Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 5

УДК 513.77

МАТЕМАТИКА

Э. Б. ВИНБЕРГ

О ТЕОРЕМЕ ШЁНФЛИСА — БИБЕРБАХА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 16 IX 1974)

Как известно, теорема Шёнфлиса — Бибербаха состоит в том, что всякая кристаллографическая группа движений n-мерного эвклидова пространства содержит n независимых параллельных переносов. В беседах со мною Б. Н. Делоне выражал неудовлетворенность тем, что эта фундаментальная теорема кристаллографии не имеет простого доказательства. Действительно, существующие доказательства ([1-3]) несколько громоздки даже в трехмерном случае. В настоящей заметке предлагается новое, более простое доказательство этой теоремы *.

1. Мы будем обозначать через E n-мерное эвклидово пространство и через V — пространство его векторов. Всякое движение g пространства E порождает ортогональное линейное преобразование пространства V, которое мы будем называть линейной частью движения g и обозначать через dg. Ясно, что $d(g_1g_2)=dg_1\cdot dg_2$.

Группа G движений пространства E называется кристаллографической, если:

1) орбита любой точки дискретна;

2) существует такое компактное множество $K\subset E$, что $GK=\bigcup\limits_{g\in G} gK=E$.

Теорема Шёнфлиса — Бибербаха заключается в любом из следующих двух утверждений, эквивалентность которых легко доказывается:

1°. *Группа G содержит n независимых параллельных переносов.*

2°. *Группа $dG=\{dg\colon g\in G\}$ конечна.*

Мы будем доказывать теорему индукцией по n. Докажем вначале, что если утверждение теоремы справедливо для размерностей, меньших n, и группа G содержит хотя бы один параллельный перенос, то она содержит n независимых переносов.

Обозначим через U подпространство в V, натянутое на в с е векторы параллельных переносов, принадлежащих группе G. Это подпространство инвариантно относительно линейных частей преобразований из G. Пусть его размерность равна k. Рассмотрим ортогональную проекцию p пространства E на $(n-k)$-мерное эвклидово пространство $\bar{E}$ параллельно подпространству U. Проекции $\bar{g}$ преобразований из G образуют некоторую группу $\bar{G}$ движений пространства $\bar{E}$. Покажем, что эта группа является кристаллографической.

Пусть $\bar{x}=p(x)$ — произвольная точка пространства $\bar{E}$. Орбита точки $\bar{x}$ при действии группы $\bar{G}$ есть проекция орбиты точки x при действии группы G. Пусть $\{g_m\}$ — такая последовательность элементов группы G, что точки $\bar{g}_m\bar{x}=p(g_mx)$ различны и образуют сходящуюся последовательность в пространстве $\bar{E}$. Тогда существуют такие векторы $u_m\in U$, что последовательность точек g_mx+u_m сходится в пространстве E. «Исправляя» элементы g_m путем умножения их слева на параллельные переносы, принадлежащие группе G, мы можем добиться того, чтобы последовательность $\{u_m\}$ стала ограниченной; преобразования $\bar{g}_m$ при этом не изменят-

* В заметке ([4]) Б. Н. Делоне и М. И. Штогрина дано простое доказательство для трехмерного случая.

ся. Далее, выбираем из последовательности $\{u_m\}$ сходящуюся подпоследовательность; тогда соответствующая подпоследовательность точек $g_m x$ также будет сходиться, что невозможно. Таким образом, группа $\bar{G}$ удовлетворяет первому условию кристаллографичности.

Второе условие проверяется еще проще. Положим $\bar{K}=p(K)$. Это будет компактное множество в пространстве $\bar{E}$ и очевидно, что $\bar{G}\bar{K}=p(GK)=\bar{E}$.

Если $U\neq V$, то, согласно предположению индукции, группа $\bar{G}$ содержит параллельный перенос, скажем, $\bar{g}$. Пусть g — элемент группы G, проекцией которого является $\bar{g}$. Преобразование g не обязательно является параллельным переносом, однако его линейная часть dg тождественна на ортогональном дополнении к U. С другой стороны, ограничение преобразования dg на U есть ортогональное преобразование пространства U, сохраняющее решетку, образованную векторами всех параллельных переносов, принадлежащих группе G. Следовательно, $(dg)^k=1$ для некоторого натурального k. Преобразование g^k является параллельным переносом, и его вектор не принадлежит U. Это противоречит определению пространства U. Следовательно, $U=V$, что и требовалось доказать.

2. В пространстве $L(V)$ всех линейных преобразований пространства V введем норму по формуле

$$\|A\|=\max_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|},\quad A\in L(V),$$

где $|x|$ обозначает длину вектора x. Кроме обычных свойств нормы в векторном пространстве, эта норма обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|,$$
$$\|C\|=1,\quad \|AC\|=\|CA\|=\|A\|,$$

если C — ортогональное преобразование.

Существенную роль в любом доказательстве теоремы Шёнфлиса — Бибербаха играет оценка близости к тождественному преобразованию коммутатора $(A, B)=ABA^{-1}B^{-1}$ двух ортогональных преобразований A, B. Имеем

$$\|(A, B)-1\|=\|(AB-BA)A^{-1}B^{-1}\|=\|AB-BA\|=$$
$$=\|(A-1)(B-1)-(B-1)(A-1)\|\leqslant 2\|A-1\|\,\|B-1\|,\qquad (1)$$

где 1 обозначает тождественное преобразование.

Кроме этого нужно оценить «переносную часть» коммутатора двух движений. Зафиксируем какую-нибудь точку $o\in E$ и, откладывая от нее все векторы, будем отождествлять их с их концами. Тогда всякое движение g представляется в виде $g(x)=Ax+a$, где $A=dg$, а вектор a (зависящий, конечно, от выбора точки o) и есть «переносная часть» движения g. Пусть имеется два движения

$$g(x)=Ax+a,\quad h(x)=Bx+b.$$

Тогда, как легко проверяется непосредственным вычислением,

$$(g, h)(x)=(A, B)x+c,$$
$$c=A(1-B)A^{-1}a+AB(A-1)A^{-1}B^{-1}b.$$

Ясно, что

$$|c|\leqslant\|B-1\|\,|a|+\|A-1\|\,|b|.\qquad (2)$$

3. Зададимся числом $\varepsilon>0$ и будем называть ортогональное преобразование A близким к 1, если $\|A-1\|<\varepsilon$. В этом пункте мы сведем доказательство теоремы Шёнфлиса — Бибербаха к случаю, когда группа dG порождается преобразованиями, близкими к 1.

Положим $dG=\Psi$ и рассмотрим подгруппу Ψ_1 группы Ψ, порожденную всеми ее элементами, близкими к 1. Докажем, что Ψ_1 — подгруппа конечного индекса в Ψ. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — представители различных классов смежности группы Ψ по подгруппе Ψ_1. Тогда при $i \neq j$ имеем $A_i A_j^{-1} \notin \Psi_1$ и, значит, $\|A_i A_j^{-1} - 1\| = \|A_i - A_j\| \geqslant \varepsilon$. Однако все ортогональные преобразования лежат в кубе пространства $L(V)$ (матричные элементы по абсолютной величине не превосходят 1), и поэтому число преобразований A_i, а значит, и число классов смежности, должно быть конечно.

Пусть теперь G_1 — подгруппа конечного индекса группы G, состоящая из тех ее элементов, линейные части которых принадлежат подгруппе Ψ_1. Очевидно, что G_1 — также кристаллографическая группа; при этом группа $dG_1 = \Psi_1$ порождается преобразованиями, близкими к 1. С другой стороны, если группа G_1 содержит n независимых переносов, то, тем более, этим свойством обладает группа G.

4. Приступая к доказательству самой теоремы, мы можем, в силу результатов п.п. 1 и 3, сделать относительно группы G следующие предположения:

а) группа G не содержит параллельных переносов;

б) группа dG порождается ортогональными преобразованиями, близкими к 1, считая $\varepsilon = 1/2$.

Из а) следует, что отображение d является изоморфизмом группы G на группу dG, а из б) — что группа G порождается движениями, линейные части которых близки к 1. Покажем, что группа G порождается конечным числом таких движений. Известно, что она обладает какой-то конечной системой образующих. (В качестве образующих можно взять, например, преобразования из группы G, переводящие область Дирихле в смежные с ней области данного разбиения Дирихле.) Выразим все эти образующие через движения группы G, линейные части которых близки к 1. Тогда все участвующие в этих выражениях движения и составят искомую конечную систему образующих $\{g_1, \ldots, g_k\}$ такую, что $\|dg_i - 1\| < 1/2$.

Запишем движения g_i в виде $g_i(x) = A_i x + a_i$ (см. п. 2). Пусть $r = \max\limits_i |a_i|$. Из всех нетождественных движений группы G, длина переносной части которых не превосходит r, выберем движение g_0, линейная часть которого ближе всего к 1. Пусть $g_0(x) = A_0 x + a_0$. Тогда $\|A_0 - 1\| \leqslant \|A_i - 1\|$ при любом i и, значит, $\|A_0 - 1\| < 1/2$. Рассмотрим коммутатор (g_0, g_i). Формула (2) показывает, что длина его переносной части не превосходит r, а из формулы (1) получаем, что его линейная часть ближе к 7, чем A_0. Следовательно, $(g_0, g_i) = e$, т. е. $g_0 g_i = g_i g_0$. Так как это верно при любом i, то движение g_0 перестановочно со всеми движениями из группы G.

Рассмотрим «ось» движения g_0, т. е. совокупность точек, перемещаемых им на минимальное расстояние. Это будет плоскость P некоторого числа измерений, не совпадающая со всем пространством E, так как g_0 не есть параллельный перенос. Всякое движение, перестановочное с g_0, переводит P в себя. В частности, этим свойством должны обладать все движения, принадлежащие группе G; но это, очевидно, противоречит второму условию кристаллографичности. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. Schoenflies,* Kristallsysteme und Kristallstrukture, Leipzig, 1891. [2] *L. Bieberbach,* Math. Ann., B. 70, 297 (1911). [3] *L. Auslander,* Proc. Am. Math. Soc., v. 16, № 6, 1230 (1965). [4] *Б. Н. Делоне, М. И. Штогрин,* ДАН, т. 219, № 1, 95 (1974).