Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 5

УДК 534.213 *ФИЗИКА*

И. А. ВИКТОРОВ

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком Л. М. Бреховских 23 VIII 1974)

Упругие волны в твердом образце с магнитным полем в настоящее время используются для изучения состояния твердого тела, в частности, явления сверхпроводимости [1]. В работе [2] указано на принципиальную возможность определения поверхностных электронных состояний металла в магнитном поле с помощью гиперзвуковых поверхностных волн. Наконец, распространение упругих волн в магнитном поле интересно для дефектоскопии металлов в магнитных полях. Распространение объемных волн в твердом теле с учетом магнитного поля довольно подробно изучено [1]. Поверхностные рэлеевские волны для частного случая однокомпонентного поля рассматривались в [3], а для двухкомпонентного магнитного поля — в работе [4]. Однако из-за неточности окончательных уравнений движения результаты [4] представляются нам некорректными.

Целью настоящей статьи является рассмотрение задачи о распространении волн в полупространстве с магнитным полем в более общем виде, когда тип волн не ограничивается рэлеевской, а магнитное поле двухкомпонентное (как будет показано ниже, именно такое поле существенно меняет структуру волн).

Итак, рассмотрим распространение упругих волн в идеально проводящем твердом полупространстве $z<0$ с постоянным магнитным полем $\mathbf{H}_0$ (рис. 1). Упругие волны в таком полупространстве сопровождаются переменным электрическим и магнитным полями и токами. При этом должны быть выполнены уравнения упругости и система уравнений Максвелла с учетом движения элементов объема проводящего полупространства в магнитном поле [5]. В магнитогидродинамическом приближении все эти уравнения сводятся к следующему [1, 3, 4]:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{U}+\mu\Delta\mathbf{U}-\rho\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}+\frac{\mu_м}{4\pi}[\mathrm{rot\,rot}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}_0]]\times\mathbf{H}_0=0; \qquad (1)$$

здесь $\mathbf{U}$ — вектор смещения в волне, ρ — плоскость, λ, μ — параметры Ламе, $\mu_м$ — магнитная проницаемость.

Это приближение справедливо при $\omega\tau\ll1$, $\omega_c\tau\ll1$, $l/\lambda\ll1$ (ω — частота, ω_c — циклотронная частота, τ — время релаксации, l — длина свободного пробега электронов, λ — длина упругой волны), что хорошо выполняется вплоть до частот $\sim10^9$ гц. Ограничение по частоте возникает из пренебрежения влиянием электропроводности σ и сводится к условию $(\omega/\sigma)(c_{св}^2/c^2)\ll1$, где $c_{св}$, c — скорости света и звука соответственно. Для металлов при комнатных температурах это означает $\omega/(2\pi)\leqslant10^6$ гц.

Граничными условиями задачи являются равенства нулю компонент полного тензора напряжений [5].

$$\sigma_{ik}^{пол}=\sigma_{ik}+\frac{\mu_м}{4\pi}H_iH_k-\frac{\mu_м}{8\pi}\mathbf{H}^2\delta_{ik}$$

на деформированной поверхности $z=U_z(x, y, t)$ полупространства ($\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{h}$ — суммарное магнитное поле с учетом поля волны $\mathbf{h}$). Деформация поверхности существенна, поскольку магнитное давление дает из-за нее вклад в $\sigma_{ik}^{\text{пол}}$, пропорциональный первой степени деформации. Уравнение (1) и граничные условия дают решение задачи в терминах U_i. Зная U_i, можно из упомянутой выше полной системы уравнений найти электрическое и магнитное поля и токи в полупространстве. Можно показать, что эти поля и токи единственным образом «сшиваются» с соответствующими величинами в вакууме ($z>0$) и, таким образом, все механические и электрические величины могут быть однозначно определены. Из уравнения (1) и граничных условий видно, что магнитное поле создает в полупространстве анизотропию, которая, как можно убедиться, отлична от анизотропии кристаллов и к ней не сводится.

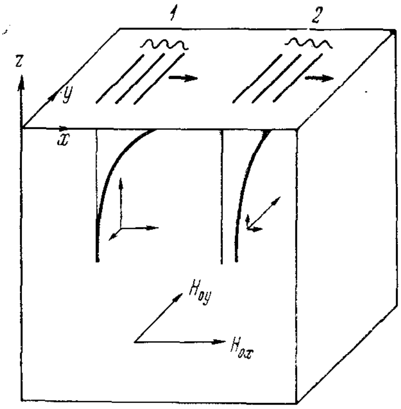

Рис. 1

Будем искать решение уравнения (1) в форме, соответствующей плоским гармоническим волнам, распространяющимся в полупространстве в направлении оси x:

$$U_{x,y,z}=\frac{A,B,C}{k}e^{\beta kz+i(kx-\omega t)}; \qquad (2)$$

здесь k — неизвестное пока волновое число, $\beta(k)$ — функция k, A, B, C — произвольные постоянные.

Подставляя выражения (2) в уравнение (1), получим после разделения компонент векторов систему трех линейных однородных уравнений относительно A, B, C. Приравнивание нулю определителя этой системы приводит к следующему уравнению для $\beta(k)$:

$$(f-h_x)[f^2+(\beta^2-1)(m_{x,y}f-mh_x)]=0, \qquad (3)$$

где

$$f(\beta)=k_t^2/k^2+\beta^2-1, \quad m=k_t^2/k_l^2-1, \quad m_{x,y}=m+h_x+h_y;$$

$$h_x=\frac{\mu_{\text{м}}H_{0x}^2}{4\pi\mu}, \quad h_y=\frac{\mu_{\text{м}}H_{0y}^2}{4\pi\mu};$$

это безразмерные параметры, характеризующие интенсивность магнитного поля, $k_{l,t}$ — волновые числа продольных и поперечных волн при $\mathbf{H}_0=0$.

Уравнение (3) является бикубическим относительно $\beta(k)$. Из него можно найти 3 функции $\beta_{1,2,3}(k)$, соответствующие волнам, затухающим при удалении от границы $z=0$. Назовем β_3 функцию, обращающую в нуль первую скобку в (3), а $\beta_{1,2}$ — остальные две функции, переходящие при $\mathbf{H}_0=0$ в $\beta_{10}=(1-k_l^2/k^2)^{1/2}$, $\beta_{20}=(1-k_t^2/k^2)^{1/2}$ соответственно.

После определения $\beta_{1,2,3}$ две из трех произвольных констант A, B, C можно выразить через третью. В итоге получим

$$U_x=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{3}F(\beta_n)A_n e^{\beta_n kz+i(kx-\omega t)},$$

$$U_y=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{3}A_n e^{\beta_n kz+i(kx-\omega t)}, \qquad (4)$$

$$U_z=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{3}G(\beta_n)A_n e^{\beta_n kz+i(kx-\omega t)};$$

здесь $F(\beta_n)$, $G(\beta_n)$ — функции β_n и параметров полупространства, $A_{1,2,3}$ — новые произвольные константы.

Подставляя выражения (4) в граничные условия будем иметь следующую систему линейных уравнений для A_n:

$$\sum_{n=1}^{3}\left[\beta_n a_n+i\left(1+\frac{h_x+h_y}{2}\right)c_n\right]A_n=0,$$

$$\sum_{n=1}^{3}\beta_n A_n=0, \qquad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{3}[\beta_n c_n(m_{x,y}+1)+i(m-1+h_y)a_n-i\sqrt{h_xh_y}]A_n=0,$$

где обозначено

$$a_{1,2}=\frac{h_x(1-\beta_{1,2}^2)-f_{1,2}}{(h_xh_y)^{1/2}(1-\beta_{1,2}^2)},\quad c_{1,2}=\frac{i\beta_{1,2}f_{1,2}}{(h_xh_y)^{1/2}(1-\beta_{1,2}^2)},$$

$$a_3=-\left(\frac{h_y}{h_x}\right)^{1/2},\quad c_3=\frac{i}{\beta_3}\left(\frac{h_y}{h_x}\right)^{1/2}.$$

Приравнивая нулю определитель $\Delta(k)$ системы (5), получим дисперсионное уравнение для нахождения волнового числа k.

Анализируя дисперсионное уравнение, можно показать, что оно имеет корень, соответствующий волне рэлеевского типа, которая при $\mathbf{H}_0=0$ переходит в рэлеевскую волну в изотропном полупространстве. При слабом магнитном поле ($h_{x,y}\ll 1$) для этого корня и для смещений в волне можно получить аналитические решения вида

$$k=k_R(1-\alpha); \qquad (6)$$

$$U_x=\frac{A}{k}\left[e^{\beta_{10}kz}-\frac{2\beta_{10}\beta_{20}}{2-\eta^2}e^{\beta_{20}kz}\right]e^{i(kx-\omega t)}+O([h_xh_y]^{1/2}),$$

$$U_y=\frac{A(h_xh_y)^{1/2}}{m}\left[-e^{\beta_{10}kz}+\frac{(1/4\eta^2)h_x-(\beta_{10}/\beta_{20})h_y}{(\beta_{20}{}^2/\eta^2)h_x-h_y}e^{\beta_{20}kz}\right]e^{i(kx-\omega t)}+O(h_xh_y), \qquad (7)$$

$$U_z=\frac{i\beta_{10}A}{k}\left[-e^{\beta_{10}kz}+\frac{2}{2-\eta^2}e^{\beta_{20}kz}\right]e^{i(kx-\omega t)}+O([h_xh_y]^{1/2});$$

здесь k_R — волновое число рэлеевской волны при $\mathbf{H}_0=0$, α — поправка к нему из-за магнитного поля, пропорциональная h_x и h_y, $\eta=k_t/k_R$. Для металла с коэффициентом Пуассона $\nu=0,34$ эта поправка, например, равна

$$\alpha=\frac{2{,}097h_x-0{,}302(h_x/h_y)h_x-0{,}161h_y}{4{,}002-0{,}574(h_x/h_y)}.$$

Из выражений (6), (7) следует, что однокомпонентное магнитное поле изменяет фазовую скорость волны, а двухкомпонентное поле ($h_x\neq 0$, $h_y\neq 0$) изменяет еще и структуру волны: в волне появляется третье смещение U_y, пропорциональное $(h_xh_y)^{1/2}$ (волна *1* на рис. 1). Это следствие своеобразной анизотропии, создаваемой в металле магнитным полем.

Из анализа дисперсионного уравнения также следует, что при сильных магнитных полях может существовать второй корень дисперсионного уравнения. Например, в случае $h_x\sim 1$, $h_y\ll 1$ возможно решение вида

$$U_y=\frac{A}{k}[e^{\beta kz+i(kx+\omega t)}+O(h_y^{1/2})],\quad U_{x,z}\sim O(h_y^{1/2}), \qquad (8)$$

где

$$k=\frac{k_t}{(1+h_x)^{1/2}}\left[1+\frac{h_x}{2(1+h_x)(m-h_x)}h_y\right],$$

$$\beta=\frac{h_x(h_x-1)\left[m-(^3/_2m+1)h_x-{}^1/_2h_x^2\right]}{(1+{}^1/_2h_x)(m-h_x-h_x^2)}h_y.$$

Это новая поверхностная волна, существование которой (как поверхностной волны) связано исключительно с магнитным полем. Она представляет собой слабо неоднородную ($\beta\sim h_y\ll1$) квазипоперечную волну (волна *2* на рис. 1), которая при однокомпонентном магнитном поле ($h_x=0$ или $h_y=0$) переходит в чисто объемную поперечную волну. Возможность существования этой волны зависит от напряженности магнитного поля: волна существует только при тех значениях h_x, которые обеспечивают выполнение условия $\beta>0$.

Таким образом, магнитное поле может существенно изменить структуру волны рэлеевского типа и создать возможность для существования новой поверхностной волны в проводящем полупространстве.

Акустический институт
Москва

Поступило
22 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Физическая акустика, т. 5, гл. 1, под ред. У. Мэзона, М., 1973. [2] *А. М. Гришин, Э. А. Канер и др.*, ЖЭТФ, т. 59, 629 (1970). [3] *S. Kaliski, D. Rogula*, Proc. Vibration Problems, v. 5, 63 (1960). [4] *Н. И. Долбин*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., т. 1, 84 (1963). [5] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.