

## Релятивистское обобщение корнельского потенциала: пертурбативная часть

К.С. БАБИЧ, В.В. АНДРЕЕВ

Получено ядро интегрального радиального уравнения движения релятивистской кварк-антикварковой системы на основе обобщения пертурбативной части корнельского потенциала.

**Ключевые слова:** корнельский потенциал, кварк, релятивистская гамильтонова динамика, интегральное уравнение, базисные спиноры.

The kernel of the integral radial equation of motion of a relativistic quark-antiquark system based on generalized perturbation of the Cornell potential is calculated in the article.

**Keywords:** Cornell potential, quark, relativistic Hamiltonian dynamics, integral equation, basis spinors.

### Введение

Основу вычислений энергетического спектра связанных систем составляет процедура получения потенциала взаимодействия частиц. При описании мезона как системы из кварка и антикварка широко используется корнельский потенциал. Эффективный центрально-симметричный потенциал взаимодействия между кварками с конститuentными массами  $m_q$  и  $m_q$  включает кулоновскую и запирающую части:

$$\hat{V}(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + \sigma r + w, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $w$  – параметры, которые связывают в квантовой с натяжением глюонной струны и кварковым конденсатом. Параметр  $\alpha_s$  – константа сильной связи в квантовой хромодинамике (КХД). Такой потенциал удовлетворяет требованию конфайнмента кварков и был широко использован при расчетах спектров тяжелых мезонов [1], [2].

Однако для описания релятивистских эффектов, а также для систем с легкими кварками ( $u, d$  и  $s$ ) необходимо релятивистское обобщение потенциала (1). Такое обобщение зависит от модели, используемой для описания свойств релятивистских систем.

Построение пертурбативной части потенциала взаимодействия релятивистских частиц часто осуществляют с помощью амплитуды упругого рассеяния  $T_{fi}$  частиц, входящих в систему [3]:

$$\hat{V}_{fi} = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) T_{fi}. \quad (2)$$

В нашем случае это реакция упругого рассеяния кварка на антикварке

$$q_i(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{q}_j(k_2, \lambda_{k_2}) \rightarrow q_k(p_1, \lambda_{p_1}) + \bar{q}_l(p_2, \lambda_{p_2}), \quad (3)$$

где импульс частиц и спиновые числа задаются между круглыми скобками, полный импульс системы  $\mathbf{P} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , а индексы  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  обозначают цветовые степени свободы кварков.

Наиболее общепринятой методикой нахождения явного вида потенциала является расчет спинорных структур амплитуды в терминах матриц Паули и импульсов, используя явный вид биспиноров [3]–[5]. Такое вычисление, как правило, делают приближенно, применяя разложение по скоростям  $v/c$  частиц системы. Далее рассчитывают потенциал  $V(\mathbf{r})$  в координатном пространстве как фурье-преобразование вышеупомянутой амплитуды рассеяния  $T_{fi}$ .

Еще одним важнейшим моментом при исследовании спектров является решение уравнения для системы частиц с полученным потенциалом. Как правило, такие уравнения представляют собой трехмерные интегро-дифференциальные уравнения, решение которых численными методами с необходимой для экспериментов точностью является сложной и

громоздкой задачей. Поэтому для увеличения точности и сокращения временных затрат удобно свести трехмерные уравнения к одномерным путем интегрирования по угловым переменным. Итогом данной процедуры будет радиальное уравнение с ядром, зависящим только от модулей импульсов частиц.

Цель данной работы – найти пертурбативную часть ядра, которое входит в радиальное уравнение, без использования разложения по скоростям кварков, т. е. точно. Характерной особенностью наших вычислений является использование только импульсного пространства, поскольку в релятивистском случае оно возникает естественным образом.

### Система кварк-антикварк в РГД

Описание связанных состояний проводится в рамках пуанкаре-ковариантной модели, основанной на релятивистской гамильтоновой динамике (РГД). Основным требованием РГД является условие сохранения пуанкаре инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц [6]–[8].

В случае системы двух фермионов с массами  $m_q$  и  $m_Q$  и, соответственно, с 4-импульсами  $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$  и  $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$  и проекциями спина  $\lambda_{1,2}$  волновая функция (ВФ) связанной системы спинорных кварков массы  $M$  с полным угловым моментом  $J$  и его проекцией  $\mu$  удовлетворяет в РГД трехмерному интегральному уравнению [7]:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \langle \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 | \hat{V} | \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 \rangle \Phi_{\mathbf{P}; \lambda_1 \lambda_2}^{J\mu}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' = \left( M - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_q^2} - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_Q^2} \right) \Phi_{\mathbf{P}; \sigma_1 \sigma_2}^{J\mu}(\mathbf{k}) \quad (4)$$

с редуцированным матричным элементом:

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 | \hat{V} | \mathbf{P}', \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \langle \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 | \hat{V} | \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \quad (5)$$

В (4) и (5) полный и относительный импульсы движения определены следующим образом:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (6)$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0(\omega_{M_0}(P) + M_0)} \left( m_Q^2 - m_q^2 - M_0[\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)] \right), \quad (7)$$

где

$$M_0 = \sqrt{[\omega_{m_Q}(p_2) + \omega_{m_q}(p_1)]^2 - \mathbf{P}^2}.$$

Радиальное уравнение для двухчастичного связанного состояния в системе центра инерции (с.ц.и.) ( $\mathbf{P} = 0$ ) имеет вид [7]

$$\sum_{\ell', S'} \int_0^\infty V_{\ell, S'; \ell', S'}^J(k, k') \Phi_{\ell', S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M_\psi - M_0) \Phi_{\ell, S}^{J\mu}(k), \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (8)$$

Поскольку при расчетах реакций с фермионами наиболее эффективным является использование спиральных состояний, а для описания связанных систем «хорошими» квантовыми числами являются орбитальный момент относительного движения  $\ell$  и полный спиновой момент  $S$ , удобно перейти к спиральным состояниям в операторе  $V_{\ell', S'; \ell, S}^J(k', k) = \langle k', J, \mu, \ell', S' | \hat{V} | k, J, \mu, \ell, S \rangle$ , определяющим ядро уравнения (8). Такая процедура описана, в частности, в [9], и результатом ее является соотношение

$$V_{\ell', S'; \ell, S}^J(k', k) = \frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'} C_{\lambda_1/2 - \lambda_2/2 \lambda}^{1/2 \ 1/2 \ S} C_{0 \lambda \lambda}^{\ell \ S \ J} \times C_{\lambda_1'/2 - \lambda_2'/2 \lambda'}^{1/2 \ 1/2 \ S'} C_{0 \lambda' \lambda'}^{\ell' \ S' \ J} V_{\lambda_1', \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k), \quad (9)$$

где

$$V_{\lambda'_1, \lambda'_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k) = \int_{-1}^1 d(\cos \beta) \int_0^{2\pi} d\phi D_{\lambda, \lambda'}^J(\phi, \beta, -\phi) \langle \mathbf{k}', \lambda'_1, \lambda'_2 | \hat{V} | \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle, \quad (10)$$

$$\cos \beta = (\mathbf{k} \mathbf{k}') / (|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'|) = \cos \theta_k \cos \theta_{k'} + \cos(\phi_k - \phi_{k'}) \sin \theta_k \sin \theta_{k'}, \quad (11)$$

$$\lambda = \lambda_1 / 2 - \lambda_2 / 2, \quad \lambda' = \lambda'_1 / 2 - \lambda'_2 / 2. \quad (12)$$

Функция  $D_{\mu, \lambda}^J(\phi_k, \theta_k, -\phi_k)$  задает матрицы неприводимого представления группы  $SU(2)$  индекса  $J$ . Явный вид матрицы  $D$  определяется через сферические углы вектора относительного движения (7)  $\hat{\mathbf{k}} = \{\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos \theta_k\}$ . Величины вида  $C_{\lambda_1 - \lambda_2 \lambda}^{1/2 \ 1/2 \ S}$  являются коэффициентами Клебша – Гордана.

Здесь и далее для величин  $\lambda_{1,2}$  будем использовать удвоенное значение спиральностей кварков (фермионов), т. е.  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ .

### Потенциал

Сделаем несколько замечаний по поводу построения потенциала. Расчет потенциала, как правило, делается в рамках теории возмущений, которая не всегда приемлема, если возникает необходимость учесть непертурбативные эффекты. На практике это приводит к тому, что выражение, полученное с помощью амплитуды рассеяния, модифицируется тем или иным способом. Такая ситуация имеет место при описании взаимодействия между кварками в дроне.

Важным является и то, что в квантовополевых теориях содержатся различные требования такие, как калибровочная инвариантность, перекрестная симметрия и др. Эти требования не всегда выполняются автоматически при использовании схемы получения потенциала, основанной на амплитуде рассеяния. Требование калибровочной инвариантности приводит к условию сохранения токов, определяющих потенциал. Как известно, построение таких сохраняющихся токов требует их модификации [10]–[14]. Кроме этого, процесс вычисления амплитуды, как следует из ее определения (2), должен дополняться процедурой продолжения за массовую поверхность, которая не является однозначной.

Поэтому потенциал, основанный на амплитуде рассеяния, практически всегда будет некоторым эффективным потенциалом. Такая особенность характерна для любой модели (см. [15]–[17]), описывающей релятивистские связанные системы, и модели, основанные на использовании РГД, не являются исключением. В данной работе потенциал будем строить с учетом требований КХД и конфайнмента кварков.

В первом ненулевом порядке теории возмущений основной вклад в амплитуду упругого рассеяния  $T_{fi}$  кварка на антикварке определяется диаграммой одноглюонного обмена, изображенной на рисунке 1.

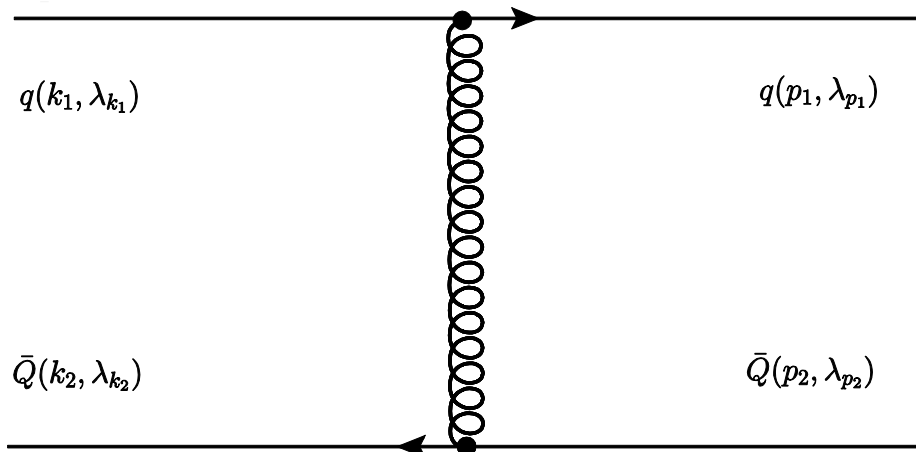


Рисунок 1 – Диаграмма одноглюонного обмена между кварком  $q$  и антикварком  $\bar{Q}$

Используя правила Фейнмана, находим, что пертурбативная часть межкваркового потенциала  $V_{pert}$  в системе центра инерции дается выражением:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} | \hat{V}_{pert} | \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle &\equiv V_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^{(pert)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \\ &= (-1) \frac{N_{k,k'}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s}{3q^2} j^\mu(1) D_{\mu\nu}(q) j^\nu(2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$j^\mu(1) = \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \gamma^\mu u_{\lambda_{k_1}}(k_1), \quad j^\mu(2) = \bar{v}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \gamma^\mu v_{\lambda_{p_2}}(p_2), \quad (14)$$

где  $q$  – импульс глюона:  $q = \{0, \mathbf{k} - \mathbf{k}'\}$ ,  $N_{k,k'} = 1 / \sqrt{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_q}(k) \omega_{m_q}(k') \omega_{m_q}(k')}$  и

$$k_1 = (\omega_{m_q}(k), \mathbf{k}), \quad p_1 = (\omega_{m_q}(k'), \mathbf{k}'), \quad k_2 = (\omega_{m_q}(k), -\mathbf{k}), \quad p_2 = (\omega_{m_q}(k'), -\mathbf{k}').$$

Функция  $D_{\mu\nu}(q)$ , связанная с пропагатором глюона,

$$D_{\mu\nu}(q) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (15)$$

В отличие от упругого рассеяния в с.ц.и. при построении потенциала (13) необходимо учитывать виртуальность состояний кварков, что приводит к тому, что  $|\mathbf{k}| \neq |\mathbf{k}'|$  [4].

Перейдем к процедуре модификации  $V_{pert}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Требование сохранения тока (см. [7]) в кварк-глюонной вершине приводит к тому, что

$$q_\mu j^\mu(1) = q_\mu j^\mu(2) = 0. \quad (16)$$

Но при этом, как следует из определения (14), выполняются соотношения

$$q_{1,\mu} j^\mu(1) = 0; \quad q_{2,\mu} j^\mu(2) = 0, \quad (17)$$

где

$$q_1 = \{ \omega_{m_q}(k) - \omega_{m_q}(k'), \mathbf{k}' - \mathbf{k} \}, \quad q_2 = \{ \omega_{m_q}(k') - \omega_{m_q}(k), \mathbf{k} - \mathbf{k}' \}, \quad (18)$$

а не требование (16).

Выполнить требование калибровочной инвариантности (16) можно с помощью модификации токов  $j^\mu(1,2)$ , посредством их переопределения (см., например, [13]):

$$j^\mu(1,2) \rightarrow J^\mu(1,2) = \left( g_\nu^\mu - \frac{q^\mu q_\nu}{q^2} \right) j^\nu(1,2). \quad (19)$$

Кроме этого, учет эффектов поляризации вакуума за счет высших порядков КХД, как известно, приводит к зависимости константы сильного взаимодействия  $\alpha_s$  от  $q^2$ , что свою очередь также модифицирует потенциал. В итоге потенциал, генерируемый диаграммой одноглюонного обмена, с учетом условия сохранения токов и бегущей константы КХД примет вид:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^{(pert)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= (-1) \frac{N_{k,k'}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s(q^2)}{3q^2} J^\mu(1) D_{\mu\nu}(q) J^\nu(2) = \\ &= (-1) \frac{N_{k,k'}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s(q^2)}{3q^2} \left[ j^\mu(1) j_\mu(2) - \frac{(qj(1))(qj(2))}{q^2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Потенциал (20) в нерелятивистском пределе ( $k^2, k'^2 \ll m_q^2, m_q'^2$ ) в координатном пространстве переходит в кулоновский потенциал (см., например, [18])

$$\hat{V}_c(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r}. \quad (21)$$

Поэтому можно считать (20) релятивистским обобщением части корнельского потенциала (1).

Поскольку расчет вклада в ядро радиального уравнения (8) запирающей части будет проделан в другой работе, здесь ограничимся кратким рассмотрением. Получение запирающей составляющей межкваркового потенциала можно провести исходя из анализа лоренц-

структуры потенциала и экспериментальных данных по спектру масс мезонов. Это приводит к тому, что непертурбативная часть межкваркового потенциала определяется как сумма векторной ( $\square K_V(q^2)$ ) и скалярной ( $\square K_S(q^2)$ ) запирающих частей [5]:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} | \hat{V}_{conf} | \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle = \\ & = \frac{N_{k,k'}}{(2\pi)^3} [K_V(q^2) \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \left( \gamma^\mu + \frac{i\mathbf{k}_q}{2m_q} (k_1 - p_1)_\nu \sigma^{\mu\nu} \right) u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \times \\ & \times \bar{u}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \left( \gamma^\mu + \frac{i\mathbf{k}_Q}{2m_Q} (p_2 - k_2)_\nu \sigma^{\mu\nu} \right) u_{\lambda_{p_2}}(p_2) + K_S(q^2) \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \bar{u}_{\lambda_{k_2}}(k_2) u_{\lambda_{p_2}}(p_2)], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$K_V(q^2) = -\frac{8\pi A_V}{\mathbf{q}^4} + \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) B_V(k), \quad K_S(q^2) = -\frac{8\pi A_S}{\mathbf{q}^4} + \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) B_S(k). \quad (23)$$

Потенциал (22) в нерелятивистском пределе переходит в линейный запирающий потенциал  $V(r) = \sigma r + w$  с параметрами

$$\sigma = (A_V - A_S), \quad w = (B_V - B_S). \quad (24)$$

Таким образом, можно сказать, что сумма  $\langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} | \hat{V}_{pen} + \hat{V}_{conf} | \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle$ , определенная соотношениями (20) и (22), является релятивистским обобщением корнельского потенциала (1).

### Пертурбативная часть ядра радиального уравнения

Расчет  $V_{\lambda'_1, \lambda'_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k)$  и, соответственно,  $V_{\ell', S'; \ell, S}^J(k', k)$ , посредством которого определяется пертурбативная часть ядра интегрального уравнения (8), проведем в два этапа. Сначала вычислим спинорную часть потенциала  $\langle \mathbf{k}', \lambda'_1, \lambda'_2 | \hat{V} | \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ , а затем проведем интегрирование по угловым переменным.

Спинорную часть потенциала (20) рассчитаем с помощью метода базисных спиноров [19], [20]. В данном подходе фермионная цепочка с оператором  $Q$ , который выражается через комбинацию матриц Дирака, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p) Q u_{\lambda_k}(k, s_k) = \sum_{\sigma, \rho = -1}^1 \sum_{A, C = -1}^1 \bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p) u_{-\sigma}(b_{-C}) \times \\ & \quad \{ \bar{u}_{\sigma}(b_C) Q u_{-\rho}(b_{-A}) \} \bar{u}_{\rho}(b_A) u_{\lambda_k}(k, s_k) \\ & = \sum_{\sigma, \rho = -1}^1 \sum_{A, C = -1}^1 \bar{s}_{\lambda_p, \sigma}^{(C, 1)}(p) \Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A} [Q] s_{\rho, \lambda_k}^{(A, 1)}(k), \quad (\sigma, \rho, C, A = \pm 1), \end{aligned} \quad (25)$$

где коэффициенты разложения по базисным спинорам  $_{\rho, \lambda_k}^{(A, D)}(k)$  для спиральных состояний определены посредством соотношения ( $D = 1$  соответствует фермиону, а  $D = -1$  – антифермиону):

$$s_{\rho, \lambda_k}^{(A, D)}(k) = \lambda_k D_{A \rho/2, D \lambda_k/2}^{*1/2}(\phi_k, \theta_k, \phi_k) W_{m_k}(D \rho \lambda_k \times k) \quad (26)$$

с вспомогательной функцией

$$W_{m_k}(\pm k) = \sqrt{\omega_{m_k}(k) \pm k}. \quad (27)$$

Конструкция  $\Gamma(Q)$  для произведения матриц Дирака  $Q$

$$\Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A}(Q) \equiv \bar{u}_{\sigma}(b_C) Q u_{-\rho}(b_{-A}) \quad (28)$$

вычисляется через 4-вектора  $b_A$  и  $n_{\lambda}$  ( $A, C, \rho, \sigma = \pm 1$ ) посредством соотношений [19], [20]:

$$\begin{aligned} & \gamma^\mu u_{\rho}(b_A) = 2 b_A^\mu u_{-\rho}(b_{-A}) - 2 A n_{-A \times \rho}^\mu u_{-\rho}(b_A), \\ & \gamma_5 u_{\rho}(b_A) = \rho u_{\rho}(b_A), \quad \bar{u}_{\sigma}(b_C) u_{\rho}(b_A) = \delta_{\sigma, -\rho} \delta_{C, -A}. \end{aligned} \quad (29)$$

Векторы  $b_A$  и  $n_\lambda$  образуют изотропную тетраду пространства Минковского

$$b_A = 1/2(l_0 + A l_3), n_\lambda = 1/2(\lambda l_1 + i l_2), \quad A, \lambda = \pm 1, \quad (30)$$

где 4-векторы  $l_A$  ( $A = 0, 1, 2, 3$ ) определяют ортонормальный базис данного пространства с метрическим тензором  $g$ , т. е.  $(l_A l_B) = g_{AB}$ .

Подставляя коэффициенты разложения (26), получим произведение фермионных токов  $(j(1)j(2))$ , входящих в (20), которое запишется в виде

$$\begin{aligned} & N_{k,k'} \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \gamma^\mu u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \bar{v}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \gamma_\mu v_{\lambda_{p_2}}(p_2) = \\ & = 2 \sum_{\sigma, \rho = -1}^1 \sqrt{(1 - \sigma \lambda_{k_1} v_{k_1})(1 + \rho \lambda_{k_2} v_{k_2})} \sqrt{(1 - \sigma \lambda_{p_1} v_{p_1})(1 + \rho \lambda_{p_2} v_{p_2})} \times \\ & \times [\delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \rho \sigma D_{-\lambda_{k_1}/2, \lambda_{p_1}/2}^{*1/2}(\phi, \beta, -\phi) D_{\lambda_{k_1}/2, -\lambda_{p_2}/2}^{*1/2}(\phi, \beta, -\phi) + \\ & + \delta_{\sigma \lambda_{k_2}, -\rho \lambda_{k_1}} D_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{p_1}/2}^{*1/2}(\phi, \beta, -\phi) D_{-\lambda_{k_2}/2, -\lambda_{p_2}/2}^{*1/2}(\phi, \beta, -\phi)], \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$v_{k_1} = \frac{k}{\omega_{m_q}(k)}, \quad v_{p_1} = \frac{k'}{\omega_{m_q}(k')}, \quad v_{k_2} = \frac{k}{\omega_{m_q}(k)}, \quad v_{p_2} = \frac{k'}{\omega_{m_q}(k')}. \quad (32)$$

В дальнейшем, согласно (10), для интегрирования по угловым переменным будут необходимы спинорные структуры потенциала, умноженные на  $D_{\lambda, \lambda'}^J(\phi, \beta, -\phi)$  с  $\lambda = (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})/2$  и  $\lambda' = (\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2})/2$ .

Представление спинорной части в форме (31) и разложение Клебша – Гордана для  $D$  матриц

$$\begin{aligned} & D_{\lambda, \lambda'}^J(\phi, \beta, -\phi) D_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{p_1}/2}^{*s_1}(\phi, \beta, -\phi) D_{-\lambda_{k_2}/2, -\lambda_{p_2}/2}^{*s_2}(\phi, \beta, -\phi) = \\ & = \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{\ell=|J-s|}^{J+s} \frac{(2\ell+1)}{(2J+1)} C_{\lambda_{k_1}/2, -\lambda_{k_2}/2}^{s_1, s_2} C_{\lambda_{p_1}/2, -\lambda_{p_2}/2}^s C_{0, \lambda, \lambda'}^{\ell, S, J} C_{0, \lambda', \lambda}^{\ell, S, J} P_\ell(\cos \beta) \end{aligned} \quad (33)$$

позволяет записать подынтегральное выражение формулы (10) как линейную комбинацию полиномов Лежандра  $P_\ell(\cos \beta)$  и таким образом разделить угловые переменные и переменные  $k = |\mathbf{k}|, k' = |\mathbf{k}'|$ . Такое построение существенно упрощает следующий этап интегрирования. Для сокращения записи рассчитанных структур введем вспомогательные функции

$$G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, s_1, s_2}[\Phi(x)] = \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{\ell=|J-s|}^{J+s} \frac{(2\ell+1)}{(2J+1)} C_{\lambda_{k_1}/2, -\lambda_{k_2}/2}^{s_1, s_2} C_{\lambda_{p_1}/2, -\lambda_{p_2}/2}^s C_{0, \lambda, \lambda'}^{\ell, S, J} C_{0, \lambda', \lambda}^{\ell, S, J} \Phi_\ell(x) \quad (34)$$

и

$$W_{\lambda, \rho}(k) = \sqrt{1 + \lambda v_{k_1}} \sqrt{1 + \rho v_{k_2}}, \quad W_{\lambda, \rho}(k') = \sqrt{1 + \lambda v_{p_1}} \sqrt{1 + \rho v_{p_2}}. \quad (35)$$

В итоге ядро радиального уравнения, определяемое первой частью потенциала (20), после тривиального интегрирования по углу  $\phi$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} & V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{(I)}(k, k') = 2 \sum_{\sigma, \rho = -1}^1 W_{-\sigma \lambda_{k_1}, \rho \lambda_{k_2}}(k) W_{-\sigma \lambda_{p_1}, \rho \lambda_{p_2}}(k') [\delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \rho \sigma \times \\ & \times G_{-\lambda_{k_1}, \lambda_{k_1}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2}[\tilde{R}_\ell(k, k')] + \delta_{\sigma \lambda_{k_2}, -\rho \lambda_{k_1}} G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2}[\tilde{R}_\ell(k, k')]]. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогичные вычисления для второй части потенциала (20)

$$V_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}; \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^{(II)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{N_{k, k'}}{8\pi^2} \frac{4\alpha_s(q^2)}{3q^4} (q j_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}}(p_1, k_1)) (q j_{\lambda_{p_2}, \lambda_{k_2}}(p_2, k_2)) \quad (37)$$

приводят к вкладу вида

$$V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{(II)}(k, k') = G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2}[\tilde{U}(k', k)] \sum_{\sigma, \rho = -1}^1 W_{-\sigma \lambda_{k_1}, \rho \lambda_{k_2}}(k) W_{-\sigma \lambda_{p_1}, \rho \lambda_{p_2}}(k'). \quad (38)$$

Функции  $\tilde{R}_\ell(k', k)$  и  $\tilde{U}_\ell(k', k)$ , входящие в уравнения (36) и (38), выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell(k', k) = \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{\alpha_s(q^2) P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad (39)$$

$$\tilde{U}_\ell(k', k) = c(k', k) \int_{-1}^1 \frac{\alpha_s(q^2) P_\ell(x)}{q^4} dx. \quad (40)$$

Размерный множитель  $c_{12}(k', k)$  в (40)

$$c(k', k) = \left(\omega_{m_q}(k') - \omega_{m_q}(k)\right) \left(\omega_{m_Q}(k) - \omega_{m_Q}(k')\right) \quad (41)$$

делает размерность функций  $\tilde{R}_\ell$  и  $\tilde{U}_\ell$  одинаковой. Для вычисления ядра уравнения (8) необходимо воспользоваться соотношением (9).

Соотношения (36) и (38)–(40) позволяют получить пертурбативную часть ядра радиального уравнения (8) как для синглетного, так и для триплетного состояний системы кварк-антикварк с произвольным угловым моментом  $J$ , четностью  $(-1)^{\ell+1}$  с произвольными массами  $m_q, m_Q$ , если известно поведение бегущей константы связи в КХД –  $\alpha_s(q^2)$ .

### Заключение

В работе получено ядро пертурбативной части для релятивистского радиального уравнения системы кварк-антикварк с произвольным полным моментом  $J$ , спиновым моментом  $S=0,1$  и неравными массами. В основе работе лежит точное (без разложений по скоростям фермионов системы) вычисление спинорных структур релятивистского обобщения корнельского потенциала, что в свою очередь приводит к необходимости решать одномерное интегральное уравнение, а не трехмерное.

В дальнейшем авторы планируют провести полный аналогичный расчет всех составных частей релятивистского корнельского потенциала, а также определить его параметры на основе современных экспериментальных данных.

### Литература

1. Charmonium : comparison with experiment / E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita [et al.] // Phys. Rev. – 1980. – Vol. D21. – P. 203.
2. Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States / E. Eichten, T. Kinoshita, K. Gottfried [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 34. – P. 369–372.
3. Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupperecht, F.F. Schoberl // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.
4. Пилькун, Х. Физика релятивистских частиц / Х. Пилькун. – М. : Мир, 1983. – 542 с.
5. V.O. Galkin, A.Y. Mishurov, R.F. Faustov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1992. – Vol. 55. – P. 1207–1213.
6. Dirac, P.A.M. Forms of relativistic dynamics / P.A.M. Dirac // Rev. of Modern Phys. – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.
7. Keister, B. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B. Keister, W. Polyzou // «Advances in Nuclear Physics» Plenum. New York. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
8. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, 2. – С. 268–318.
9. Браун, Д.Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Д.Е. Браун, А.Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1979. – 248 с.
10. Desplanques, B. Nucleon and pion form factors in different forms of relativistic quantum mechanics / B. Desplanques // Int. J. Mod. Phys. – 2005. – Vol. A20. – P. 1601–1606.

11. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
12. Savkli, C. The role of interaction vertices in bound state calculations / C. Savkli, F. Gross, J. Tjon // *Phys. Lett.* – 2002. – Vol. B531. – P. 161–166.
13. Klink, W.H. Point-form electrodynamics and the construction of conserved current operators / W.H. Klink // *Few Body Syst.* – 2003. – Vol. 33. – P. 99–110.
14. Krutov, A.F. Isgur-Wise function in a relativistic model of constituent quarks / A.F. Krutov, O.I. Shro, V.E. Troitsky // *Phys. Lett.* – 2001. – Vol. B502. – P. 140–146.
15. Savkli, C. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism / C. Savkli, F. Gross // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. C63. – P. 035208.
16. Solving nonperturbative flow equations / J.A. Adams [et al.] // *Mod. Phys. Lett.* – 1995. – Vol. A10. – P. 2367–2380.
17. Gubankova, E. Flow equations for quark-gluon interactions in light-front QCD / E. Gubankova, C.-R. Ji, S.R. Cotanch // *Phys. Rev.* – 2000. – Vol. D62. – P. 125012.
18. Lucha, W. Effective Potential Models for Hadrons / W. Lucha, F.F. Schoberl [Electronic resource]. – 1995. – Mode of access : <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9601263>. – Date of access : 14.01.2008.
19. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // *Ядерная физика.* – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.
20. Андреев, В.В. Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель : УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины

Поступило 25.05.12