Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 532.5.001.5 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Е. С. ДЗЕКЦЕР

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 27 VI 1974)

Рассматриваются неустановившиеся движения подземных вод в пористых средах, у которых коэффициент фильтрации k меняется по высоте потока, т. е. $k=k(z)$.

Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в обобщенном виде ([1]) имеет вид

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \frac{\partial\varphi}{\partial x}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H \frac{\partial\varphi}{\partial y}dz\right]+\varepsilon_0+\varepsilon_a=\mu\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y, z, t)=-kh(x, y, z, t), \tag{2}$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости фильтрации, $h(x, y, z, t)$ — напор, ε_a и ε_0 — модули питания потока соответственно через его подошву и свободную поверхность, μ — коэффициент свободной пористости, $H(x, y, t)$ — напор на свободной поверхности, равный мощности потока подземных вод.

Подставляя в (1) выражение для потенциала скорости (2), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H k(z)\frac{\partial h}{\partial x}dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H k(z)\frac{\partial h}{\partial z}dz+\varepsilon_0+\varepsilon_a=\mu\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3}$$

Введем функцию

$$D=-\int_0^H k(z)(h-z)\,dz, \tag{4}$$

подобную функции Гиринского ([2], [3]), широко используемую в гидравлической теории движения подземных вод ([4], [5]) для слабо неоднородных по вертикали горных пород.

Предлагаемая функция (4) отличается тем, что под знаком интеграла вместо мощности грунтовых вод $H(x, y, t)$ стоит напор $h(x, y, z, t)$.

Произведя дифференцирование по параметру интеграла (4), будем иметь

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H k(z)\frac{\partial h}{\partial x}dz, \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H k(z)\frac{\partial h}{\partial y}dz. \tag{5}$$

Подставляя затем (5) в (3), получим

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=-\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)+\varepsilon_a+\varepsilon_0. \tag{6}$$

Определим далее производную $\partial D/\partial t$:

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-\int_0^H k(z)\frac{\partial h}{\partial t}dz. \tag{7}$$

Применяя интегрирование по частям, будем иметь

$$J=-\int_0^H k(z)\frac{\partial h}{\partial t}dz=-\left[\frac{\partial h}{\partial t}\left(\int_0^z k(z)dz\right)\Big|_0^H-\int_0^H\frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial z}\left(\int_0^z k(z)dz\right)dz\right]=$$

$$=-\left[\frac{\partial h}{\partial t}\left(\int_0^z k(z)dz\right)\Big|_0^H-\frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial z}\left(\int_0^z\int_0^z k(z)\,(dz)^2\right)\Big|_0^H+\right.$$

$$\left.+\int_0^H\frac{\partial^3 h}{\partial z^2\,\partial t}\left(\int_0^z\int_0^z k(z)\,(dz)^2\right)dz\right] \tag{8}$$

или

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-\sum(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)V^{n+1}\Big|_{z=H}, \tag{9}$$

где V — оператор интегрирования, $V=1$ при $n=0$, при $n=1$

$$V=\int_0^z k(z)\,dz,\quad V^n=\underbrace{\int_0^z\ldots\int_0^z}_{n}k(z)\,(dz)^n.$$

Для дальнейших исследований используется только два первых члена ($n=0,1$) ряда (9), т. е. производными третьего и высших порядков пренебрегаем.

Рассмотрим три наиболее часто встречающихся в инженерных расчетах случая:

а) однородный пласт, т. е. $k=\mathrm{const}$. В выражениях (5) функция k выносится за знак интеграла, а вместо (9) получим

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{z=H} \tag{10}$$

или для $n=0,1$

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-k\left[H\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{H^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial t}\right]. \tag{11}$$

Для определения производной $\partial h/\partial z$ используем кинематическое условие на свободной поверхности, т. е. при $z=H$

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=-k\frac{\partial h}{\partial z}\Big|_{z=H}+\varepsilon_0. \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по t и подставляя значение $\partial^2 H/\partial z\partial t$ в (11), будем иметь

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-kH\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\mu H^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Вводя затем значение $\partial H/\partial t$ из (6) в (13), для одномерной фильтрации получим

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{kH}{\mu}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{H^2}{2}\frac{\partial^3 D}{\partial x^2\,\partial t}-\frac{kH}{\mu}(\varepsilon_a+\varepsilon_0). \tag{14}$$

Если заменить функцию $H(x,t)$, стоящую перед производными и круглой скобкой, некоторой средней величиной $\overline{H}$, то вместо (14) запишем

$$\frac{\partial D}{\partial t}=a\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 D}{\partial x^2\,\partial t}-a(\varepsilon_0+\varepsilon_a), \tag{15}$$

где $a=k\overline{H}/\mu$ — коэффициент уровнепроводности, $b=\overline{H}^2/2$.

Если в (9) взять только член при $n=0$, то при $h=H$ вместо (15) получим уравнение Буссинеска как нулевое приближение.

Уравнение вида (15) уже встречалось в теории фильтрации при изучении движения жидкости в двухслойной среде ([6], [7]) и в трещиноватых породах ([8]).

Из уравнения (15) при соответствующих начальных и граничных условиях определяется функция $D(x, t)$, а затем из (6) находится функция $H(x, t)$, т. е.

$$H(x,t)=\frac{1}{\mu}\int_0^t \left(\varepsilon_a+\varepsilon_0-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)dx. \tag{16}$$

б) Пласт с линейной по вертикали проницаемостью

$$k(z)=k_0+\alpha z; \qquad V=\int_0^z (k_0+\alpha z)\,dz=k_0 z+0{,}5\alpha z^2, \tag{17}$$

где k_0 — коэффициент фильтрации в точке $z=0$, $\alpha=\mathrm{const}$.

Выражение (9) с учетом условия (12) запишем в виде

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-V\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\mu V^2}{k}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \tag{18}$$

Решая уравнение (18) совместно с (6), для случая одномерной фильтрации получим

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{V}{\mu}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{V}{k}\frac{\partial^3 D}{\partial t\,\partial x^2}-\frac{V}{\mu}(\varepsilon_a+\varepsilon_0). \tag{19}$$

Учитывая (17) вместо (19), в соответствии с (9) или (18) запишем

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-H\left(k_0+\frac{\alpha H}{2}\right)\frac{\partial H}{\partial t}-\mu\frac{3k_0+\alpha H}{3(k_0+\alpha H)}\frac{H^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Осреднив затем в произведении αH в (20) функцию $H(x, t)$, т. е. $H\approx\overline{H}=\mathrm{const}$, будем иметь

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-\overline{k}H\frac{\partial H}{\partial t}-\eta\frac{\mu H^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \tag{21}$$

где

$$\overline{k}=k_0+{}^1\!/_2\alpha\overline{H}, \qquad \eta={}^1\!/_3(3k_0+\alpha\overline{H})/(k_0+\alpha\overline{H}).$$

Затем, решая совместно уравнения (6) и (21), будем иметь

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\overline{a}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\overline{b}\frac{\partial^3 D}{\partial t\,\partial x^2}-\overline{a}(\varepsilon_a+\varepsilon_0), \tag{22}$$

где $\overline{a}=\overline{k}\overline{H}/\mu$, $\overline{b}=\eta\overline{H}^2/2$.

Определив из (22) $D(x, t)$, находим по (16) функцию $H(x, t)$.

в) Пласт состоит из двух горизонтальных слоев с коэффициентами фильтрации, не зависимыми от z.

Определение производной $\partial D/dt$ производится по зависимости (9), в которой принимается

$$V=\int_0^H k(z)\,dz=\int_0^m k_1\,dz+\int_m^H k_2\,dz, \tag{23}$$

где k_1 и k_2 — коэффициент фильтрации соответственно нижнего слоя мощностью m и верхнего слоя мощностью $H-m$.

Тогда выражение для указанной производной запишется как

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-[(k_1-k_2)m+k_2H]\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\mu}{2}[(k_1-k_2)m^2+k_2H^2]\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \tag{24}$$

Решая, как и раньше, совместно уравнения (6) и (24), при этом осредняя в произведениях k_2H и k_2H^2 функцию $H(x, t)$, т. е. $H \simeq \overline{H}=\text{const}$, получим

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\tilde{a}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\tilde{b}\frac{\partial^3 D}{\partial t\,\partial x^2}-\tilde{a}(\varepsilon_a+\varepsilon_0), \qquad (25)$$

где $\tilde{a}=[(k_1-k_2)m+k_2\overline{H}]/\mu$, $\tilde{b}=[(k_1-k_2)m^2+k_2\overline{H}^2]/2$.

Функция $H(x, t)$ определяется, как и выше, по зависимости (16).

Для случая осесимметричной фильтрации уравнение (15) при $\varepsilon_a=0$ и $\varepsilon_0=0$ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D}{\partial r}\right)+b\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D}{\partial r}\right)\right]. \qquad (26)$$

Определение положения свободной поверхности производится по формуле вида (16), а именно:

$$H(r,t)=-\int_0^t \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D}{\partial r}\right)dt. \qquad (27)$$

Таким образом, использование предложенной функции $D(x, y, t)$ или $D(r, t)$ позволяет получить для потоков подземных вод со свободной поверхностью уравнение, в котором учтено изменение напора по вертикали. Между тем в гидравлической теории, например Буссинеска и Форхгеймера, это не учитывается. Численный расчет показал ([8]), что при возрастании at/b решения уравнений (15) и (23) приближаются к решениям уравнений типа теплопроводности и при $at/b \geqslant 10-15$ с достаточной степенью точности смешанной производной в указанных уравнениях можно пренебречь.

Автор выражает благодарность Н. Н. Веригину за полезное обсуждение полученных результатов.

Производственный
и научно-исследовательский институт
по инженерным изысканиям в строительстве
Москва

Поступило
18 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. С. Дзекцер*, ДАН, т. 202, № 5 (1972). [2] *Н. К. Гиринский*, ДАН, т. 51, № 5 (1946). [3] *Н. К. Гиринский*, Тр. Всесоюзн. н.-и. инст. гидрогеол. и инж. геол., № 9 (1947). [4] *П. Я. Полубаринова-Кочина*, Теория движения грунтовых вод, М., 1952. [5] *В. И. Аравин, С. Н. Нумеров*, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, М., 1953. [6] *Н. Н. Веригин, В. М. Шестаков*, Методы расчета движения грунтовых вод в двухслойной среде, М., 1954. [7] *В. М. Шестаков*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, (1963). [8] *Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина*, ПММ, т. 24, в. 5 (1960).