

## Численное моделирование поворота плоскости поляризации при отражении СВЧ волны от двумерной решетки на основе металлических спиралей

И.А. ФАНЯЕВ, А.Л. САМОФАЛОВ, И.В. СЕМЧЕНКО, С.А. ХАХОМОВ

Проведен теоретический расчет параметров спирали, основанный на молекулярной теории естественной оптической активности. При помощи компьютерного моделирования в СВЧ диапазоне проведено исследование одиночной спирали с оптимальной формой и решетки размерностью  $3 \times 3$ , состоящей из металлических спиралей. Показано, что расстояние между спиральями в решетке не влияет на поворот плоскости поляризации отраженной волны. Экспериментальные данные, полученные для двумерной решетки, хорошо согласуются с результатом моделирования.

**Ключевые слова:** моделирование, решетка, спираль, угол поворота плоскости поляризации.

The theoretical calculation of parameters of the helix based on the molecular theory of natural optical activity is carried out. A single helix of optimal form and lattice with dimension  $3 \times 3$  consisting of metal helices are investigated by computer simulation in the microwave range. It is shown that the distance between the helices in the lattice does not influence the rotation of the polarization plane of the reflected wave. The experimental data obtained for the 2D lattice are in good agreement with the simulation results.

**Keywords:** modelling, lattice, helix, angle of rotation of polarization plane.

### *Введение*

В природе существуют такие среды, которые способны поворачивать плоскость поляризации падающей волны в оптическом диапазоне. Такие среды называются гиротропными или киральными [1], [2]. В СВЧ диапазоне такую среду можно создать искусственно, например, поместив металлические спиральные элементы с рассчитанными оптимальными параметрами в диэлектрический слой. В работах [3], [4] исследована возможность использования спиральной модели молекул для описания взаимодействия электромагнитных волн с искусственными киральными средами. Полученная аналитическая модель позволяет вычислить электрический дипольный и магнитный моменты, возникающие в спирали при взаимодействии с падающей линейно поляризованной электромагнитной волной с учетом входного сопротивления металлической спирали.

Теоретический анализ, проведенный в данной работе, основан на молекулярной теории естественной оптической активности. Проводится аналогия между спиралевидной молекулой и металлической спиралью без учета зависимости входного сопротивления спирали от угла подъема.

### *Определение оптимального угла подъема спирали на основании модели молекулярной оптической активности*

Проведем оптимизацию параметров спиральных элементов, основываясь на модели молекулярной оптической активности. В работе [5] получена зависимость оптической вращательной способности  $\mathcal{G}$  от параметров спиральных молекул среды:

$$\mathcal{G} = A \frac{r^2 s}{r^2 + s^2}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиус витка спирали,  $|s| = \frac{h}{2\pi}$  – приведенный шаг спирали,  $h$  – шаг спирали.

Коэффициент пропорциональности  $A$  в формуле (1) не зависит от геометрических параметров спиральных траекторий, поэтому его явное выражение можно не учитывать при оптимизации геометрии спиральных элементов.

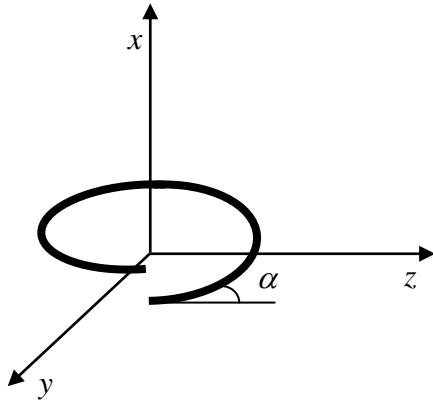


Рисунок 1 – Одновитковая спираль с правосторонним закручиванием ( $q > 0$ )

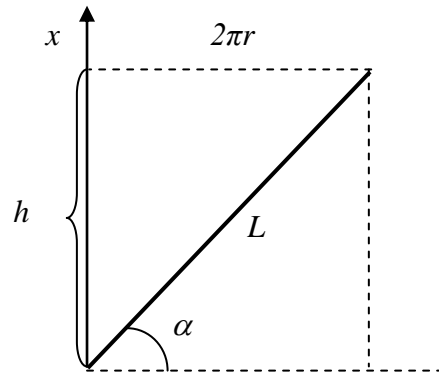


Рисунок 2 – Одновитковая спираль в развернутом виде

Проведем замену  $s = \frac{1}{q}$ , где  $|q| = \frac{2\pi}{h}$  – удельное кручение спирали, тогда

$$\mathcal{G} = A \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1}. \quad (2)$$

Исследуем зависимость  $\mathcal{G}$  от параметров спирали и определим оптимальное значение угла подъема спирали  $\alpha$  и число витков  $N$  (рисунок 1), при котором  $\mathcal{G}$  будет иметь максимальное значение.

Можно показать, что в качестве множителя коэффициент  $A$  содержит количество витков спирали  $N = \frac{L}{L_a}$ , где  $L$  – длина проволоки, из которой изготовлена спираль,  $L_a$  – длина одного витка. Тогда можно записать

$$\mathcal{G} = A_0 N \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1}, \quad (3)$$

где  $A_0$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий одновитковую спираль.

Из геометрических параметров спирали (рисунок 2) выразим  $L_a$ :

$$L_a = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} = 2\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = 2\pi \sqrt{r^2 + \frac{1}{q^2}} = \frac{2\pi}{q} \sqrt{r^2 q^2 + 1}. \quad (4)$$

Преобразуем выражение (3) с учетом  $N$  и  $L_a$ :

$$\mathcal{G} = A_0 N \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1} = A_0 \frac{q}{\sqrt{r^2 q^2 + 1}} \cdot \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1} \cdot \frac{L}{2\pi} = A_0 \frac{r^2 q^2}{(r^2 q^2 + 1)^{3/2}} \cdot \frac{L}{2\pi}. \quad (5)$$

Исследуем полученную зависимость на экстремум, найдем производную  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q}$  и приравняем ее к нулю. После математических преобразований получим:

$$1 - \frac{1}{2} r^2 q^2 = 0, \quad (6)$$

откуда следует, что  $qr = \sqrt{2}$ .

Найдем максимальное значение  $\mathcal{G}$ , подставив  $qr$  в (5):

$$\mathcal{G} = \frac{A_0 L}{3\sqrt{3}\pi}, \quad \mathcal{G} = A_0 \cdot 0,0613L. \quad (7)$$

Найдем значение угла подъема спирали  $\alpha$ , при котором  $\mathcal{G}$  принимает максимальное значение, то есть при условии  $qr = \sqrt{2}$ .

$$\text{Из рисунка 2 найдем } \operatorname{tg} \alpha = \frac{Nh}{2\pi r N} = \frac{2\pi}{q \cdot 2\pi r} = \frac{1}{qr} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует  $\operatorname{tg} \alpha = 0,7071$  или  $\alpha \approx 35^\circ 16'$ .

Рассмотрим несколько частных случаев:

1) число витков спирали  $N = 1$ , и длина спирали соответствует условию главного частотного резонанса (длина проволоки равняется половине длины волны подающего излучения  $L = \frac{\lambda}{2}$ ).

Из формулы (4) получим  $\frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{q} \sqrt{r^2 q^2 + 1}$ , затем путем математических преобразований выразим  $r^2 q^2$  и  $r^2 q^2 + 1$ :

$$r^2 q^2 = \frac{\lambda^2 q^2 - 16\pi^2}{16\pi^2}, \quad (8)$$

$$r^2 q^2 + 1 = \frac{\lambda^2 q^2}{16\pi^2}. \quad (9)$$

Подставим полученные выражения в (3)

$$\mathcal{G} = A_0 \frac{r^2 q}{r^2 q^2 + 1} = A_0 \frac{\lambda^2 q^2 - 16\pi^2}{\lambda^2 q^3}. \quad (10)$$

Исследуем уравнение (10) на экстремум:  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} = 0$ . В итоге получим  $q = \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{3}$ . Тогда

$$\mathcal{G}\left(\frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{3}\right) = A_0 \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot 3\sqrt{3}} = A_0 0,0613L, \quad (11)$$

что полностью соответствует случаю  $\alpha \approx 35^\circ 16'$  согласно (7).

2) пусть  $N \neq 1$ , тогда условие главного резонанса принимает вид

$$L_a = \frac{\lambda}{2N},$$

следовательно,

$$\mathcal{G} = A_0 N \frac{\lambda^2 q^2 - 16\pi^2 N^2}{\lambda^2 q^3}. \quad (12)$$

Здесь мы учитываем, что в качестве множителя  $\mathcal{G}$  содержит число витков  $N$ , поскольку в условиях главного резонанса волны, излучаемые всеми витками спирали, согласованы по фазе.

$$\text{При условии } \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} = 0 \text{ получаем } q = \frac{4\pi N \sqrt{3}}{\lambda}.$$

Значит,

$$\mathcal{G}\left(\frac{4\pi N \sqrt{3}}{\lambda}\right) = \mathcal{G}_{\max} = A_0 N \frac{\lambda}{2N} \frac{1}{\pi \cdot 3\sqrt{3}} = A_0 0,0613L. \quad (13)$$

Следовательно, результат совпадает с (7).

Как видно из полученного выражения,  $\mathcal{G}_{\max}$  не зависит от числа витков  $N$ .

Из проведенных исследований можно сделать вывод, что максимальное значение удельной вращательной способности соответствует углу подъема спирали  $\alpha \approx 35^\circ$  и может быть достигнуто при числе витков  $N = 1$ .

### Компьютерное моделирование

При помощи компьютерного моделирования, основанного на использовании метода моментов (ММ) и метода конечных элементов, исследованы одновитковая спираль с углом

подъема  $35^\circ$  и решетка из таких спиралей размерностью  $3 \times 3$  элемента. Спираль имеет следующие параметры:

$$N = 1; \alpha = 35^\circ; L = 0,05 \text{ м}; r = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; h = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

где  $N$  – число витков спирали;  $\alpha$  – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали;  $L$  – длина проволоки, из которой изготовлена спираль;  $r$  – радиус витка;  $h$  – шаг спирали;  $d$  – диаметр проволоки.

Вся структура рассматривается в вакууме. Спираль является идеальным проводником (PEC). На рисунке 3 показана одиночная спираль и решетка размерностью  $3 \times 3$ , возбуждаемые падающей линейно поляризованной электромагнитной волной с различной поляризацией, задаваемой углом  $\beta$ .

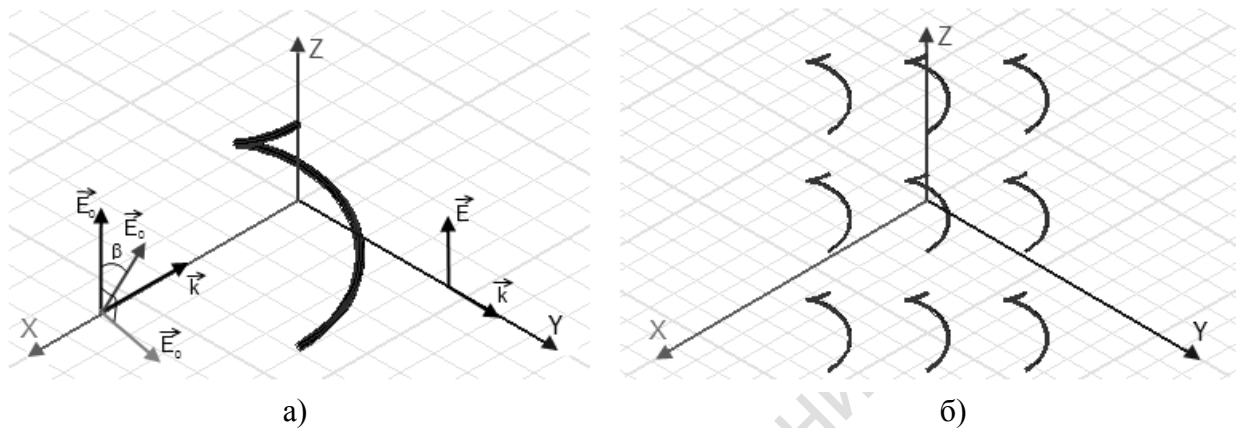


Рисунок 3 – Исследуемые модели в системе координат:  
а) одиночная спираль; б) двумерная решетка

При моделировании угол поворота плоскости поляризации отраженной волны рассчитывается в дальней зоне в диапазоне частот 2,7–3,7 ГГц. Моделирование показало, что для одиночной спирали резонанс тока находится на частоте 2,85 ГГц, а для решетки – на частоте 2,8 ГГц. На рисунке 4 показана частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации при различной ориентации вектора  $\vec{E}_0$  падающей волны для одиночной спирали. Угол наклона вектора напряженности падающей волны ( $\beta$ ) отсчитывается от оси  $Oz$  по часовой стрелке (см. рисунок 3 а).

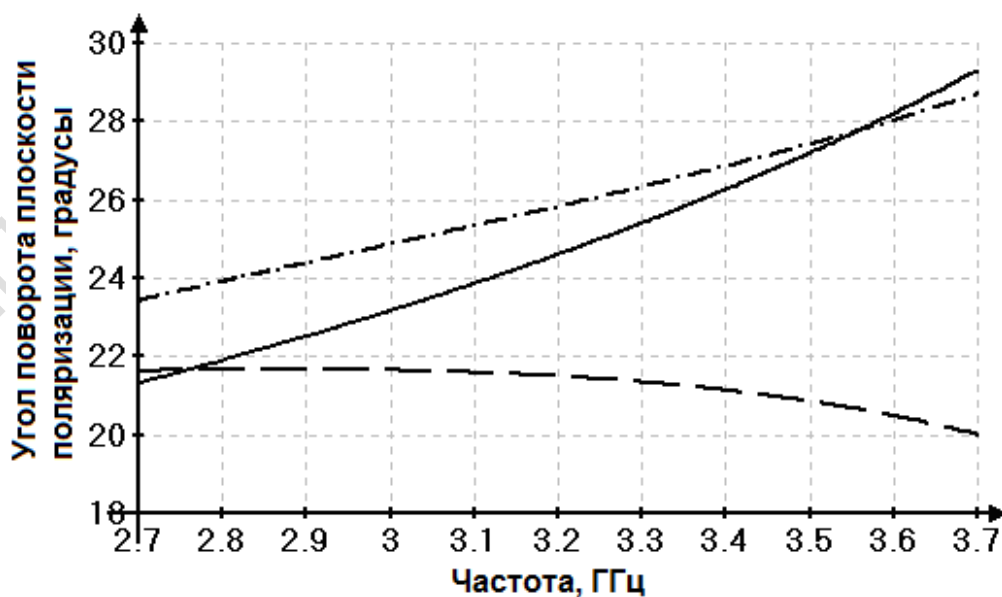


Рисунок 4 – График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации для одиночной спирали ( $\beta = 0^\circ$  – сплошная линия;  $\beta = 45^\circ$  – штриховая линия;  $\beta = 90^\circ$  – штрихпунктирная линия)

Из рисунка 4 видно, что угол поворота плоскости поляризации лежит в пределах от 20 до 30 градусов при различной поляризации падающей волны на резонансной частоте в пределах от 21 до 24 градусов. На рисунке 5 приведена частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации для решетки с размерностью  $3 \times 3$  элемента.

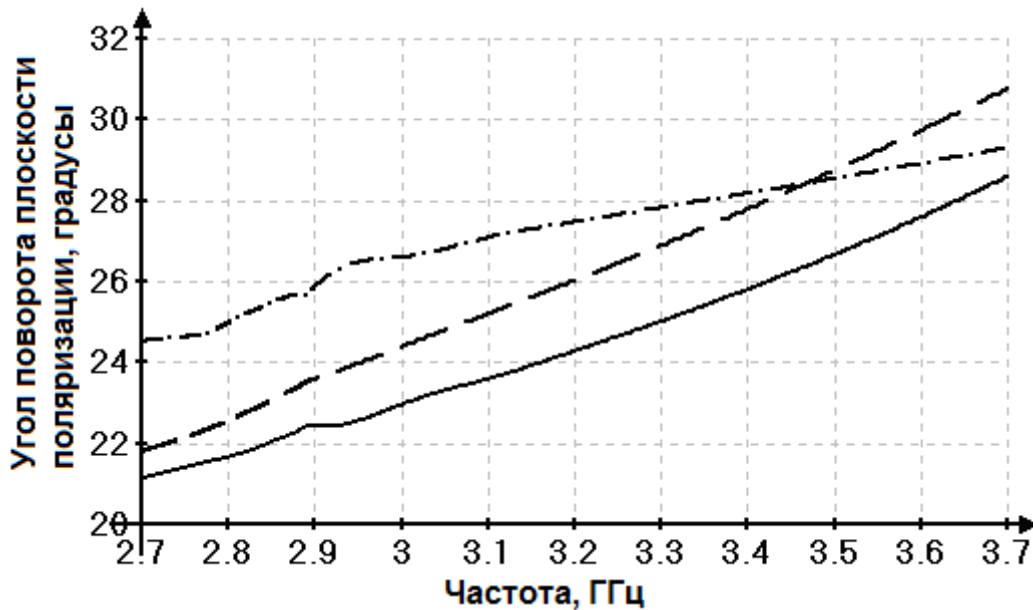


Рисунок 5 – График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации для решетки размерностью  $3 \times 3$  элемента ( $\beta = 0^\circ$  – сплошная линия;  $\beta = 45^\circ$  – штриховая линия;  $\beta = 90^\circ$  – штрихпунктирная линия)

На рисунке 6 маркером показаны экспериментальные значения, полученные ранее в работе [6] для искусственной двумерной решетки. По полученным экспериментальным точкам построены аппроксимирующие графики, которые показывают линейную зависимость угла поворота от частоты.

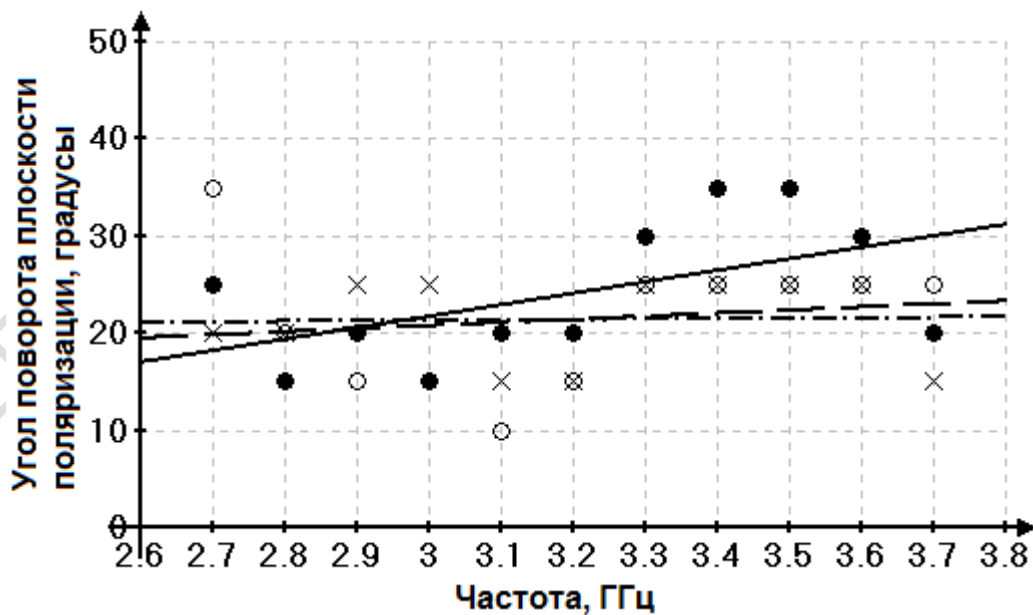


Рисунок 6 – График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации, построенный по экспериментальным данным ( $\beta = 0^\circ$  – сплошная линия; ● – экспериментальные точки;  $\beta = 45^\circ$  – штриховая линия; ○ – экспериментальные точки;  $\beta = 90^\circ$  – штрихпунктирная линия; × – экспериментальные точки)

Из рисунка 5 видно, что для решетки в заданном частотном диапазоне угол поворота находится в пределах от 21 до 31 градуса, что полностью соответствует результату моделирования для одиночной спирали. Из экспериментальных данных следует, что значения угла поворота находятся в более широком диапазоне (от 10 до 35 градусов). Значительное отклонение экспериментальных точек от аппроксимирующей кривой обусловлено погрешностью измерений (относительная погрешность измерений не превышает 12%).

На рисунке 7 показана частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации при различном периоде решетки для вертикальной поляризации падающей волны ( $\beta = 0^\circ$ ).

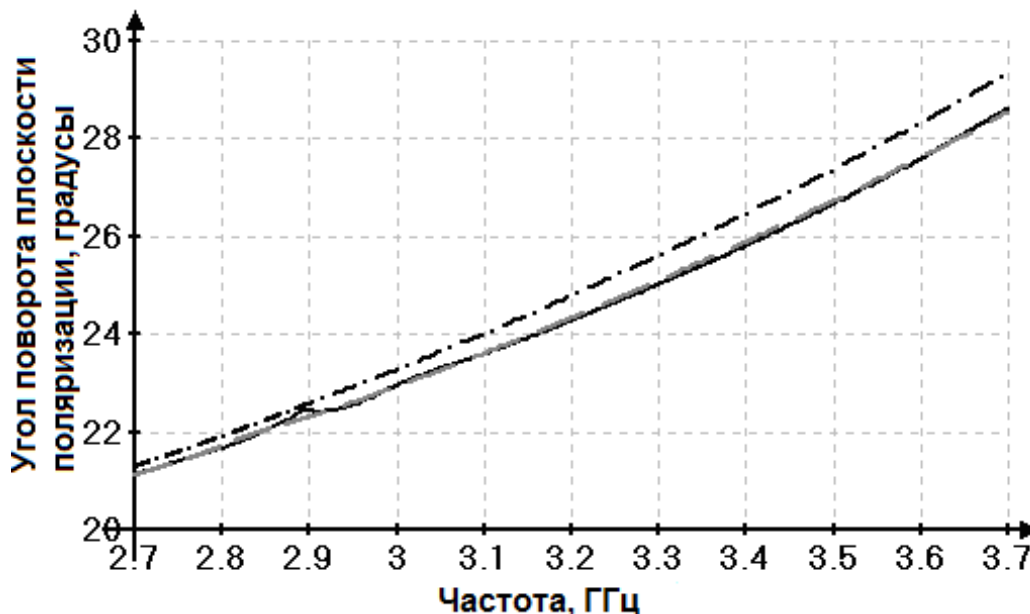


Рисунок 7 – График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации электромагнитной волны при различном периоде решетки (период решетки: 3 см – сплошная линия; 5 см – штриховая линия; 10 см – штрихпунктирная линия)

Из рисунка 7 видно, что угол поворота плоскости поляризации не зависит от периода решетки. Следовательно, взаимное влияние спиралей в решетке несущественно влияет на поворот плоскости поляризации отраженной волны.

### Заключение

Из полученных данных следует, что для одиночной спирали и решетки, возбуждаемых падающей электромагнитной волной с различной ориентацией плоскости поляризации, угол поворота плоскости поляризации отраженной волны находится в пределах от 20 до 30 градусов. На резонансной частоте угол поворота приблизительно равен 23 градуса. Показано, что расстояние между спиральями в решетке не влияет на поворот плоскости поляризации отраженной волны. Экспериментальные данные, полученные для двумерной решетки, хорошо согласуются с результатом моделирования.

### Литература

1. Ландсберг, Г.С. Оптика / Г.С. Ландсберг. – 6-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.
2. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
3. Semchenko, I.V. Effective electron model of the wire helix excitation at microwaves: first step to optimization of pitch angle of helix / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, E.A. Fedosenko //

In Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials. NATO Science Series II, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. – 2002. – Vol. 89. – P. 245–256.

4. Semchenko, I.V. Polarization Plane Rotation of Electromagnetic Waves by the Artificial Periodic Structure with One-Turn Helical Elements / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // Electromagnetics. – 2006. – Vol. 26. – P. 119–233.

5. Козман, У. Введение в квантовую химию / У. Козман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 615 с.

6. Самофалов, А.Л. Использование спиральных излучателей для преобразования поляризации электромагнитных волн / А.Л. Самофалов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 4(55), ч. 2. – С. 176–183.

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины