$$\left(\lim_{t\to\infty}\int_0^t H(t, \tau)\,d\tau-\lambda\right)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t\Gamma_{\lambda^{-1}}(t, \tau)\,d\tau,$$

где через $\Gamma_{\lambda^{-1}}(t, \tau)$ обозначено резольвентное ядро ядра H.

Доказательство теоремы. Положим

$$T(\omega)=(I+\omega V_\nu)^{-1}.$$

По теореме об отображении спектров [2] спектр $\sigma(T(\omega))$ есть множество точек t вида:

$$t=(1+\omega v)^{-1},\quad v\in\sigma(V_\nu).\tag{3}$$

Уравнение (2) можно переписать как

$$(I+\omega T(\omega)B)u=(\mu I-V_\mu)^{-1}A^{-1}K.\tag{4}$$

Для доказательства первого утверждения воспользуемся тем, что теорема умножения спектров из [3] переносится на оператор $T(\omega)B$, действующий в пространстве $\mathscr{L}^2\Lambda$. Согласно этой теореме (с учетом (3)),

$$\sigma(T(\omega)B)=\bigcup_{v\in\sigma(V_\nu)}\ \bigcup_{b\in\sigma(B)}\frac{b}{1+\omega v}.$$

Легко видеть, что первое утверждение теоремы можно переформулировать так:

Для асимптотической устойчивости краевой задачи (1)–(1′) *необходимо и достаточно, чтобы* $-1/\omega$ *было регулярной точкой оператора* $T(\omega)B$ *в* $\mathscr{L}^2\Lambda$.

Достаточность этого утверждения следует сразу же из (4).

Докажем необходимость. Пусть $-1/\omega\in\sigma(T(\omega)B)$. Тогда $-1/\omega=t_0b_0$, где $t_0\in\sigma(T(\omega))$, $b_0\in\sigma(B)$, $b_0\neq{}^1/_2$.

Обозначим через $g_{i_0}(x)$ собственную функцию оператора B, соответствующую собственному значению b_0 [4]. Через $h(t)$ обозначим такую функцию из $\Lambda_{\langle 1\rangle}(0,\infty)$, что [3]

$$((T(\omega)-t_0I)^{-1}h)(t)\notin\Lambda_{\langle 1\rangle}(0,\infty).$$

Положим

$$K=((\mu I-V_\mu)Ag_{i_0}h)(x,t).$$

Ясно, что $K\in\mathscr{L}^2\Lambda$ [2]. Соответствующее этому K решение $\mathbf{u}$ краевой задачи (1), (1′) имеет вид

$$\mathbf{u}(x,t)=((T(\omega)-t_0I)^{-1}h)(t)g_{i_0}(x).$$

Оно не принадлежит $\mathscr{L}^2\Lambda$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение доказывается переходом к пределу при $t\to\infty$ в уравнении (4). Чтобы осуществить этот переход, заметим, что

$$(\omega T(\omega)\mathbf{u})(x,t)=\omega\mathbf{u}(x,t)-\omega^2\int_0^t\Gamma_\omega^{(1)}(t,\tau)(\mathbf{u}(x,\tau)-(L\mathbf{u})(x))d\tau-$$

$$-\omega^2\left(\int_0^t\Gamma_\omega^{(1)}(t,\tau)d\tau\right)(L\mathbf{u})(x),$$

$$((\mu I-V_\mu)^{-1}K)(x,t)=\frac{1}{\mu}K(x,t)+\frac{1}{\mu^2}\int_0^t\Gamma_{\mu^{-1}}^{(2)}(t,\tau)(K(x,\tau)-(LK)(x))d\tau+$$

$$+\frac{1}{\mu^2}\left(\int_0^t\Gamma_{\mu^{-1}}^{(2)}(t,\tau)d\tau\right)(LK)(x),$$

где через $\Gamma_\omega^{(1)}(t,\tau)$ и $\Gamma_{\mu^{-1}}^{(2)}(t,\tau)$ обозначены резольвентные ядра ядер $H_\nu(t,\tau)$ и $H_\mu(t,\tau)$ соответственно.

Так как $-1/\omega$ и μ являются регулярными точками операторов V_ν и V_μ в $\Lambda_{\langle 1\rangle}(0,\infty)$ соответственно, то, согласно теореме 1 из [5], они регулярны и в $Z_{\langle 1\rangle}(0,\infty)$.

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}(\omega T(\omega)\mathbf{u})(x,t)=\left(\omega-\omega^2\lim_{t\to\infty}\int_0^t\Gamma_\omega^{(1)}(t,\tau)d\tau\right)(L\mathbf{u})(x),$$

$$\lim_{t\to\infty}((\mu I - V_\mu)^{-1}K)(x,t) = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \Gamma_{\mu^{-1}}^{(2)}(t,\tau)\,d\tau\right)(LK)(x).$$

Воспользовавшись леммой, получаем

$$\omega - \omega^2 \lim_{t\to\infty}\int_0^t \Gamma_\omega^{(1)}(t,\tau)\,d\tau = \omega(1+\omega LH_\nu)^{-1},$$

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \Gamma_{\mu^{-1}}^{(2)}(t,\tau)\,d\tau = (\mu - LH_\mu)^{-1}.$$

Поэтому при переходе к пределу при $t\to\infty$ уравнение (4) приобретает следующий вид:

$$(I+\omega(1+\omega LH_\nu)^{-1}B)(L\mathbf{u}) = (\mu - LH_\mu)^{-1}A^{-1}(LK). \tag{5}$$

Из (5) в сочетании с (2) вытекает второе утверждение теоремы.

Доказанная нами теорема дает обоснование широко применяемого в инженерных расчетах метода расчета на ползучесть по предельному модулю для первой краевой задачи линейной вязко-упругости.

Автор, пользуясь случаем, выражает сердечную признательность А. Я. Вакуленко за постановку задачи и акад. Ю. Н. Работнову за полезные дискуссии.

Институт горного дела
им. А. А. Скочинского
Люберцы Московской обл.

Поступило
9 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. Н. Работнов*, Ползучесть элементов конструкций, «Наука», (1966). [2] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*, Теория линейных операторов, т. 1, ИЛ, (1962). [3] *Э. И. Гольденгершель*, Матем. сборн., т. 64, № 1, 115 (1964). [4] *С. Г. Михлин*, УМН, т. 28, № 3, 43 (1973). [5] *Э. И. Гольденгершель*, ДАН, т. 217, № 4 (1974). [6] *Э. И. Гольденгершель*, ПММ, т. 38, № 1, 187 (1974).