

Электродинамический анализ двумерно-периодических решеток из проволочных структур

В.П. Кудин

Предложен метод расчета бесконечных плоских фазированных антенных решеток и частотно-селективных поверхностей, состоящих из проволочных структур. Каждая структура содержит прямолинейные элементы, произвольным образом ориентированные в пространстве.

Ключевые слова: двумерно-периодические структуры, интегральные уравнения, проволочные антенны, функции Грина, численные методы.

A method for the calculation of the infinite planar phased arrays and frequency-selective surfaces consisting of wire structures is proposed in the article. Each structure is composed of arbitrary oriented linear wire elements.

Keywords: two-dimensional periodic structures, integral equations, wire antennas, Green functions, numerical methods.

Введение

Анализ многоэлементных фазированных антенных решеток (ФАР) и частотно-селективных поверхностей в большинстве случаев проводится на модели бесконечной решетки. Если элементы бесконечной решетки возбуждаются равноамплитудно с прогрессивным фазовым набегом (режим ФАР), то такому условию подчиняются и поля решетки, в частности, токи на излучателях (теорема Флоке [1]). Таким образом, достаточно определить распределение токов или полей на одном излучателе. Следовательно, по своей размерности задачи о бесконечной ФАР и единичном излучателе эквивалентны. Математически различие заключается лишь в используемой функции Грина. В случае двумерно-периодической решетки функция Грина представляет собой пространственный двумерный ряд, который сходится довольно медленно. Применение преобразования Пуассона приводит к широко используемому двумерному спектральному ряду, сходимость которого также достаточно медленная и сопоставима со сходимостью пространственного ряда. В литературе известны различные способы ускорения сходимости: метод Эвальда [2], методы, основанные на преобразовании Шанкса [3]–[5] и Куммера [6], [7]. Известны и более сложные схемы [8].

Вместе с тем необходимо отметить, что конечной целью является решение граничной задачи электродинамики, которая формулируется в общем случае в виде набора интегродифференциальных уравнений относительно полей или токов на излучателе. Применительно к проволочным излучателям следует говорить о решении интегральных уравнений типа Поплингтона [9] или Мэя [10] относительно осевого тока на проводниках. В указанных уравнениях присутствуют линейные интегральные операторы, содержащие первую и вторую производные от функции Грина. Применение метода моментов для решения этих уравнений приводит к тому, что матричные элементы выражаются в виде двойных интегралов, которые должны быть найдены численно, и ввиду их большого количества данная процедура требует серьезных вычислительных затрат. Эти обстоятельства фактически сводят на нет преимущества, полученные от ускорения сходимости рядов для функции Грина, и на практике приводят к невозможности решить задачу для излучателей, отличающихся от простейших.

В данной работе на основе Фурье-представления функции Грина получены аналитические представления для элементов матрицы взаимных импедансов, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты при последующем их расчете.

Функция Грина бесконечной плоской ФАР

Рассматривается бесконечная плоская решетка проволочных структур произвольной формы, расположенных в узлах косоугольной сетки (рисунок 1).

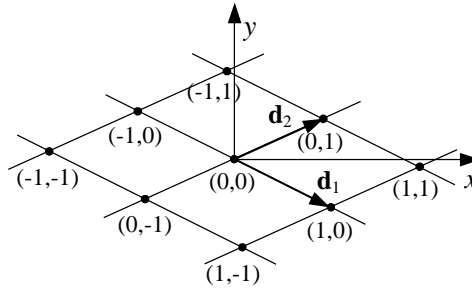


Рисунок 1 – Косоугольная сетка размещения излучателей

Сетка определяется векторами \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , которые для определенности будем считать параллельными плоскости Oxy .

Функция Грина бесконечной ФАР есть

$$G^\infty(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}_{mn}) \exp(-im\psi_1 - in\psi_2), \quad (1.1)$$

где функция Грина одиночного излучателя в свободном пространстве выражается формулой

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (1.2)$$

а ψ_1 и ψ_2 являются разностями фаз между комплексными амплитудами возбуждения соседних элементов вдоль соответствующих осей, вектор $\mathbf{r}_{mn} = m\mathbf{d}_1 + n\mathbf{d}_2$ определяет узлы косоугольной сетки, k – волновое число.

Получим выражение для функции Грина плоской решетки в требуемой форме. Для этого функцию Грина (1.2) в соответствии с [11] представим в спектральном виде

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}^2 - k^2} \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{k} = (\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3)^T$. Подставив (1.3) в (1.1), поменяв порядок суммирования и интегрирования, применив формулу суммирования Пуассона, проделав замену переменных и используя фильтрующие свойства дельта-функции Дирака, после преобразований получим искомое выражение

$$G^\infty(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi A} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}_{pq}^2 - k^2} \exp[-i\mathbf{k}_{pq}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] d\kappa_3, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{k}_{pq} = \mathbf{k}_{pq}^\perp + \mathbf{z}\kappa_3, \quad \mathbf{k}_{pq}^\perp = (p+p_0)\mathbf{k}_1 + (q+q_0)\mathbf{k}_2,$$

$A = \mathbf{z}[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$ – площадь единичной ячейки, \mathbf{z} – орт вдоль соответствующей оси, а вектор \mathbf{k}_{pq}^\perp является проекцией пространственного волнового вектора \mathbf{k}_{pq} порядка pq на плоскость решетки. Векторы $\mathbf{k}_1 = 2\pi[\mathbf{d}_2, \mathbf{z}]/A$ и $\mathbf{k}_2 = 2\pi[\mathbf{z}, \mathbf{d}_1]/A$ образуют базис на плоскости волновых чисел. Величины $p_0 = \psi_1/2\pi = \mathbf{k}\mathbf{d}_1/2\pi$ и $q_0 = \psi_2/2\pi = \mathbf{k}\mathbf{d}_2/2\pi$ суть межэлементные нормированные фазовые сдвиги вдоль соответствующих осей, волновой вектор $\mathbf{k} = k(\sin\theta_0 \cos\varphi_0 \ \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \ \cos\theta_0)^T$, где углы (θ_0, φ_0) определяют направление фазирования в сферической системе координат.

Обычно вместо (1.3) используется следующее выражение для функции Грина [11]:

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\kappa_1(x-x') - i\kappa_2(y-y') - \gamma|z-z'|]}{\gamma} d\kappa_1 d\kappa_2, \quad (1.5)$$

которое получается из (1.3), если по одной из переменных провести интегрирование. На основе (1.5) получается широко известное выражение для функции Грина плоской бесконечной решетки

$$G^\infty(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2A} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\mathbf{k}_{pq}^\perp(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \gamma_{pq}|z-z'|]}{\gamma_{pq}}. \quad (1.6)$$

В приведенных формулах $\gamma = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - k^2}$ и $\gamma_{pq} = \sqrt{(\mathbf{k}_{pq}^\perp)^2 - k^2}$.

Выражение (1.6) содержит модуль разности координат, что, как уже упоминалось, приводит к трудностям нахождения полей и последующего вычисления матричных элементов.

Сведение задачи к системе линейных алгебраических уравнений

Полученные выше соотношения являются совершенно общими, и в них никак не конкретизирована геометрия излучателя.

В качестве элемента решетки рассмотрим проволочную систему, состоящую из набора тонких криволинейных проводников. В соответствии с моделью осевого тока будем полагать, что электрическое поле создается линейным током $\mathbf{I}(s') = \mathbf{s}'(s')I(s')$, сосредоточенным на оси проводника, где s' – криволинейная координата, $\mathbf{s}'(s')$ – единичный вектор, касательный к линии тока.

Электрическое поле, порожденное таким током, выражается формулой [11]

$$\mathbf{E}^\infty(\mathbf{r}) = \frac{W}{ik} (k^2 + \text{grad div}) \mathbf{A}^\infty(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{A}^\infty(\mathbf{r}) = \int \mathbf{s}'(s')I(s')G^\infty[\mathbf{r}-\mathbf{r}'(s')]ds'$ – векторный потенциал, а $W = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – волновое сопротивление свободного пространства. В данном случае векторная функция $\mathbf{r}'(s')$ определяет осевую линию проводника.

Проецируя поле (1.7) на единичный вектор $\mathbf{s}(s)$, касательный боковой поверхности проводника, подставляя выражение для векторного потенциала, внося дифференциальный оператор под знак интеграла и учитывая, что функция Грина зависит от разности векторов, после несложных преобразований получим

$$\mathbf{E}^\infty(s)\mathbf{s}(s) = \frac{W}{ik} \int_{L'} \left[k^2 \mathbf{s}(s)\mathbf{s}'(s')G^\infty(s, s') - \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} G^\infty(s, s') \right] I(s') ds'.$$

Здесь обозначено $G^\infty(s, s') = G^\infty[\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}'(s')]$, а векторная функция $\mathbf{r}(s)$ описывает боковую поверхность проводника.

Согласно граничному условию в модели осевого тока продольная касательная полного поля на боковой поверхности проводника равна нулю. Таким образом, имеем интегральное уравнение для тока $I(s')$:

$$\frac{iW}{k} \int_{L'} \left[k^2 \mathbf{s}(s)\mathbf{s}'(s')G^\infty(s, s') - \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} G^\infty(s, s') \right] I(s') ds' = \mathbf{E}^{\text{пад}}(s)\mathbf{s}(s), \quad (1.8)$$

где $\mathbf{E}^{\text{пад}}(s)$ – падающее поле (поле сторонних источников) на боковой поверхности проводника.

Для нахождения распределения тока $I(s')$ применим метод моментов [12]. Следуя стандартной процедуре, разложим искомый ток по системе базисных функций $\{\varphi_n(s'), n \in 1, 2, \dots, N\}$:

$$I(s') = \sum_{n=1}^N I_n \varphi_n(s'). \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и проецируя последнее уравнение на систему весовых функций $\{\psi_m(s'), m \in 1, 2, \dots, N\}$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь матричные элементы Z_{mn} имеют смысл взаимного импеданса между двумя линейными токами с распределениями $\varphi_n(s')$ и $\psi_m(s')$. Для них имеет место формула

$$Z_{mn} = \frac{iW}{k} \int_{L'} \int_{L'} \left[k^2 \mathbf{s}(s) \mathbf{s}'(s') G^\infty(s, s') - \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} G^\infty(s, s') \right] \psi_m(s) \varphi_n(s') ds ds'. \quad (1.10)$$

Элементы столбца правой части вычисляются по формуле

$$V_m = \int_L \mathbf{E}^{\text{над}}(s) \mathbf{s}(s) \psi_m(s) ds, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Примем, что базисные и весовые функции на концах проводников, а в случае использования базиса подобластей и на концах сегментов, обращаются в ноль. Тогда, преобразуя интеграл от второго слагаемого в (1.10) интегрированием по частям, получим

$$Z_{mn} = \frac{iW}{k} \int_{L'} \int_{L'} \left[k^2 \mathbf{s}(s) \mathbf{s}'(s') \psi_m(s) \varphi_n(s') - \frac{d\psi_m(s)}{ds} \frac{d\varphi_n(s')}{ds'} \right] G^\infty(s, s') ds ds'.$$

Подставив в эту формулу выражение (1.4) для функции Грина, окончательно будем иметь

$$Z_{mn}^\infty = \frac{iW}{k} \frac{1}{2\pi A} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{k}_{pq}} \frac{1}{-k^2} \tilde{Z}_{mn}(\mathbf{k}_{pq}) d\mathbf{k}_3, \quad (1.11)$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{mn}(\mathbf{k}_{pq}) = & k^2 \int_L \mathbf{s}_m(s) \psi_m(s) \exp[-i\mathbf{k}_{pq} \mathbf{r}(s)] ds \int_{L'} \mathbf{s}_n(s') \varphi_n(s') \exp[i\mathbf{k}_{pq} \mathbf{r}'(s')] ds' - \\ & - \int_L \frac{d\psi_m(s)}{ds} \exp[-i\mathbf{k}_{pq} \mathbf{r}(s)] ds \int_{L'} \frac{d\varphi_n(s')}{ds'} \exp[i\mathbf{k}_{pq} \mathbf{r}'(s')] ds'. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Вычисление элементов матрицы взаимных импедансов

В дальнейшем рассмотрим проволочные структуры, состоящие из прямолинейных отрезков (сегментов). В этом случае области определения базисных и весовых функций включают несколько сегментов, и интегралы в (1.12) распадаются на сумму интегралов по этим сегментам. В каждом интеграле единичные векторы $\mathbf{s}(s)$ и $\mathbf{s}'(s')$ не зависят от переменной интегрирования и могут быть вынесены за знак интеграла.

Теперь о выборе базисных и весовых функций.

Для структур, содержащих разветвления, был предложен базис [13], автоматически удовлетворяющий условию Кирхгофа в узле (равенству нулю полного тока). В узле вводятся векторные функции, состоящие из двух ветвей, расположенных на разных проводниках, сходящихся к данному узлу. Если в узле сходится M проводников, то достаточно ввести $(M-1)$ подобных функций. В [13] описан универсальный алгоритм с использованием введенных функций для анализа произвольных проволочных структур. Поскольку, как отмечалось ранее, задачи об одиночной структуре и в бесконечной решетке отличаются лишь используемой функцией Грина, то алгоритм [13] полностью применим и к анализу плоских ФАР. Для этого достаточно использовать выражение (1.11) для нахождения матричных элементов.

Легко видеть, что для базисных и весовых функций полиномиального или тригонометрического вида (наиболее употребительных на практике) интегралы в (1.12) вычисляются аналитически. Более того, оказывается, что в этом случае интеграл в (1.11) также вычисляется аналитически. Это означает, что матричные элементы фактически представляются в виде характерных для спектрального подхода двойных рядов, состоящих из замкнутых аналитических выражений.

Ниже описанная процедура будет проведена для часто используемых кусочно-синусоидальных базисных и весовых функций.

Поскольку каждая кусочно-синусоидальная функция состоит из двух синусоидальных полугармоник вида

$$\phi_j(s) = \frac{\sin k(\Delta_j - s)}{\sin k\Delta_j}, \quad j = 1, 2, \quad 0 \leq s \leq \Delta_j,$$

где Δ_j есть длина соответствующего сегмента, то (1.12) и, следовательно, (1.11) являются комбинацией четырех слагаемых.

Для каждого слагаемого в (1.12) после несложных, но громоздких вычислений и преобразований получим

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{12}(\mathbf{\kappa}_{pq}) = & -\frac{k^2 \exp[i\mathbf{\kappa}_{pq}(\mathbf{r}_2^{\text{cp}} - \mathbf{r}_1^{\text{cp}})]}{\sin k\Delta_1 \sin k\Delta_2} \times \\ & \times \left\{ (1 + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \left[e^+ S_1^+ S_2^- + (e^+)^* S_1^- S_2^+ \right] + (1 - \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \left[e^- S_1^+ S_2^+ + (e^-)^* S_1^- S_2^- \right] \right\}, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$e^\pm = \exp\left(ik \frac{\Delta_1 \pm \Delta_2}{2}\right), \quad S_j^\pm = \frac{\sin(k \pm \mathbf{\kappa}_{pq} \mathbf{s}_j) \frac{\Delta_j}{2}}{k \pm \mathbf{\kappa}_{pq} \mathbf{s}_j},$$

а вектор \mathbf{r}_j^{cp} есть середина ветви, на которой расположено плечо синусоидальной гармоники.

Индексы 1 и 2 относятся к весовой и базисной функциям соответственно.

Аналогично матричные элементы будут состоять из слагаемых вида

$$\begin{aligned} Z_{12}^\infty = & -i \frac{15}{k^2 A} \frac{k\Delta_1}{\sin k\Delta_1} \frac{k\Delta_2}{\sin k\Delta_2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp[i\mathbf{\kappa}_{pq}^\perp (\mathbf{r}_2^{\text{cp}} - \mathbf{r}_1^{\text{cp}})_\perp] \times \\ & \times \left\{ (1 + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \left[e^+ \tilde{I}_1 + (e^+)^* \tilde{I}_2 \right] + (1 - \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \left[e^- \tilde{I}_3 + (e^-)^* \tilde{I}_4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В данной формуле

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 = & I(a, b, c_1, t_1^+, c_2, t_2^-), \quad \tilde{I}_2 = I(a, b, c_1, t_1^-, c_2, t_2^+), \\ \tilde{I}_3 = & I(a, b, c_1, t_1^+, c_2, t_2^+), \quad \tilde{I}_4 = I(a, b, c_1, t_1^-, c_2, t_2^-), \end{aligned}$$

$$a = k \left[(r_2^{\text{cp}})_z - (r_1^{\text{cp}})_z \right], \quad b = \frac{\gamma_{pq}}{k}, \quad c_j = \frac{k\Delta_j}{2} (s_j)_z, \quad t_j^\pm = (\mp k - \mathbf{\kappa}_{pq}^\perp \mathbf{s}_j) \frac{\Delta_j}{2}, \quad j = 1, 2,$$

а функция $I(a, b, c_1, t_1, c_2, t_2)$ есть

$$I(a, b, c_1, t_1, c_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iat)}{t^2 + b^2} \frac{\sin(c_1 t - t_1)}{c_1 t - t_1} \frac{\sin(c_2 t - t_2)}{c_2 t - t_2} dt.$$

Данный интеграл может быть вычислен в замкнутом виде. Для этого, используя представление синусоидальной функции через две показательные, запишем его в виде суммы четырех слагаемых $I = I_1 + I_2 - I_3 - I_4$, где

$$\begin{aligned} I_1 = & \bar{I}(a - c_1 + c_2, t_2 - t_1, b, c_1, t_1, c_2, t_2), \quad I_2 = \bar{I}(a + c_1 - c_2, t_1 - t_2, b, c_1, t_1, c_2, t_2), \\ I_3 = & \bar{I}(a + c_1 + c_2, t_1 + t_2, b, c_1, t_1, c_2, t_2), \quad I_4 = \bar{I}(a - c_1 - c_2, -t_1 - t_2, b, c_1, t_1, c_2, t_2), \end{aligned}$$

а введенная функция есть

$$\bar{I}(\bar{c}, \bar{t}, b, c_1, t_1, c_2, t_2) = \frac{\exp(-i\bar{t})}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\bar{c}t)}{(t^2 + b^2)(c_1 t - t_1)(c_2 t - t_2)} dt.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью теории вычетов. После всех преобразований окончательно получим для $\bar{c} \geq 0$ и $\bar{c} \leq 0$ соответственно

$$\begin{aligned} \bar{I}(\bar{c}, \bar{t}, b, c_1, t_1, c_2, t_2) = & \frac{\pi}{4} \exp(-i\bar{t}) \left\{ \frac{\exp(-b\bar{c})}{b(t_1 - ibc_1)(t_2 - ibc_2)} - \right. \\ & \left. - \frac{2i}{c_1 t_2 - c_2 t_1} \left[\frac{\exp\left(i\bar{c} \frac{t_1}{c_1}\right)}{\left(\frac{t_1}{c_1}\right)^2 + b^2} \theta\left(-\frac{t_1}{c_1}\right) - \frac{\exp\left(i\bar{c} \frac{t_2}{c_2}\right)}{\left(\frac{t_2}{c_2}\right)^2 + b^2} \theta\left(-\frac{t_2}{c_2}\right) \right] \right\}, \\ \bar{I}(\bar{c}, \bar{t}, b, c_1, t_1, c_2, t_2) = & \frac{\pi}{4} \exp(-i\bar{t}) \left\{ \frac{\exp(b\bar{c})}{b(t_1 + ibc_1)(t_2 + ibc_2)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{2i}{c_1 t_2 - c_2 t_1} \left[\frac{\exp\left(i\bar{c} \frac{t_1}{c_1}\right)}{\left(\frac{t_1}{c_1}\right)^2 + b^2} \theta\left(\frac{t_1}{c_1}\right) - \frac{\exp\left(i\bar{c} \frac{t_2}{c_2}\right)}{\left(\frac{t_2}{c_2}\right)^2 + b^2} \theta\left(\frac{t_2}{c_2}\right) \right].$$

Здесь использована функция $\theta(x)$, представляющая собой единичный скачок

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Итак, взаимосвязь двух синусоидальных полугармоник в бесконечной плоской ФАР представляется в виде двойного ряда (1.13), члены которого являются замкнутыми аналитическими выражениями. Матричные элементы (элементы матрицы взаимных импедансов) будут состоять из четырех слагаемых вида (1.13), содержащих характерные спектральные двойные ряды. В этом заключается основной результат предлагаемого метода: взаимный импеданс произвольно ориентированных синусоидальных токовых гармоник для проволочной структуры в составе бесконечной плоской ФАР представляется в виде стандартных спектральных двойных рядов.

В остальном алгоритм остается тем же, что и описанный в [13]. Таким образом, переход от одиночной структуры к плоской решетке структур заключается в замене формул, используемых для вычисления взаимной связи полугармоник: вместо выражений из [13] следует использовать формулу (1.13).

Заключение

Таким образом, в данной работе предложен метод расчета характеристик проволочных излучателей в составе бесконечной плоской ФАР с косоугольной сеткой. Каждый излучатель может состоять из набора произвольным образом ориентированных в пространстве прямолинейных проволочных отрезков, включая разветвления, петли и т. д. Для элементов матрицы взаимных импедансов получены двойные спектральные ряды из замкнутых аналитических выражений.

Литература

1. Амитей, Н. Теория и анализ фазированных антенных решеток / Н. Амитей, В. Галиндо, Ч. Ву. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
2. Ewald, P. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale / P. Ewald // Ann. Phys. – 1921. – Vol. 64. – P. 253–287.
3. Singh, S. Application of transforms to accelerate the summation of periodic free-space Green's functions / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1990. – Vol. MTT-38, № 11. – P. 1746–1748.
4. Singh, S. On the use of Shanks's transform to accelerate the summation of slowly converging series / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1991. – Vol. MTT-39, № 3. – P. 608–610.
5. Singh, S. On the use of ρ -algorithm in series acceleration / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1991. – Vol. AP-39, № 10. – P. 1514–1517.
6. Иванишин, М.М. Модификация метода Куммера для эффективного вычисления функции Грина двумерно-периодических структур / М.М. Иванишин, С.П. Скобелев // Радиотехника. – 2008. – № 10. – С. 31–36.
7. Skobelev, S.P. A modification of the Kummer's method for efficient computation of the 2-D and 3-D Green's functions for 1-D periodic structures / S.P. Skobelev // IEEE Transactions. – 2012. – Vol. AP-60, № 1. – P. 412–416.
8. Malyuskin, O. Convergence acceleration of the doubly periodic Green's function for the analysis of thin wire arrays / O. Malyuskin, V. Fusco, A. Schuchinsky // IET Microw. Antennas Propag. – 2008. – Vol. 2, № 5, P. 410–417.

9. Pocklington, H.C. Electrical oscillations in wires / H.C. Pocklington // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1897. – Vol. 9, № 7. – P. 324–332.
10. Mei, K.K. On the integral equations of thin wire antennas / K.K. Mei // IEEE Transactions. – 1965. – Vol. AP-13, № 3. – P. 374–378.
11. Марков, Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1983. – 296 с.
12. Harrington, R.F. Field computation by moment methods / R.F. Harrington. – New York : Machmillan, 1968. – 240 p.
13. Кудин, В.П. Алгоритмизация задач возбуждения проволочных структур / В.П. Кудин, А.П. Рубан // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1986. – Т. 29, № 8. – С. 10–15.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины