

УДК 517.538.52+517.538.53

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЭКСПОНЕНТ

Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE CONVERGENCE RATE OF HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS OF THE THREE EXPONENT SYSTEM

E.P. Kechko

F. Scorina Gomel State University

Для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$ найдена скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода. Доказанные теоремы дополняют результаты, полученные ранее О. Перроном, Д. Браессом, А.И. Аптекаревым, А.П. Старовойтовым и др.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде 2-го рода, система экспоненциальных функций, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

The convergence rate of type II Hermite – Padé approximants for the system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$ is found. The theorems proved in the paper complement the results obtained earlier by O. Perron, D. Braess, A.I. Aptekarev, A.P. Starovoitov and other authors.

Keywords: type II Hermite – Padé approximations, system of exponential functions, asymptotic equalities, Hermite integrals.

Введение

Рассмотрим систему экспоненциальных функций

$$\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k,$$

где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные отличные от нуля комплексные числа. Для индекса $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n, \vec{m}}(z) \neq 0$, $P_{n, \vec{m}}^j(z)$:

$$\deg Q_{n, \vec{m}} \leq |m|, \quad \deg P_{n, \vec{m}}^j \leq n_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} R_{n, \vec{m}}^j(z) &= R_{n, \vec{m}}^j(z; \vec{f}) = \\ &= Q_{n, \vec{m}}(z) e^{\lambda_j z} - P_{n, \vec{m}}^j(z) = O(z^{n+|m|+1}), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $|m| = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_j = n + |m| - m_j$, $j = 1, 2, \dots, k$.

При $k=1$ считаем, что $\lambda_1 = 1$.

Многочлены $Q_{n, \vec{m}}(z)$, $P_{n, \vec{m}}^1(z)$, ..., $P_{n, \vec{m}}^k(z)$ принято называть *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а рациональные функции

$$\pi_{n, \vec{m}}^j(z) = \pi_{n, \vec{m}}^j(z; \vec{f}) = \frac{P_{n, \vec{m}}^j(z)}{Q_{n, \vec{m}}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

– *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде)* системы экспонент. Диагональному случаю соответствует набор индексов, для которого $n = m_1 = \dots = m_k$.

Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ были введены Ш. Эрмитом

в работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e . Им также были найдены явные выражения (подробнее см. [2]) для многочленов и остаточной функции, удовлетворяющие условиям (0.1): если $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, то

$$Q_{n, \vec{m}}(z) = \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$

$$P_{n, \vec{m}}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_{\lambda_j}^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{\lambda_j} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

При $k=1$ $\vec{m} = m_1 = m$, а $\pi_{n, \vec{m}}(z) := \pi_{n, m}^1(z)$ называется *аппроксимацией Паде*. Ее свойства достаточно хорошо изучены [3]. Так, Паде доказал, что при $n/m \rightarrow \gamma$, $0 \leq \gamma \leq +\infty$ дроби $\pi_{n, m}(z)$ равномерно сходятся к e^z на компактах из \mathbb{C} . О. Перрон [4] получил аналогичный результат при $n+m \rightarrow \infty$. Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n, m}(z)$, которая была решена Д. Браессом [5]: для любого комплексного z при $n+m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n, m}(z) &= \\ &= (-1)^m \frac{m! n! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (0.2)$$

Для $k > 1$ Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных

аппроксимаций Паде для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные отличные от нуля комплексные числа. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [6], который доказал, что: дроби $\pi_{n,\bar{m}}^j(z; e^{\lambda_j z})$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в \mathbb{C} и для любого $z \in \mathbb{C}$ при $n + |m| \rightarrow +\infty$

$$Q_{n,\bar{m}}(z) = \exp \left\{ - \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j m_j}{n + |m|} z \right\} (1 + o(1)). \quad (0.3)$$

Отметим, что в настоящее время скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде в основном исследовалась лишь при действительных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ [7]–[10] и в диагональном случае.

В работе [9] описана асимптотика при $k = 2$. Недиагональные аппроксимации Эрмита – Паде для системы $\{e^{jz}\}_{j=1}^3$ рассмотрены в [10].

В данной работе исследована скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ – различные отличные от нуля комплексные числа. Сформулированные результаты справедливы в том числе и для недиагонального случая. При доказательстве теоремы использовался новый подход [9], который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения асимптотических методов перевала и Лапласа.

1 Теорема о скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде

Теорема 1.1. Пусть n, m_1, m_2, m_3 – произвольные целые неотрицательные числа, а рациональные дроби $\pi_{n,\bar{m}}^j(z)$, $j = 1, 2, 3$ – аппроксимации Эрмита – Паде для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, то для любого комплексного числа z равномерно по всем \bar{m} , для которых $0 \leq |m| \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi_{n,\bar{m}}^1(z) = (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \frac{m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!} (1 + o(1)), \quad (1.1)$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi_{n,\bar{m}}^2(z) = (-1)^{|m|} \lambda_2^{n+m_2+1} (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} (\lambda_3 - \lambda_2)^{m_3} \times \frac{m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!} (1 + o(1)), \quad (1.2)$$

$$e^{\lambda_3 z} - \pi_{n,\bar{m}}^3(z) = (-1)^{|m|} \lambda_3^{n+m_3+1} (\lambda_1 - \lambda_3)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda_3)^{m_2} \times \frac{m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!} (1 + o(1)), \quad (1.3)$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leq L$.

Здесь и далее L, L_1 – абсолютные постоянные.

Доказательство. Рассмотрим

$$R_{n,\bar{m}}^1(z) = \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \times \int_0^{\lambda_1} x^n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} (x - \lambda_3)^{m_3} e^{(\lambda_1 - x)z} dx.$$

В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^{\lambda_1} x^n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} (x - \lambda_3)^{m_3} e^{(\lambda_1 - x)z} dx$$

сделаем замену $x = \lambda_1 t$. В результате получим

$$I_1(z) = \lambda_1^{n+m_1+1} \int_0^1 t^n (t-1)^{m_1} (\lambda_1 t - \lambda_2)^{m_2} (\lambda_1 t - \lambda_3)^{m_3} e^{\lambda_1(1-t)z} dt.$$

В новом интеграле сделаем следующую замену $u = 1 - t$. Тогда

$$I_1(z) = (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)^{m_3} e^{\lambda_1 u z} du.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1^p(z) = \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1+p} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)^{m_3} du.$$

Используя формулу бинома Ньютона и равенство

$$\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k\right) \left(\sum_{t=0}^m C_m^t x^t\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{t=0}^k C_n^t C_m^{k-t}\right) x^k,$$

а затем свойства бета-функции Эйлера $B(u; v)$, легко показать, что

$$J_1^p(z) = \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \times B(m_1 + p + k + 1; n + 1).$$

Исследуем асимптотику поведения интеграла $J_1^0(z)$ при $n \rightarrow \infty$. Выражая бета-функцию Эйлера через гамма-функцию, получим:

$$J_1^0(z) = \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \times B(m_1 + k + 1; n + 1) = \frac{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(m_1 + n + 2)} \times \left[1 + \sum_{k=1}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \right]$$

$$\times \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2) \dots (m_1 + k)}{(n + m_1 + 2) \dots (n + m_1 + k + 1)} \Big].$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2) \dots (m_1 + k)}{(n + m_1 + 2) \dots (n + m_1 + k + 1)} \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} |\lambda_1|^k}{|\lambda_2 - \lambda_1|^j |\lambda_3 - \lambda_1|^{k-j}} \right) \left(\frac{|m|}{n + |m|} \right)^k - 1 = \\ & = \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \frac{|m|}{n + |m|} \right)^{m_2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3 - \lambda_1|} \frac{|m|}{n + |m|} \right)^{m_3} - 1, \end{aligned}$$

учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, получим, что последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$J_1^0(z) = \frac{\Gamma(m_1 + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 2)}(1 + o(1)). \quad (1.4)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_1^p(z) = \frac{\Gamma(m_1 + p + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + p + 2)}(1 + o(1)), \quad (1.5)$$

$$p = 1, 2, \dots$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$.

При $n \rightarrow \infty$ $u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{m_1 + 1}{n + m_1 + 2}(1 + o(1))$. Следовательно, при достаточно больших n имеем $u_0 \in [0, 1]$.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{\lambda_1(u-u_0)z}$ в окрестности точки u_0 , получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 u z} &= e^{\lambda_1 u_0 z} e^{\lambda_1 (u-u_0)z} = \\ &= e^{\lambda_1 u_0 z} \left\{ 1 + \lambda_1 z (u - u_0) + \frac{(\lambda_1 z)^2}{2!} (u - u_0)^2 + \dots \right\} = \\ &= e^{\lambda_1 u_0 z} + e^{\lambda_1 u_0 z} \lambda_1 z (u - u_0) + \rho_u(z), \end{aligned}$$

где при $|z| \leq L$ и $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |\rho_u(z)| &\leq \\ &\leq |u - u_0|^2 \left\{ \frac{(|\lambda_1| L)^2}{2!} + \dots + \frac{(|\lambda_n| L)^n}{n!} + \dots \right\} \leq \\ &\leq L_1 (u - u_0)^2. \end{aligned}$$

Учитывая (1.4), (1.5) и выбор u_0 , получаем равенство

$$\begin{aligned} I_1(z) &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ &\times \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^{m_2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^{m_3} e^{\lambda_1 u_0 z} du + \\ &+ \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^{m_2} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^{m_3} \rho_u(z) du = \\ &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ &\times \left[e^{\lambda_1 u_0 z} J_1^0 + A_p(z) \right], \quad (1.6) \end{aligned}$$

где при $|z| \leq L$

$$\begin{aligned} |A_p(z)| &\leq \\ &\leq L_1 \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^{m_2} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^{m_3} (u - u_0)^2 du = \\ &= L_1 (J_1^2 - u_0 J_1^1). \end{aligned}$$

В предыдущем выражении воспользовались представлением

$$(u - u_0)^2 = (u^2 - uu_0) - (uu_0 - u_0^2)$$

и тем, что $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} |A_p(z)| &\leq \\ &\leq L_1 \left\{ \frac{\Gamma(m_1 + 3)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 4)} - u_0 \frac{\Gamma(m_1 + 2)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 3)} \right\}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$|A_p(z)| \leq L_1 \frac{\Gamma(m_1 + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 2)} o(1).$$

Принимая во внимание последнее неравенство, из (1.6) следует

$$\begin{aligned} I_1(z) &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ &\times e^{\lambda_1 u_0 z} B(m_1 + 1; n + 1)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $|z| \leq L$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} R_{n,\bar{m}}^1(z) &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ &\times \frac{m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n + m_1 + 1)!(n + |m|)!} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом случае равенство (0.3) имеет вид $Q_{n,\bar{m}}(z) = (1 + o(1))$, то справедливо равенство (1.1). Равенства (1.2) и (1.3) доказываются аналогично. \square

2 Следствия и обобщения

Из теоремы 1.1, в качестве частных случаев, можно получить уже известные результаты. Не сложно заметить, что при $k = 1$ ($m_1 = m$, $m_2 = m_3 = 0$) из теоремы 1.1 следует результат Д. Браесса (0.2), а при $k = 2$ и $\lambda_3 = 0$, $m_3 = 0$ согласуется с результатами из работ [8], [9]:

Следствие 2.1. Пусть $\vec{m} = (m_1, m_2)$,

$$|m| = m_1 + m_2,$$

а дроби $\pi_{n, \vec{m}}^j(z; e^{\lambda_j z})$ являются аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^2$, где λ_1, λ_2 – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) / \sqrt{n} = 0$, то равномерно по всем \vec{m} , для которых

$$0 \leq |m| \leq m(n),$$

при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 z} - \pi_{n, \vec{m}}^1(z; e^{\lambda_1 z}) &= \\ &= (-1)^{|m|} \frac{m_1! n! (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_1+1)!} (1+o(1)), \\ e^{\lambda_2 z} - \pi_{n, \vec{m}}^2(z; e^{\lambda_2 z}) &= \\ &= (-1)^{|m|} \frac{m_2! n! (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_2+1)!} (1+o(1)), \end{aligned}$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leq L$.

При $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$, теорема 1.1 обобщает результаты работы [10].

Следствие 2.2. Пусть n, m_1, m_2, m_3 – произвольные целые неотрицательные числа, а $\pi_{n, \vec{m}}^j(z)$, $j = 1, 2, 3$ – аппроксимации Эрмита – Паде для $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} |m| / \sqrt{n} = 0$, то для любого комплексного числа z равномерно по всем \vec{m} , для которых $0 \leq |m| \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n, \vec{m}}^1(z) &= (-1)^{|m|} \frac{2^{m_3} m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_1+1)!} (1+o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{n, \vec{m}}^2(z) &= \\ &= (-1)^{|m|} \frac{(-1)^{m_1} 2^{n+m_2+1} m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_2+1)!} (1+o(1)), \\ e^{3z} - \pi_{n, \vec{m}}^3(z) &= \\ &= (-1)^{m_3} \frac{2^{m_1} 3^{n+m_3+1} m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_3+1)!} (1+o(1)). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
2. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
3. *Бейкер, Дж. мл.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig: Teubner, 1929. – 524 p.
5. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z , II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
6. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
7. *Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function* / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207, № 2. – P. 227–244.
8. *Старовойтов, А.П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1, ч. 2. – С. 88–91.
9. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.
10. *Кечко, Е.П.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент / Е.П. Кечко, М.В. Сидорцов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (144). – С. 158–162.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18М-025).

Поступила в редакцию 13.01.20.