**Доклады Академии наук СССР**
**1975. Том 221, № 6**

УДК 517.946.51

*МАТЕМАТИКА*

С. А. ТЕРСЕНОВ

# О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

*(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 X 1974)*

Как известно, если квадратичная форма, соответствующая эллиптическому оператору $L(u)$ меняет знак в области, то первая краевая задача (см. ([1], [2])), для уравнения $u_t=L(u)$ с обычными условиями склеивания на линиях вырождения оператора $L(u)$ не является корректной. В работе ([3]) первая краевая задача рассматривалась для одного класса таких уравнений с несколько иными условиями склеивания. Эти условия зависят от младших коэффициентов. В настоящей заметке эта задача рассматривается для более широкого класса таких уравнений, где, в частности, существенно уточняется зависимость условий склеивания от младших коэффициентов. Задача в общем случае редуцируется к некоторому сингулярному интегральному уравнению специального вида.

1. Пусть $S$ – область в $E_n$ с гладкой границей $\sigma$. Определим в $E_{n+2}$ цилиндрические области $\Omega^\pm$: $\Omega^+=\{x\in S,\ y>0,\ 0<t<1\}$, $\Omega^-=\{x\in S,\ y<0,\ 0<t<1\}$. В области $\Omega^+\cup\Omega^-$ рассмотрим следующие уравнения:

$$\partial u/\partial t=(y\,\partial^2u/\partial y^2+\alpha\,\partial u/\partial y)\operatorname{sgn} y+L(u), \tag{1}$$

$$\partial u/\partial t=y\,\partial^2u/\partial y^2+\alpha\,\partial u/\partial y+L(u)\operatorname{sgn} y, \tag{2}$$

где $\alpha$ – постоянная,

$$L(u)\equiv a^{ij}(x)u_{x_ix_j}+b^i(x)u_{x_i}+c(x)u,$$

$L(u)$ – строго эллиптический оператор в $S$, $a^{ij}$, $b^i$, $c\in C^{(\lambda)}(\bar S)$ и зависят только от $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $c\leqslant 0$. Имеет место

Лемма 1. *Если $\alpha<1$ и ограниченное решение и уравнения (1) в $\Omega^+$ достигает положительного максимума в точке $P(x_0, 0, t_0)$, $t_0>0$, то*

$$\varlimsup_{(x,\,y,\,t)\to P} y^{1-\alpha}[u(x,y,t)-u(P)]<0. \tag{3}$$

*Если $0<\alpha<1$, то формула (3) имеет вид*

$$\varlimsup_{(x,\,y,\,t)\to P} y^{\alpha}u_y<0. \tag{4}$$

Лемма доказывается аналогично случаю, когда $L(u)$ – оператор Лапласа (см. ([3])). Для этого надо иметь в виду, что функция

$$v=y^{1-\alpha}\int_0^1\omega(x,y,\xi,t)\,\xi^{-1/2}(1-\xi)^{1/2-\alpha}\,d\xi \tag{5}$$

является решением уравнения (1), где $\omega$ – решение уравнения

$$\partial\omega/\partial t=y\,\partial^2\omega/\partial y^2+{}^1/_2\partial\omega/\partial y+L(\omega), \tag{6}$$

удовлетворяющее условию

$$y^{1/2}\omega y=0 \text{ при } y=0. \tag{7}$$

В (5) функцию $\omega$ можно подобрать так, чтобы в окрестности точки $P(x_0, 0, t_0)$ было $u-v\leqslant 0$ и $\omega(x_0, 0, t_0)>0$. Отсюда и утверждение леммы.

Рассмотрим функции

$$\Gamma_1(y,\eta,t)=t^{-1}(y\eta)^{(1-\alpha)/2}I_{\alpha-1}\left(\frac{2(y\eta)^{1/2}}{t}\right)e^{-(y+\eta)/t}\eta^{\alpha-1},$$

$$\Gamma_2(y,\eta,t)=t^{-1}(y\eta)^{(1-\alpha)/2}I_{1-\alpha}\left(\frac{2(y\eta)^{1/2}}{t}\right)e^{-(y+\eta)/t}\eta^{\alpha-1},$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Обозначим через $v(x, t, f, y)$ решение уравнения $v_t=L(v)$ в $S$, удовлетворяющее условию

$$v(x, 0, f, y)=f(x, y), \quad v=0 \text{ на } \sigma. \tag{8}$$

(переменная $y$ присутствует как параметр). Пусть

$$\sigma^+=\sigma x\ (0<y<\infty), \quad \sigma^-=\sigma x\ (-\infty<y<0).$$

Лемма 2. 1) *Если $\alpha\geqslant1$, то ограниченное в $\Omega^+$ решение уравнения* (1) *аналитично по $y$ вплоть до гиперплоскости $y=0$. 2) Пусть $\alpha=-n+\beta$, $n\geqslant0$ — целое число, $0<\beta<1$. Если $u$ — решение уравнения* (1) *в $\Omega^+$ и удовлетворяет условиям: $D_x^sD_y^ru\in C(\overline{\Omega}^+)$, $|s|\leqslant2$, $r\leqslant n$, а $D_y^{n+1}u$ ограничено в $\Omega^+$, то и аналитично по $y$ вплоть до гиперплоскости $y=0$.*

Утверждение 1) следует из того, что ограниченное решение уравнения (1) при $\alpha\geqslant1$ однозначно определяется по его значениям при $t=0$ ($x\in S$, $y>0$) и решение дается формулой

$$u(x,y,t)=\int_0^\infty \Gamma_1(y,\eta,t)v(x,t,f,\eta)\,d\eta. \tag{9}$$

Утверждение 2) следует из того, что $D_y^{n+1}u$ удовлетворяет условиям п. 1), значит, она будет аналитической по $y$, а аналитичность $u$ будет следовать из формулы Тейлора.

Теперь при помощи леммы 2 нетрудно видеть, что имеет место

Теорема. *Если $\alpha\geqslant1$, то существует единственное ограниченное в $\Omega$ решение и уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(x, y, 0)=f(x, y), \quad y\geqslant0, \quad u=0 \ \textit{на}\ \sigma^+. \tag{10}$$

Аналогичное утверждение имеет место и для решений уравнения (2).

Пусть теперь $\alpha=-n+\beta$, $0<\beta<1$, $n\geqslant0$ — целое число. Нетрудно видеть, что функции

$$u_1=\int_0^\infty \Gamma_2(y,\eta,t)v(x,t,f,\eta)\,d\eta; \tag{11}$$

$$u_2=\frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t e^{-y/(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha-2}v(x,t-\tau,\varphi,\tau)\,d\tau; \tag{12}$$

$$u_3=\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t e^{-y/(t-\tau)}(t-\tau)^{-\alpha}v(x,t-\tau,\varphi,\tau)\,d\tau \tag{13}$$

являются решениями уравнения (1) ($y>0$), удовлетворяющие соответственно условиям

$$u_1(x, y, 0)=f(x, y), \quad u_1(x, 0, t)=0; \tag{14}$$

$$u_2(x, y, 0)=0, \quad u_2(x, 0, t)=\varphi(x, t); \tag{15}$$

$$u_3(x, y, 0)=0, \quad y^\beta\partial^{n+1}u_3/\partial y^{n+1}|_{y=0}=\psi(x, t). \tag{16}$$

В операторе $v(x, t, \varphi, \tau)$ последний аргумент $\tau$ означает аргумент $\varphi(x, \tau)$.

Ограниченные в $\Omega^+$ решения задач (1), (14) и (1), (15) единственны в силу принципа максимума. Решение задачи (1), (16), имеющее в $\Omega^+\cup G$ ($G=S\times(0<t<1)$) непрерывные производные $D_x^sD_y^su$, $|s|\leqslant2$, $r\leqslant n$, также единственно. Это доказывается на основании леммы 2. Аналогичное доказательство единственности приводится ниже.

2. Рассматриваемые здесь задачи заключаются в следующем: найти ограниченные в $\Omega$ и непрерывные в $\Omega \cup G$ решения уравнений (1) и (2), имеющие в $\Omega^+ \cup G$ и $\Omega^- \cup G$ ограниченные непрерывные производные $D_x^s D_y^r u$, $D_t D_y^r u$, $|s| \leqslant 2$, $r \leqslant n$, и удовлетворяющие условиям:
в случае уравнения (1)

$$u(x,y,0)=f(x,y), \quad y^\beta \frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}}\bigg|_{y=+0} = (-1)^n (-y)^\beta \frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}}\bigg|_{y=-0}, \tag{17}$$
$$x \in S, \quad |y|<\infty, \quad 0<t<1;$$

в случае уравнения (2)

$$u(x,\ y,\ 1)=f_1(x,\ y), \quad y<0, \quad u(x,\ y,\ 0)=f_2(x,\ y),\ y>0.$$
$$y^\beta\, \partial^{n+1}u/\partial y^{n+1}|_{y=+0} = (-y)^\beta\, \partial^{n+1}u/\partial y^{n+1}|_{y=-0}, \tag{18}$$
$$x \in S, \quad 0<t<1,$$

$f$, $f_1$, $f_2$ — заданные достаточно гладкие функции.

Единственность. Рассмотрим однородную задачу, соответствующую (1), (17). Из уравнения (1) следует, что функции $v_1=(-1)^n \partial^n u/\partial y^n$, $y<0$, $v_2=\partial^n u/\partial y^n$, $y>0$, будут решениями уравнения (1) при $\alpha=\beta$ в областях $\Omega^-$ и $\Omega^+$ соответственно и $v_1=v_2$ на $G$. Кроме того

$$y^\beta\, \partial v_2/\partial y\,|_{y=+0} = (-y)^\beta\, \partial v_1/\partial y\,|_{y=-0}.$$

В силу леммы 1 и принципа максимума будем иметь $v_1=v_2\equiv 0$.

Таким же путем можно показать, что все производные по $y$ порядка меньше $n$ также равны нулю. Аналогичным путем доказывается единственность задачи (2), (18), если отсутствует оператор $L$, а в общем единственность задачи (2), (18) указанным путем доказывается в случае $n=0$. При помощи формул (11), (12) и (13) задачи (1), (17) и (2), (18) редуцируются к интегральному уравнению относительно функции $\nu = y^\beta\, \partial^{n+1}u/\partial y^{n+1}$ при $y=0$. В случае задачи (1), (17) оно имеет вид

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\, v(x, t-\tau, \nu, \tau)\, d\tau = \psi_1(x,t), \tag{19}$$

а в случае задачи (2), (18)

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\, \nu(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^1 (\tau-t)^{-\alpha}\, \nu(\tau)\, d\tau = \psi_2(t), \tag{20}$$

если $L\equiv 0$ в (2), и

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\, v(x, t-\tau, \nu, \tau)\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (\tau-t)^{-\alpha}\, v(x, \tau-t, \nu, \tau)\, d\tau = \psi_3(x,t), \tag{21}$$

если $L\neq 0$ и $0<\alpha<1$ в (2).

Уравнение (19) разрешается в явном виде и решение имеет вид

$$\nu(x,t) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} v(x, t-\tau, \psi_1, \tau)\, d\tau -$$

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t\, \partial \tau^n} v(x, t-\tau, \psi_1, \tau)\, d\tau. \tag{22}$$

Для получения (22) поступаем так: левая часть (19) есть значение решения задачи (1), (16) при $y=0$, когда $\varphi=\nu$. Потому в силу единственности решения задач (1), (15) и (1), (16), если в (12) положим $\varphi=\psi_1$ и возьмем операцию $y^\beta \partial^{n+1}/\partial y^{n+1}$, то при $y=0$ мы получим (22). Кроме того нужно иметь в виду следующее:

$$y^\beta \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}(y^{1-\alpha} t^{\alpha-2} e^{-y/t}) = (-1)^{n+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}(t^{\beta-1} e^{-y/t}),$$

$$v(x, t, v(x, \tau, \nu, \tau_1)) = v(x, t+\tau, \nu, \tau_1).$$

Уравнение (20), продифференцировав $n$ раз, сводим к исследованному случаю (см. ([4])). Применив к уравнению (21) указанный способ обращения для $\nu$, получим следующее сингулярное уравнение:

$$\nu(x, t) + \int_0^t \frac{K(x, t, \tau, \nu)}{\tau - t} d\tau = \psi_3(x, t), \quad (x, t) \in G, \tag{23}$$

где $\psi_3$ — известная функция, а

$$K(x, t, \tau, \nu) = \int_0^\zeta A(z, t, \tau) v\left(x, |t-\tau| \frac{1+z}{1-z}, \nu, \tau\right) dz,$$

$$A = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha) z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, & \tau < t, \\ \dfrac{\alpha z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{\tau}{t}, & t < \tau, \end{cases} \qquad \zeta = \min\left\{\frac{t}{\tau}, \frac{\tau}{t}\right\}.$$

Новосибирский государственный университет

Поступило 1 X 1974

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Eichera,* Atti Acad. naz. Lincei Mem. Cl. sci. fis. mat. natur., Ser. 1, 5, № 1 (1956). [2] *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич,* Итоги науки, Математический анализ, 1969. [3] *С. А. Терсенов,* Введение в теорию уравнений вырождающихся на границе, Ротапринт Новосиб. гос. унив., 1974. [4] *Ф. Трикоми,* Интегральные уравнения, М., 1960.