ПИСЬМА в РЕДАКЦИЮ

УКД 533.15

Теория диффузионного осаждения продуктов распада благородных газов в круглом и плоском каналах

В. М. Бережной, В. Н. Кириченко

В настоящей работе дается решение задачи о диффузии отдельных атомов, образующихся в ламинарном потоке газа, протекающего через круглый или плоский канал. Полученные выражения для проскока через канал и распределения по длине поверхностной плотности осевших на стенки атомов могут быть использованы для определения коэффициентов диффузии атомов некоторых твердых продуктов, образующихся в результате распада радиоактивных благородных газов, и учета их осаждения в пробоотборных трубках.

Если r — расстояние от оси трубки, r_0— радиус трубки и x — расстояние от начала трубки, то уравнение стационарной диффузии образующихся атомов запишется в виде

$$D\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right)+D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-2\bar{u}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial c}{\partial x}+q=0, \qquad (1)$$

де c — концентрация атомов; D — коэффициент диффузии атомов; q — скорость образования атомов в единице объема; $2\bar{u}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$ — пуазейлевская скорость потока; $\bar{u}$ — средняя скорость потока. Решение уравнения (1) найдем в предположении малости диффузии вдоль течения, постоянства q и при следующих граничных условиях: $c(r_0, x)=0$ — полностью поглощающая стенка; $c(r, 0)=0$ — газ при входе в канал отфильтрован. Тогда в безразмерных координатах $\eta=\frac{r}{r_0}$ и $\mu=\frac{Dx}{2\bar{u}r_0^2}$ уравнение примет вид

$$\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial c}{\partial\eta}\right)-(1-\eta^2)\frac{\partial c}{\partial\mu}+\sigma=0; \qquad (2)$$

$$c(1;\ \mu)=c(\eta,\ 0)=0, \qquad (3)$$

где

$$\sigma=q\frac{r_0^2}{D}=\text{const}. \qquad (4)$$

Проскок атомов, определяемый как отношение полного потока атомов через сечение канала на расстоянии x от его начала к количеству атомов, образовавшихся на том же отрезке канала за единицу времени, найдем из выражения

$$K(x)=\frac{\int\limits_0^{r_0} 2\bar{u}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)c(r,\ x)\,2\pi r\,dr}{\pi r_0^2 x q}=\frac{2}{\sigma\mu}\int\limits_0^1 \eta(1-\eta^2)\,c(\eta,\ \mu)\,d\eta, \qquad (5)$$

а плотность осадка, образовавшегося на стенках канала за время Δt, будет иметь вид

$$j=-D\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=r_0}\Delta t=-\Delta t\,\frac{D}{r_0}\cdot\left.\frac{\partial c}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}. \qquad (6)$$

Асимптотические выражения для величин c, j, K легко найти из уравнения (2), если учесть, что при больших μ $\frac{\partial c}{\partial\mu}=0$, так как при этом скорость образования атомов равна скорости их осаждения:

$$c_\infty(\eta)=\lim_{\mu\to\infty}c(\eta,\ \mu)=\frac{1}{4}\,\sigma(1-\eta^2); \qquad (7)$$

$$j_\infty=\frac{1}{2}\cdot\frac{D}{r_0}\,\sigma\Delta t=\frac{1}{2}\,qr_0\Delta t; \qquad (8)$$

$$K_\infty(\mu)=\frac{1}{12\mu}. \qquad (9)$$

В общем случае неоднородное уравнение (2) вместе с граничными условиями (3) допускает разделение переменных, и решение может быть записано в виде

$$c(\eta,\ \mu)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(1-e^{-\lambda_k^2\mu}\right)L(\eta,\ \lambda_k). \qquad (10)$$

Здесь $e^{-\lambda_k^2\mu}L(\eta,\lambda_k)$ — решение соответствующего однородного уравнения, где $L(\eta,\lambda_k)=e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\eta^2}\,{}_1F_1\left[-\frac{1}{4}\times(\lambda_k-2)\,|\,1\,|\,\lambda_k\eta^2\right]$ — решение уравнения $\frac{1}{\eta}\cdot\frac{d}{d\eta}\times\left(\eta\frac{dy}{d\eta}\right)+\lambda_k^2(1-\eta^2)\quad y=0$, ограниченное при

$\eta=0$. Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1\left[-\frac{1}{4}(\lambda-2)\,|\,1\,|\,\lambda\eta^2\right]$ в точке $\eta=1$ удовлетворяет граничному условию ${}_1F_1\left[-\frac{1}{4}(\lambda-2)\,|\,1\,|\,\lambda\right]=0$ при $\lambda=\lambda_k$, где $k=1, 2, 3\ldots$ и все λ_k действительные величины, что можно показать методом, использованным в работе [1].

Подставим решение (10) в (2) и найдем соотношение для определения коэффициентов A_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\lambda_k^2(1-\eta^2)e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\eta^2}\,{}_1F_1\times\left[-\frac{1}{4}(\lambda_k-2)\,|\,1\,|\lambda_k\eta^2\right]=\sigma. \quad (11)$$

Используя ортогональность собственных функций $L(\eta, \lambda_k)$

$$\int_0^1 \eta(1-\eta^2)L(\eta, \lambda_k)L(\eta, \lambda_e)\,d\eta=0 \text{ при } k\neq l \quad (12)$$

и выражение для нормы

$$N_k^2=\int_0^1 \eta(1-\eta^2)L^2(\eta, \lambda_k)\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\lambda_k}e^{-\lambda_k}\left.\frac{d_1F_1}{d\eta}\right|_{\eta=1}\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k;\ \eta=1}, \quad (13)$$

которые могут быть найдены из уравнения для $L(\eta, \lambda_k)$, получим

$$A_k=\frac{\sigma M_k}{\lambda_k e^{-\lambda_k}\left.\frac{d_1F_1}{d\eta}\right|_{\eta=1}\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k;\ \eta=1}}, \quad (14)$$

где

$$M_k=\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\eta}\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{4}(\lambda_k-2)\,|\,1\,|\,\lambda_k\eta\right)d\eta. \quad (15)$$

Окончательные выражения для $c(\eta, \mu)$, $K(\mu)$ и $j(\mu)$ имеют вид:

$$c(\eta, \mu)=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k\left(1-e^{-\lambda_k^2\mu}\right)}{\lambda_k e^{-\lambda_k}\left.\frac{d_1F_1}{d\eta}\right|_{\eta=1}\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k;\ \eta=1}}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\eta^2}\,{}_1F_1\left[-\frac{1}{4}(\lambda_k-2)\,|\,1\,|\,\lambda_k\eta^2\right]; \quad (16)$$

$$K(\mu)=-\frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k\left(1-e^{-\lambda_k^2\mu}\right)}{\lambda_k^3 e^{-\frac{1}{2}\lambda_k}\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k,\ \eta=1}}; \quad (17)$$

$$j(\mu)=-\Delta tqr_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k\left(1-e^{-\lambda_k^2\mu}\right)}{\lambda_k e^{-\frac{1}{2}\lambda_k}\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k,\ \eta=1}}. \quad (18)$$

Для получения расчетных формул первые три значения λ_k и $\frac{d_1F_1}{d\lambda}$ были взяты из работы [2]: $\lambda_1=2{,}7044$; $\lambda_2=6{,}6790$; $\lambda_3=10{,}673$; $\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1}=-1{,}9364$; $\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_2}=10{,}478$; $\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_3}=-66{,}15$, а первые три величины λ_kM_k рассчитаны нами на электронно-вычислительной машине: $\lambda_1M_1=1{,}0644$; $\lambda_2M_2=-1{,}10835$; $\lambda_3M_3=1{,}1220$. Подставим эти значения в выражения для $j(\mu)$ и $K(\mu)$. Тогда

$$j(\mu)=\Delta tqr_0\left[0{,}2906\left(1-e^{-7{,}314\mu}\right)+0{,}06688\left(1-e^{-44{,}61\mu}\right)+0{,}03094\left(1-e^{-113{,}91\mu}\right)+\ldots\right];$$

$$K(\mu)=\frac{2}{\mu}\left[0{,}03973\left(1-e^{-7{,}314\mu}\right)+0{,}001499\left(1-e^{-44{,}61\mu}\right)+0{,}0002716\left(1-e^{-113{,}91\mu}\right)+\ldots\right].$$

Ограничиваясь тремя членами для $K(\mu)$, получим

$$K(\mu)\underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow}\frac{0{,}082995}{\mu},$$

что всего на 0,4% меньше $\frac{1}{12\mu}=\frac{0{,}083333}{\mu}$. Таким образом, для больших μ с учетом четвертого и всех последующих членов имеем

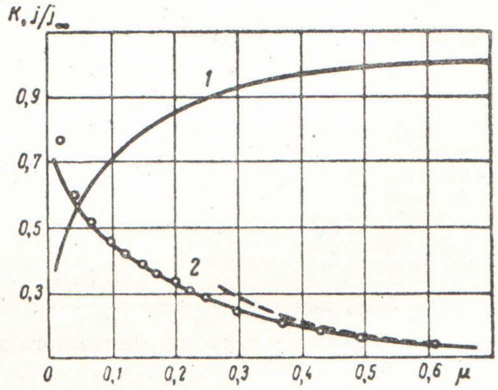
$$K(\mu)=\frac{2}{\mu}\left[0{,}03973\left(1-e^{-7{,}314\mu}\right)+0{,}001499\left(1-e^{-44{,}61\mu}\right)+0{,}0002716\left(1-e^{-113{,}91\mu}\right)+0{,}000169\right]; \quad (19)$$

$$\frac{j(\mu)}{j_\infty}=2\left[0{,}2906\left(1-e^{-7{,}314\mu}\right)+0{,}06688\left(1-e^{-44{,}61\mu}\right)+0{,}030940\left(1-e^{-113{,}91\mu}\right)+0{,}1116\right]. \quad (20)$$

При $\mu\longrightarrow 0$ эти выражения недостаточно точны, так как они дают $K(0)=0{,}777$ и $\frac{j(0)}{j_\infty}=0{,}2232$ вместо единицы и нуля соответственно. Однако поскольку $\lambda_4^2=216$, то при $\mu=0{,}014$ вклад четвертого и всех последующих членов в выражении (19) отличается от принятого для больших μ значения (0,000169) на 5%, а при $\mu\geqslant 0{,}02$ ошибка не превышает 1%. Кривые для $K(\mu)$ и $j(\mu)/j_\infty$, рассчитанные по уравнениям (19) и (20), приведены на рисунке. Пунктирная кривая соответствует выражению $K=\frac{1}{12\mu}$. Как видно из графика, этим выражением можно пользоваться с точностью не ниже 5% при $\mu\geqslant 0{,}4$.

Следует отметить, что при получении выражений для $c(\eta, \mu)$, $j(\mu)$ и $K(\mu)$ предполагалось, что в канале устанавливается пуазейлевское течение. На самом же деле во входном участке канала длиной $x_f\approx 0{,}1r_0Re$ (Re — число Рейнольдса) [3] профиль скоростей значительно отличается от параболического профиля и, кроме того, там существует радиальная составляющая скорости, которая изменяет распределение концентраций по сечению. Это значит, что при $\mu < \mu_f = \frac{D\chi_f}{2\bar{u}r_0^2} = 0{,}1\,\frac{D}{\nu}$, где ν — кинематическая вязкость, уравнение (1), как и решения (16) — (20), неверно описывает процесс диффузии. В области, где устанавливается концентрация, т. е. при $\mu \geqslant \mu_d = 0{,}4$, входной участок не влияет на распределение концентрации. Это объясняется тем, что при нормальных условиях $\mu_f < \mu_d$, так как коэффициенты диффузии не превышают величины 0,2 *см²/сек*. Таким образом, при $\mu \geqslant \mu_d = 0{,}4$ можно пользоваться выражениями (7)— (9).

В промежуточной области ($\mu_f < \mu < \mu_d$) применимость выражений (19), (20) проверялась на основании



Зависимость j/j_∞ по уравнению (20) и K по уравнению (19) от μ (кривые *1* и *2* соответственно).

экспериментальных данных работы [4], в которой коэффициент диффузии атомов радия *A* в воздухе при нормальных условиях определялся по их осаждению на стенках цилиндрической трубки из ламинарного потока. Вычисленные по этим данным значения коэффициента K при заданных μ показаны на рисунке в виде точек. Как видно из графика, вплоть до $\mu = 0{,}07$ экспериментальные точки хорошо совпадают с теоретической кривой. Это дает основание предположить, что влияние входного участка в указанной области несущественно, и оправдывает применимость выражений (19), (20).

Полученные аналогичным методом выражения для $c(\eta, \mu)$, $j(\mu)$ и $K(\mu)$ в случае плоского канала высотой $2h$ и шириной, намного большей высоты, имеют вид

$$c(\eta, \mu) = \frac{2qh^2}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k\left(1 - e^{-\lambda_k^2 \mu}\right)}{\lambda_k e^{-\lambda_k} \left.\frac{d_1F_1}{d\eta}\right|_{\eta=1} \left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k,\ \eta=1}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\eta^2}\, {}_1F_1\left[-\frac{1}{4}(\lambda_k - 1)\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,\lambda_k\eta^2\right]; \qquad (21)$$

$$j(\mu) = -2qh\Delta t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k e^{-\frac{1}{2}\lambda_k} \left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k,\ \eta=1}} \left(1 - e^{-\lambda_k^2\mu}\right); \qquad (22)$$

$$K(\mu) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k^3 e^{-\frac{1}{2}\lambda_k} \left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k,\ \eta=1}} \left(1 - e^{-\lambda_k^2\mu}\right), \qquad (23)$$

где

$$\eta = \frac{z}{h}; \quad \mu = \frac{2Dx}{3\bar{u}h^2};$$

$$M_k = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\eta^2}\, {}_1F_1\left(-\frac{1}{4}(\lambda_k - 1)\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,\lambda_k\eta^2\right).$$

Для получения расчетных формул значения λ_k и $\frac{d_1F_1}{d\lambda}$ были взяты из работы [1], в которой даны только первые два значения этих величин:

$$\lambda_1 = 1{,}6816; \quad \lambda_2 = 5{,}6699;$$

$$\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1;\ \eta=1} = -2{,}2966; \quad \left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_2;\ \eta=1} = 20{,}1.$$

Значения λ_3 и $\left.\frac{d_1F_1}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_3}$, которые приводятся в работе [5], к сожалению, использовать нельзя, так как они вычислены неверно. Первые два значения $\lambda_k M_k$ были вычислены нами на электронно-вычислительной машине:

$$\sqrt{\lambda_1}M_1 = 0{,}80326; \quad \sqrt{\lambda_2}M_2 = -0{,}76397.$$

Подставив эти значения в выражения (22) и (23), получим для $\mu \geqslant 0{,}03$

$$\frac{j(\mu)}{j_\infty} = 2\left[0{,}37176\left(1 - e^{-2{,}828\mu}\right) + 0{,}04794\left(1 - e^{-32{,}15\mu}\right) + 0{,}0803\right]; \qquad (24)$$

$$K(\mu) = \frac{2}{\mu}\left[0{,}1315\left(1 - e^{-2{,}828\mu}\right) + 0{,}001491\left(1 - e^{-32{,}15\mu}\right) + 0{,}0003763\right]. \qquad (25)$$

Из-за отсутствия экспериментальных данных нельзя точно указать пределы применимости этих выражений. Однако можно предположить, что отличие от случая круглого канала не очень велико. При $\mu \geqslant 1{,}0$ с точностью не ниже 5% можно пользоваться асимптотическим выражением

$$K(\mu) = \frac{4}{15\mu}. \qquad (26)$$

Поступило в Редакцию 21/X 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Gormley. Proc. Roy. Irish. Acad., **A45**, 59 (1938).
2. P. Gormley, M. Kennedy. Proc. Roy. Irish. Acad., **A52**, 12, 163 (1949).
3. В. Г. Левич. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. В. И. Корпусов. Дипломная работа МХТИ им. Менделеева, 1963.
5. W. De-Marcus, J. Thomas. U. S. Atomic Energy Commiss. ORNL-1413, 1952.