УДК 621.384.60:533.9

Продольная неустойчивость заряженного пучка, циркулирующего в ускорителе или накопителе с конечной проводимостью стенок камеры

А. А. Коломенский

В работах [1, 2] было показано, что при достаточно малом энергетическом разбросе может возникнуть продольная неустойчивость заряженного циркулирующего пучка, если частота обращения частиц $\omega(E)$ уменьшается с их энергией E, т. е. при $\frac{d\omega}{dE}<0$. Наличие такой неустойчивости было подтверждено экспериментально на слабофокусирующих ускорителях [3], а также на сильнофокусирующей установке [4] при $E>E_{кр}$ ($E_{кр}$ — критическая энергия). Вместе с тем в последнее время были обнаружены факты, не укладывающиеся в ранее развитую теорию и показывающие, что и при $E<E_{кр}$ (т. е. при $\frac{d\omega}{dE}>0$) в пучке также может возникать неустойчивость [4], хотя, по-видимому, и более слабая, чем при $E>E_{кр}$. Ввиду важности этого вопроса для современных ускорителей и накопителей частиц нами был проведен анализ продольной устойчивости циркулирующего пучка с учетом конечной величины проводимости стенок камеры σ (в отличие от $\sigma=\infty$, как это принималось ранее). Результаты этого анализа, изложенные в настоящей статье, подтверждают возможность возникновения специфической неустойчивости «на сопротивлении», позволяют оценить время ее развития и указать условия подавления.

Рассмотрим пучок, состоящий из N частиц с зарядом e и массой покоя m_0 каждая, циркулирующий с некоторой скоростью $v=c\beta$ в тороидальной камере. Для простоты предположим, что пучок и камера имеют круговые сечения с радиусами, равными соответственно ϱ_0 и r_0. Большой радиус тороида обозначим через R. Проводящие стенки камеры удобно характеризовать поверхностным импедансом ζ:

$$\zeta=(1-i)\,\zeta_0;\quad \zeta_0=\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}},\tag{1}$$

где ω — частота электромагнитной волны [5]. В случае конечной величины σ продольная (азимутальная) составляющая электрического поля $\mathscr{E}$ не исчезает при приближении к стенкам и может быть определена с помощью граничных условий М. А. Леонтовича [5]:

$$\mathscr{E}(r_0)=-\zeta H(r_0),\tag{2}$$

где H — магнитное поле, направленное по азимуту малого сечения тора.

Полную величину $\mathscr{E}$ на любом радиусе можно представить в виде суммы двух слагаемых: величины $\mathscr{E}_0$, соответствующей $\zeta=0$, и малой поправки $\mathscr{E}_\zeta$, пропорциональной ζ. В практически важном случае не очень коротких длин волн $\lambda\gg r_0$ можно считать, что эта поправка остается одной и той же по всему сечению пучка и равной ее величине на границе $r=r_0$. Если воспользоваться выражениями (1) и (2) и представить H через ток частиц I

$$H=\frac{2I}{cr_0},\tag{3}$$

то величину $\mathscr{E}_\zeta$ можно записать в виде

$$\mathscr{E}_\zeta=-(1-i)\,\frac{2\zeta_0 I}{cr_0}.\tag{4}$$

Уже это выражение качественно показывает, что при $\zeta_0\neq0$ можно ожидать появление нестабильности, так как $\mathscr{E}_\zeta$ содержит компоненту, находящуюся в противофазе с током. Таким образом, энергия пучка может постепенно передаваться нарастающей электромагнитной волне. Такая неустойчивость в принципе не связана с циркуляцией пучка и может возникать также при его движении по прямой, как это, например, происходит в так называемом усилителе на поглощении [6]. Однако циркуляция пучка придает этому явлению новые свойства, для которых существенны знак и абсолютная величина производной $\omega'(E)=\frac{d\omega}{dE}$, а также энергетический разброс $\delta=\frac{\Delta E}{E}$ и другие параметры, характерные для циклических ускорителей и накопителей. Для исследования вопроса об устойчивости будем следовать методике, примененной нами ранее к исследованию эффекта отрицательной массы [1]. Введем функцию распределения

$$F(W,\varphi,t)=F_0(W)+f(W,\varphi,t);\quad f\ll F.\tag{5}$$

Здесь W, φ — канонические импульс и координата:

$$W=\int\limits_{E_1}^{E}\frac{dE}{vE};\quad \varphi=\theta-\omega_1 t,\tag{6}$$

где θ — азимутальный угол, а индексом «1» отмечены величины, относящиеся к некоторой средней энергии пучка. Линеаризуя кинетическое уравнение и выполняя преобразования Фурье по азимуту и Лапласа по времени, находим уравнение

$$f_p\left[p+ikW(v\omega')_1\right]=f(k,\,0)-\frac{dF_0}{dW}\,e\mathcal{E}_p(k). \qquad (7)$$

Если учесть, что

$$I(k,\,t)=\frac{ev}{R}\int f(W,\,k,\,t)\,dW, \qquad (8)$$

и воспользоваться выражением (4), а также формулой для $\mathcal{E}_0(k,\,t)$ из работы [1], то для $\mathcal{E}(k,\,t)$ получим выражение

$$\mathcal{E}(k,\,t)=-\left(\frac{i\Lambda ek}{R^2\gamma^2}+\frac{2e\beta\zeta}{Rr_0}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(W,\,k,\,t)\,dW, \qquad (9)$$

где γ — релятивистский фактор, а параметр Λ зависит от отношения ϱ_0/r_0 и в практически интересных случаях равняется 2—3.

Пользуясь уравнениями (7) и (9), в результате обычной процедуры получим, что асимптотическое поведение возмущений определяется корнем уравнения

$$\left[\frac{i\Lambda e^2k}{R^2\gamma^2}+\frac{2e^2\beta\zeta_0}{Rr_0}(1-i)\right]\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dF_0}{dW}\left[p+ikW(v\omega')_1\right]dW=1, \qquad (10)$$

имеющим наибольшую действительную часть Rep. Как видно, учет конечной проводимости стенок привел к появлению слагаемого в квадратных скобках, содержащего ζ_0, причем новому эффекту соответствует действительная часть этого слагаемого, а мнимая часть может привести только к незначительному изменению первого слагаемого, соответствующего уже известному эффекту.

Для получения основных характеристик нового вида неустойчивости ограничимся рассмотрением по возможности простого распределения $F_0(W)$, в качестве которого возьмем распределение треугольной формы

$$F_0(W)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{N}{2\pi W_0^2}(\pm W+W_0) & \text{при } -W_0\leqslant W\leqslant 0,\\ & \qquad 0\leqslant W\leqslant W_0,\\ 0 & \text{при } |W|>W_0.\end{cases} \qquad (11)$$

Проведя интегрирование в (10) и разрешив уравнение относительно p, получим приближенно

$$p\cong\pm\frac{1}{2}k\Delta E\,|\,\omega_1'\,|\,(e^s-1)^{-1/2}\mp$$

$$\mp\frac{i}{4}k\Delta E\,|\,\omega_1'\,|\,(e^s-1)^{-3/2}e^sgs, \qquad (12)$$

где

$$s=\frac{\pi RK\gamma^3\delta^2}{2r\Lambda N};\quad g=\frac{2R\gamma^2\beta\zeta_0}{r_0\Lambda k};\quad K=-\frac{E}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{dE};$$

$$r_e=\frac{e^2}{m_0c^2}. \qquad (12')$$

При этом считается $g\ll 1$, что обычно хорошо выполняется, и по определению W принято $2vW_0=\Delta E$. При нахождении $Rep>0$ в (12) нужно различать два случая в зависимости от знака $\omega'(E)=\dfrac{d\omega}{dE}$:

1) в случае $\omega'(E)<0$ получим выражение

$$Rep=\frac{1}{2}k\Delta E\,|\,\omega_1'\,|\,(e^s-1)^{-1/2}, \qquad (13)$$

которое характеризует упоминавшийся эффект отрицательной массы [1, 2];

2) в случае $\omega'(E)>0 (s<0)$, соответствующем условию $E<E_{\text{кр}}$, находим новый результат:

$$Rep=\frac{1}{4}k\Delta E\,|\,\omega_1'\,|\,e^{-|s|}(1-e^{-|s|})^{-3/2}g\,|\,s\,|, \qquad (14)$$

описывающий неустойчивость, связанную с конечной проводимостью стенок камеры и проявляющуюся, в частности, там, где эффект отрицательной массы не может возникнуть.

Неустойчивости обоих типов (13) и (14) могут быть практически подавлены за счет достаточно большого энергетического разброса

$$\delta\gg\sqrt{\frac{2r_e\Lambda N}{\pi R\,|\,K\,|\,\gamma^3}}. \qquad (15)$$

Действительно, как видно из (14) и (15), это условие, означающее $|\,s\,|\gg 1$, приводит к малым значениям R_{ep}, т. е. к большому времени развития неустойчивости $T\approx\dfrac{1}{Rep}$. Напротив, достаточно малый энергетический разброс, или в более общем случае $|\,s\,|\ll 1$, может привести к опасной неустойчивости с малым временем

$$T\approx\frac{4\sqrt{|\,s\,|}}{k\Delta E\,|\,\omega_1'\,|\,g}=\frac{1}{\omega_1\beta\zeta_0}\sqrt{\frac{2\pi r_0^2\Lambda}{r_eR\,|\,K\,|\,\gamma N}}. \qquad (16)$$

Заметим, что условие (15), хотя оно по форме одинаково для обоих видов нестабильности, по существу дает разные критерии для этих случаев, так как относится к различным значениям энергии $E\gtrless E_{\text{кр}}$.

Оценки величины T для различных случаев показывают, в частности, что рассматриваемая неустойчивость может быть опасна, если ускорение или накопление частиц осуществляется в сильнофокусирующей установке при слабо релятивистских энергиях $\beta\lesssim 1$, $\gamma\gtrsim 1$ и малом энергетическом разбросе.

Поступило в Редакцию 19/III 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. «Атомная энергия», 7, 549 (1959); Proc. Intern. Conf. on High Energy Accel., CERN, Geneva, 1959, p. 115.
2. C. Nielsen, A. Sessler, K. Symon. Ibid., p. 239.
3. M. Barton, C. Nielsen. Proc. Intern. Conf. on High Energy Accel., Brookhaven, 1961, p. 163.
4. F. Mills et al. «Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963». М., Атомиздат, 1964.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957, § 67.
6. В. М. Лопухин, А. А. Веденов. «Успехи физ. наук», 53, 69 (1954).