Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

УДК 521.1; 524.3

Моделирование периодических орбит в общей задаче трёх тел небесной механики

В.В. Диндиков, Г.Ю. Тюменков

В работе в рамках общей задачи трёх тел небесной механики решаются динамические уравнения для нерелятивистской системы с ньютоновским потенциалом и моделируются две новые периодические орбиты. Используются принцип наименьшего действия, Фурье-анализ и возможности компьютерной симуляции пакета Mathematica.
Ключевые слова: система трех тел, гравитационное взаимодействие, функционал действия, периодическая орбита, ряд Фурье, компьютерное моделирование.

In the paper in framework of the general three-body problem of celestial mechanics the dynamic equations for nonrelativistic system with Newtonian potential are solved and two new periodic orbits are simulated. The principle of the least action, Fourier analysis and Mathematica possibilities of computer simulation were used.
Keywords: three-body system, gravitational interaction, action functional, periodic orbit, Fourier series, computer simulation.

Известно, что общая задача трёх тел небесной механики до настоящего времени не имеет точных аналитических решений, поэтому часто изучаются её частные случаи, например, ограниченная задача трех тел. Особый интерес в рамках общей задачи представляет поиск периодических орбит, то есть совокупностей замкнутых траекторий, по которым перемещаются компоненты системы при условии равенства периодов обращения каждой. Первые точные периодические решения для тел равной массы были найдены в своё время Эйлером и Лагранжем. Последующие же продуктивные исследования в данном направлении стали возможными только с развитием вычислительных технологий в XX веке.

Пуанкаре для нахождения периодических орбит предложил использовать принцип наименьшего действия. В дальнейшем же независимо от него эта идея была продуктивно развита Муром [1], рассмотревшим обобщенный потенциал взаимодействия между телами вида $V \propto r^{\alpha}$, который при $\alpha = -1$ соответствует гравитационному потенциалу Ньютона. Им было показано, что периодические орбиты действительно соответствуют минимуму функционала действия

$$S = \int_0^T (K - V)d\tau\,, \tag{1}$$

где K – кинетическая энергия, а V – потенциальная энергия системы N тел в системе центра инерции, T – общий период обращения компонентов системы, $\tau \in (0,\ T)$. Традиционно для упрощения дальнейшего анализа в функционале (1) используют угловую переменную $t = (2\pi/T)\cdot\tau$, меняющуюся в пределах $t \in (0,\ 2\pi)$. Это удобно, например, при использовании элементов Фурье-анализа, что характерно для данной работы и что без потери качества приводит к переопределению функционала вида $A = (2\pi/T)S$.

В данной работе в рамках общей задачи трёх тел небесной механики на основе использования принципа наименьшего действия, элементов Фурье, анализа и возможностей компьютерной симуляции с использование пакета Mathematica решаются динамические уравнения для нерелятивистской системы трёх тел с ньютоновским потенциалом и моделируются новые периодические орбиты. Для проверки достоверности используемого алгоритма предварительно на его основе моделируются ранее хорошо известные классические периодические орбиты.

В общем случае для системы n тел с массами m_j обозначим z_j координаты положения j-го тела в момент времени τ с соответствующим значением аргумента t. Тогда для n тел с траекториями $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ функционал действия A запишется в виде [2]:

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\sum_j \frac{m_j}{2} \left| \dot{z}_j \right|^2 + \sum_{j,k;k<j} \frac{m_j m_k}{\left| z_j - z_k \right|} \right) dt \,. \tag{2}$$

Далее используем разложение траекторий в ряды Фурье

$$z_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}, \quad \gamma_k \in X. \tag{3}$$

Задачу трёх тел рационально полагать плоской, поэтому траектории для такой задачи будут двухкомпонентными $z_j(t) = \{x_j(t), y_j(t)\}$ с $\gamma_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$, представимыми, следуя (3), в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^c \cos(kt) + a_k^s \sin(kt)) \\ y(t) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^c \cos(kt) + b_k^s \sin(kt)), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &a_0 = \alpha_0, \quad a_k^c = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad a_k^s = \beta_{-k} - \beta_k, \\ &b_0 = \beta_0, \quad b_k^c = \beta_k + \beta_{-k}, \quad b_k^s = \alpha_k - \alpha_{-k}. \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим плоское движение трёх тел равной массы. Так как функционал действия в пространстве параметров $a_0, a_k^c, a_k^s, b_0, b_k^c, b_k^s$ имеет множество локальных минимумов, то должно существовать множество периодических орбит, среди которых присутствуют как известные, так и новые, нахождение которых определяется уровнем качества и точностью метода исследования.

Моделирование периодических орбит и определение областей их устойчивости осуществляется путем численного интегрирования динамических уравнений [3]–[4] для системы трёх тел

$$m_j \ddot{z}_j^{\alpha} = \sum_{k:k\neq j} m_j m_k \frac{z_j^{\alpha} - z_k^{\alpha}}{\left| z_j - z_k \right|^3}; \qquad j = 1, 2, 3, \qquad \alpha = 1, 2; \tag{5}$$

с учетом минимизации функционала (2), использованием разложений (4) и заданием начальных положений компонентов системы.

Для нахождения минимумов функционала действия используем встроенный в среду Mathematica инструмент *Findminimum*, который находит локальные минимумы в зависимости от начальных значений параметров. Поэтому найденные решения сильно зависят от выбора последних, что в нашем случае производилось случайным образом. Стандартной точности вычисления для нашего случая было недостаточно, поэтому параметр *MaxIterations* был увеличен до значения 100. Этот уровень точности потребовал учёта семи слагаемых рядов Фурье, что довело число параметров до 90. Дальнейшее увеличение точности приводит к резкому линейному росту расхода оперативной памяти компьютера. После нахождения локального минимума мы имеем новый набор значений параметров, который записывается в файл для возможности их дальнейшего исследования и построения орбит.

В рамках изложенной выше методики для системы трёх тел одинаковой массы были построены две ранее известные, тестовые для нас орбиты – «восьмерка» и орбита Хилла (рисунок 1).

Это подтвердило корректность метода исследования. Также на орбитах указаны определяющие их форму начальные положения тел. Следует заметить, что орбита «восьмерка» относится к интересному классу, называемому «хореографии». Этот класс предполагает совпадение орбит всех компонентов системы.

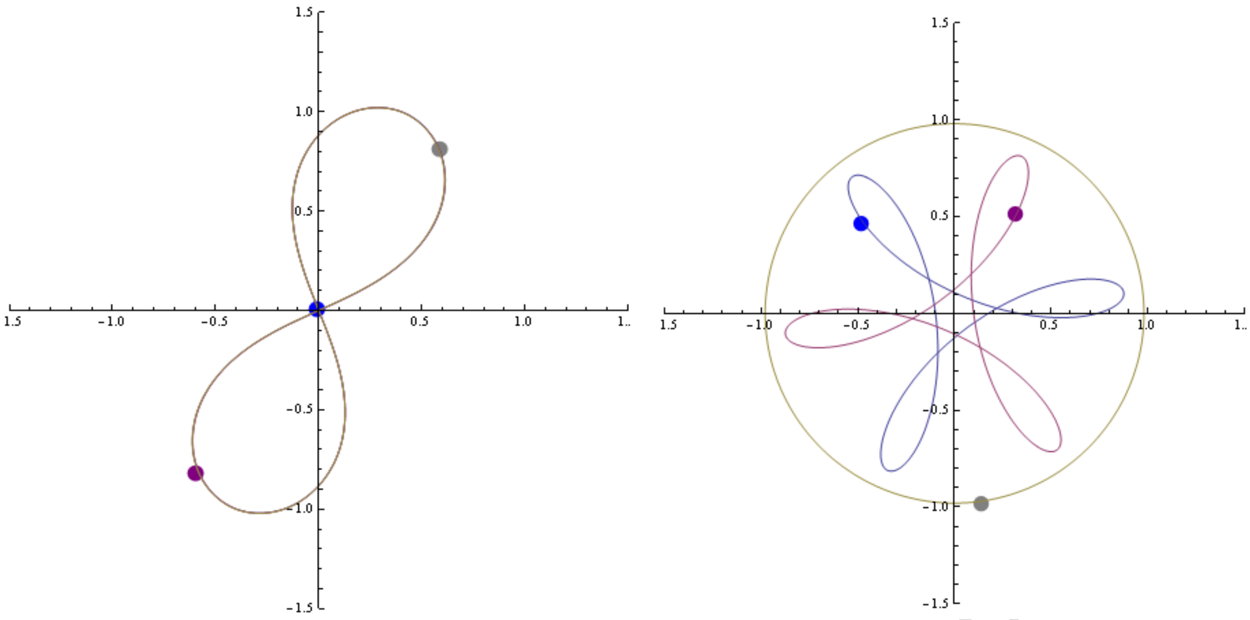

Рисунок 1 – Орбита «восьмерка» (слева) и орбита Хилла (справа)

Если коснуться проблемы устойчивости периодических орбит, то её можно продемонстрировать работой [1] на примере «восьмерки» (рисунок 2). В ней показано, что даже на уровне использования десяти слагаемых ряда Фурье существует область устойчивого движения по орбитам, очень близким к «восьмерке» на некотором интервале времени.

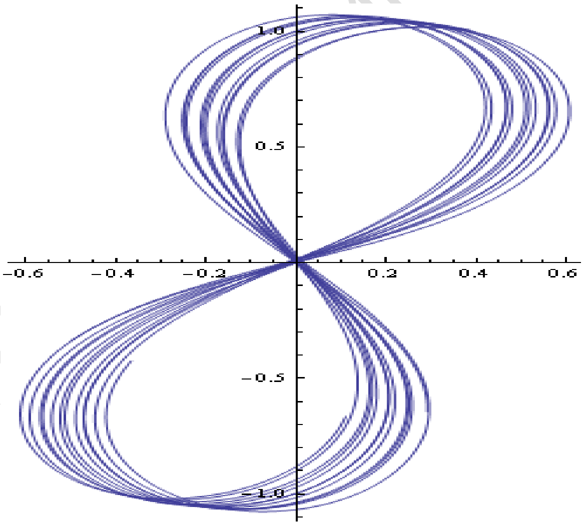

Рисунок 2 – Область устойчивого движения по орбитам, близким к «восьмерке»

Далее в рамках проверенной методики была найдена новая периодическая орбита (в дальнейшем – Новая I) для трёх тел равной массы, представленная на рисунке 3. Два тела двигаются по симметричным замкнутым кривым, а третье тело совершает движение вдоль вытянутой восьмерки, очень близкой к горизонтальной оси. Концы этой восьмерки практически «острые», так как тело в моменты нахождения в крайней точке резко приобретает нулевую скорость. В начальный момент времени все три тела расположены на одной прямой, причем скорость третьего тела равна нулю, а второе и первое тело имеют одинаковые по модулю, но противоположные по направлению скорости, перпендикулярные этой прямой. Через промежуток времени $\tau = T/4$ тела снова выстраиваются в линию, причем третье тело в этот момент времени находится в центре масс системы.

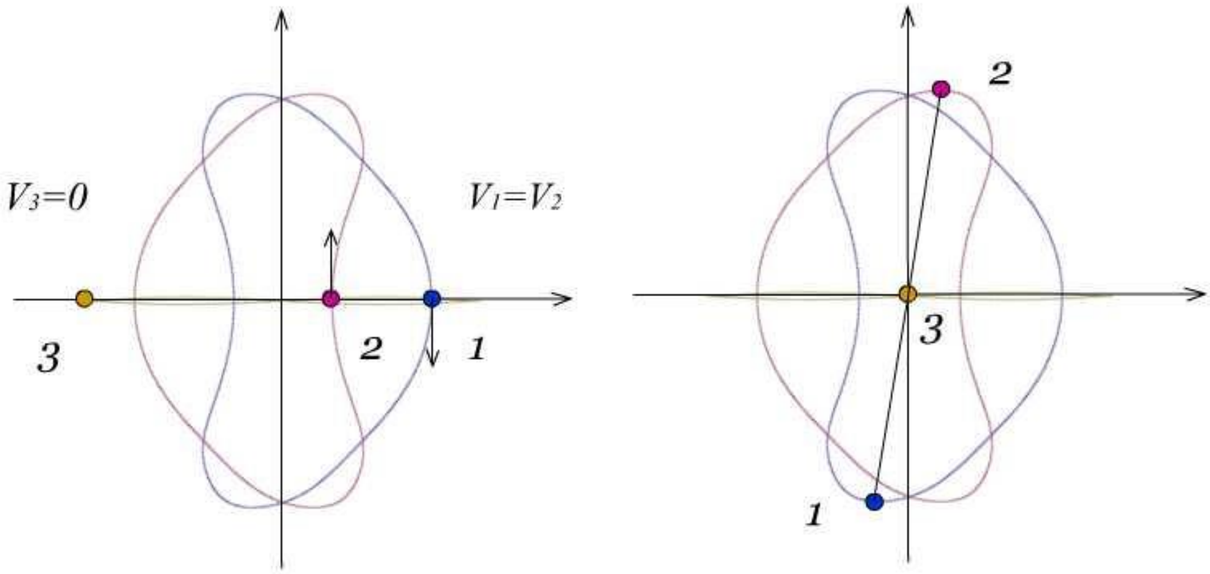

Рисунок 3 – Положения тел на орбите Новая I при $\tau = 0$ (слева) и $\tau = T/4$ (справа)

Часто для анализа и дополнительной визуализации орбит используются диаграммы, изображающие «косы» из *n* «прядей», которые строятся в трехмерном пространстве при движении *n* тел на плоскости [5]. Диаграммы показывают на протяжении одного периода для каждого из тел изменение одной из пространственных координат (ось абсцисс) со временем (ось ординат), а также то, какая из «прядей» при их пересечении проходит выше (с учетом второй координаты). Диаграммы для полученной нами орбиты Новая I приведены ниже.

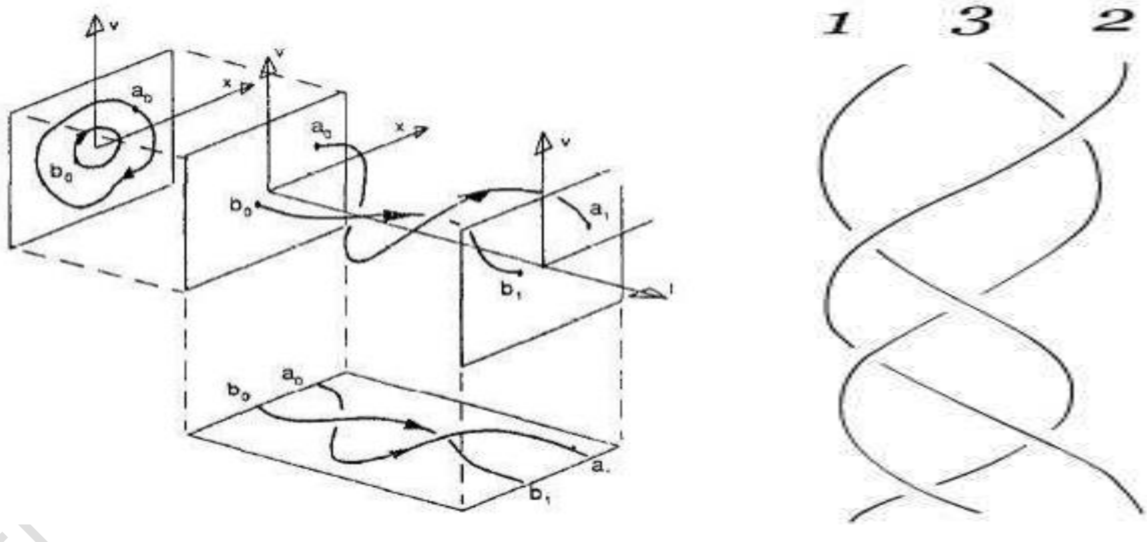

Рисунок 4 – Пример трехмерного формирования диаграммы «коса» (слева) и ее явный вид для орбиты Новая I (справа)

Также был исследован интересный частный случай системы, состоящей из трёх тел, имеющих различные массы, отношение между которыми определяется так называемым «золотым сечением»:

$$m_1 = 1{,}5(5^{0,5} - 1)m; \qquad m_2 = 0{,}5(5^{0,5} - 1)[3 - 1{,}5(5^{0,5} - 1)]m;$$

$$m_3 = 3 - 1{,}5(5^{0,5} - 1) - 0{,}5(5^{0,5} - 1)\,[3 - 1{,}5(5^{0,5} - 1)]m.$$

И получена соответствующая периодическая орбита – Новая II.

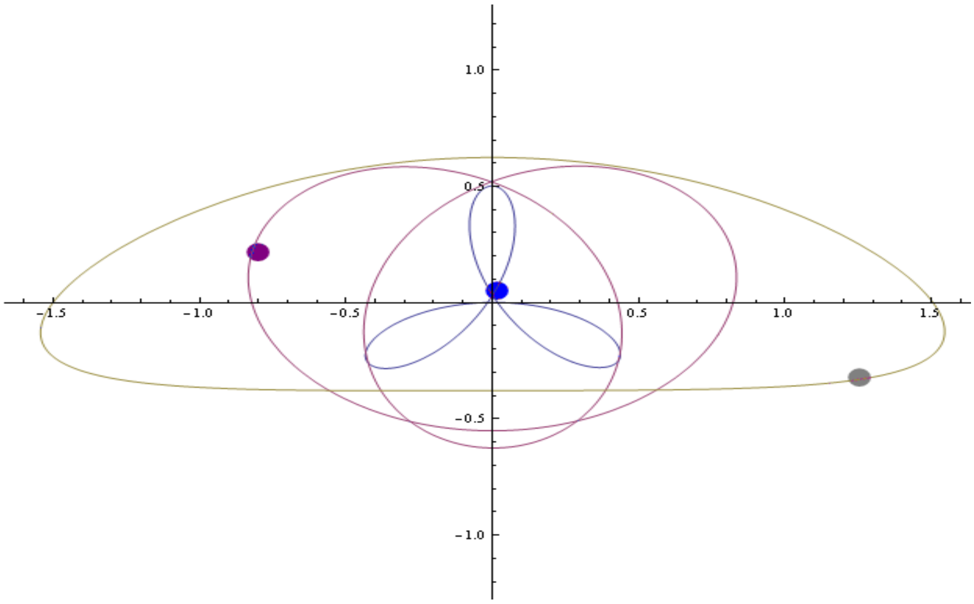

Рисунок 6 – Периодическая орбита Новая II для частного случая неравных масс

Вид траекторий и начальные положения тел показаны на рисунке 6. Появление новых параметров задачи за счет двух дополнительных массовых степеней свободы значительно усложняет анализ, но не лишает теоретической привлекательности. Поэтому исследование области устойчивости и установление вида диаграммы «коса» для орбиты Новая II будет проведено в ближайшем будущем, и хочется надеяться, с использованием более мощной компьютерной техники и новейшего программного обеспечения. То же самое в значительной степени касается и корректного определения области устойчивости орбиты Новая I.

Литература

1. Moore, C. Braids in classical dynamics / C. Moore // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 3675–3683.
2. Vanderbei, R.J. New orbits for the n-body problem / R.J. Vanderbei // Annals of the New York Academy of Sciences. – 2004. – Vol. 1017. – P. 422–430.
3. Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой. – М. : Мир, 1981. – 545 с.
4. Орлов, В.В. Периодические орбиты в задаче N тел / В.В. Орлов, А.В. Рубинов, А.И. Мартынов // Физика Космоса. – Екатеринбург : УГУ, 2010. – С. 108–121.
5. Hinks, J. Knot Theory and Dynamics / J. Hinks. – Cornell University : MATH 4530, 2009. – 10 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12