Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 517.911

МАТЕМАТИКА

А. Д. ГОРБУНОВ, Э. И. КУЧЕРЕНКО

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 9 VII 1974)

Характерной особенностью сложившейся теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений является то, что в ней, как правило, изучаются достаточные условия существования единственного или по крайней мере одного решения той или иной из таких задач или обсуждаются следствия из таких условий [1]. В настоящей статье без претензии на общность постановки задач подчеркивается несколько иной подход. В ней для некоторого класса двухточечных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка приводятся критерии, позволяющие различать случаи, когда задача из названного класса не имеет решения, имеет единственное решение или же имеет по крайней мере два решения.

1. Для дифференциального уравнения

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ldots,\ y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где n — целое число, $n>0$, x — действительный аргумент, y — искомая действительная функция от x, f — действительная функция, заданная на топологическом произведении луча $a\leqslant x+\infty$ (a задано) на действительное линейное пространство R^n, с условиями

$$\begin{gathered} y(a)=\ldots=y^{(p)}(a)=0, \\ y(b)=\ldots=y^{(q)}(b)=0, \quad a<b, \end{gathered} \tag{2}$$

где p, q — целые числа, $p\geqslant 0$, $q\geqslant -1$, $p+q=n-2$ ($q=-1$ означает, что в точке b условий нет), требуется найти значения параметра b, для которых существуют решения задачи (1), (2) при $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$.

В статье при некоторой гладкости функции f формулируются критерии существования как по крайней мере одного, так и единственного решения краевой задачи (1), (2).

2. Пусть функция f измерима и ограничена на каждой компактной части пространства $[a,\ +\infty)\times R^n$. Тогда, согласно [2], задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$y=Ty, \tag{3}$$

где

$$Ty=\int_a^b \mathscr{G}(x,\xi)f(\xi,y(\xi),\ldots,y^{(n-1)}(\xi))\,d\xi,$$

Ty — оператор, распространенный на n раз дифференцируемые функции, определенные на $[a,\ b]$ и удовлетворяющие условиям (2); $\mathscr{G}(x,\ \xi)$ — функция Грина для уравнения $y^{(n)}=v(x)$ с условиями (2).

3. Обозначим через $L^{(n)}[a,\ b]$ пространство действительных функций $y(x)$, определенных на $[a,\ b]$, n раз дифференцируемых на нем и удовлетворяющих условиям (2), с нормой $\|y\|_1=\max\max|y^{(i)}(x)|$, $a\leqslant x\leqslant b$,

$0 \leqslant i < n$; $y \in L^{(n)}$. Пополнение пространства $(L^{(n)}, \|\cdot\|_1)$ обозначим через $\tilde{C}_n[a, b]$.

4. Пусть f такова, что T непрерывен. Продолжение T на все пространство $\tilde{C}_n$ по непрерывности обозначим через $\tilde{T}$.

Всякую неподвижную точку оператора T назовем классическим решением уравнения (3); всякую неподвижную точку оператора $\tilde{T}$, не принадлежащую $L^{(n)}$, назовем его обобщенным решением. Решением уравнения (3) (задачи (1), (2)) будем называть классическое его решение или обобщенное ([3]).

5. Обозначим через B множество допустимых значений b, через B_i — множество тех и только тех значений $b \in B$, для которых уравнение (3) имеет i решений, $n=0$, 1, а через B_2 — множество тех и только тех значений $b \in B$, для которых (3) имеет по крайней мере 2 решения. Множества B_0, B_1, B_2 подразбивают B на классы. Множество B_0 будем подразбивать на 2 подкласса B_0' и B_0'', относя к первому из них те и только те значения $b \in B_0$, для которых задача (1), (2) не имеет решений и при любом меньшем значении параметра, а ко второму — все остальные.

6. Введем в R^n норму $\|(y, \ldots, y^{(n-1)})\|_I = \max |y^{(i)}|$, $0 \leqslant i < n$. Предположим, что для каждого числа $r_k > 0$ из возрастающей расходящейся последовательности действительных чисел r_k, $k=1, 2, \ldots$, на цилиндре $[a, +\infty) \times \times [S_I(0, r_k)]$, где $[S_I(0, r_k)]$ — замкнутая сфера пространства $(R^n, \|\cdot\|_I)$ с центром в нуле и радиусом r_k, для f выполнены условия Липшица по $y, \ldots, y^{(n-1)}$

$$|f(x, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)})| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_k \|(y_1 - y_2, \ldots, y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)})\|_I, \quad \gamma_k \leqslant \gamma_{k+1}, \quad k=1, 2, \ldots \tag{4}$$

Тогда условия Липшица для T запишутся в виде

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_1 \leqslant \alpha_k(a, b) \|y_1 - y_2\|_1, \quad y_1, y_2 \in L^{(n)} \cap [S_1(0, r_k)], \tag{5}$$

где $S_1(0, r_k)$ — сфера пространства $\tilde{C}_n$ с центром в нуле и радиусом r_k и

$$\alpha_k(a, b) = \gamma_k \max \max \int_a^b \left| \frac{\partial^i \mathcal{G}(x, \xi)}{\partial x^i} \right| d\xi, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant i < n, \tag{6}$$

$$\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1}, \quad k=1, 2, \ldots$$

Из (5) следует, что T непрерывен. Следовательно, (5) выполняется и при $T := \tilde{T}$.

Возможно одно из двух: либо $\lim\limits_{k \to +\infty} \gamma_k < +\infty$, либо $\lim\limits_{k \to +\infty} \gamma_k = +\infty$.

7. Пусть $\lim\limits_{k \to +\infty} \gamma_k = \gamma < +\infty$. Тогда, согласно (6),

$$\lim_{k \to +\infty} \alpha_k(a, b) = \gamma \max_{a \leqslant x \leqslant b} \max_{0 \leqslant i < n} \int_a^b \left| \frac{\partial^i \mathcal{G}(x, \xi)}{\partial x^i} \right| d\xi = \alpha(a, b).$$

Отсюда вытекает существование такого наибольшего $b_0 < +\infty$, что для всех значений b из $a < b < b_0$ выполняется условие $\alpha(a, b) < 1$.

Теорема 1. *Если f удовлетворяет условию (4) при $\gamma_k := \gamma$ на $[a, +\infty) \times R^n$, то задача (1), (2) при $p = n-1$, $q = -1$ имеет единственное решение, определенное на $[a, b]$, $b \in B$.*

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то при $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ справедливы включения*

$$(a, b_0) \subseteq B_1, \qquad [b_0, +\infty) \subseteq B_0'' \cup B_1 \cup B_2.$$

8. Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{k\to+\infty}\gamma_k=+\infty$.

Теорема 3. *Если f удовлетворяет условиям (4), то существует единственное решение задачи (1), (2) при $p=n-1$, $q=-1$, определенное либо на некотором максимальном полуотрезке $[a, b_1)$, $a<b_1<+\infty$, либо на $[a, +\infty)$.*

9. Из (6) вытекает существование такого наибольшего числа $b_k<+\infty$, что для всех значений b из $a<b<b_k$ выполняется условие $\alpha_k(a, b)<1$.

Положим

$$\mathscr{G}_k=\sup\|(\mathscr{G}(x,\xi),\ldots,\mathscr{G}_x^{(n-1)}(x,\xi))\|_1,\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad a\leqslant\xi\leqslant b,$$

$$f_k=\sup\operatorname{vrai}|f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})|,$$

$$(x, y, \ldots, y^{(n-1)})\in[a, b_k][S_1(0, r_k)].$$

Теорема 4. *Если f удовлетворяет условиям (4) и*

$$\varliminf_{k\to+\infty}\frac{f_k\cdot\mathscr{G}_k\cdot(b_k-a)}{r_k}=\varkappa<1,$$

то при $p\geqslant0$, $q\geqslant0$ существует такое наименьшее значение $k=k_0$, что справедливы включения

$$(a,\ b_{k_0})\subseteqq B_1,\quad [b_{k_0},\ +\infty)\subseteqq B_0''\cup B_1\cup B_2.$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 (теоремы 4) подкласс B_0' пуст.*

Обозначим через $\bar{y}(x)$ решение уравнения (1), отвечающее начальным условиям

$$\bar{y}(a)=\ldots=\bar{y}^{(p)}(a)=0,\quad \bar{y}^{(p+1)}(a)=y_0,\ldots,\quad \bar{y}^{(n-1)}(a)=y_0^{(q)}. \tag{7}$$

Следствие 2. *Пусть $b\in B$. Для того чтобы в условиях теоремы 3 $b\in B_1\cup B_2$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$\bar{y}(b)=\ldots=\bar{y}^{(q)}(b)=0 \tag{8}$$

имела по крайней мере одно решение относительно $y_0, \ldots, y_0^{(q)}$.

Следствие 3. *Пусть $b\in B_1\cup B_2$. Для того чтобы в условиях теоремы 3 $b\in B_1$, необходимо и достаточно, чтобы система (8) имела единственное решение.*

10. Рассмотрим задачу (1), (2) при $p=n-2$, $q=0$. В этом случае начальные условия (7) принимают вид

$$\bar{y}(a)=\ldots=\bar{y}^{(n-2)}(a)=0,\quad \bar{y}^{(n-1)}(a)=z \tag{9}$$

и соответствующее решение записывается в виде $\bar{y}(x, z)$, причем система (8) сводится к одному уравнению относительно z

$$\bar{y}(b, z)=0,\quad b\in[a, +\infty).$$

Последнее же равносильно задаче о неподвижных точках оператора $A(z)=z+\bar{y}(b, z)$.

Пусть f такова, что решение $\bar{y}(x, z)$ задачи (1), (9) определено по x на $[a, +\infty)$ при всяком z и при всяком фиксированном x дважды непрерывно дифференцируемо по z, причем первая его производная по z имеет простые, а вторая — изолированные нули. Тогда оператор A будет локально сжимающим [3].

Теорема 5. *Если оператор A локально сжимающий и $b\in B$, то, для того чтобы $b\in B_1\cup B_2$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся по крайней мере один характеристический промежуток G для A, содержащий точку z_0, для которой существует действительное положительное число r_0 такое, что* *выполняются условия:*

а) $[z_0-r_0, z_0+r_0]\subset G$,

б) *справедливо неравенство* $|z_0-A_G(z_0)|\leqslant(1-\alpha_G)r_0$, *где* α_G — *коэффициент сжатия характеристического отображения* A_G (см. (3)).

Теорема 6. *Если оператор* A *локально сжимающий и* $b\in B_1\cup B_2$, *то, для того чтобы* $b\in B_2$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлась по крайней мере одна область* $G\setminus[z_0-r_0, z_0+r_0]$, *где* G — *характеристический промежуток для оператора* A, *удовлетворяющий условиям теоремы* 5, *содержащая* z_1, *для которой существует действительное положительное число* r_1 *такое, что выполняются условия:*

в) $[z_1-r_1, z_1+r_1]\subset G\setminus[z_0-r_0, z_0+r_0]$,

г) *выполняется неравенство* $|z_1-A_G(z_1)|\leqslant(1-\alpha_G)r_1$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Н. Ещуков, А. Н. Степанов, А. А. Волков*, Тр. Рязанск. радиотехнич. ин-та, в. 42 (1972). [2] *Э. И. Кучеренко*, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 3 (1970). [3] *А. Д. Горбунов*, ДАН, т. 215, № 6, 1285 (1974).