УДК 539.12

Н. В. МАКСИМЕНКО, О. М. ДЕРЮЖКОВА

КОВАРИАНТНЫЙ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ЛАГРАНЖА С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ ЧАСТИЦ

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(*Поступила в редакцию 28.02.2011*)

Введение. В настоящее время известны многие электродинамические процессы, на основе которых планируются эксперименты по извлечению данных о поляризуемостях адронов. В связи с этим возникает задача о том, как последовательно ковариантным образом учитывать вклад поляризуемостей в амплитуды и сечения электродинамических процессов на адронах. Подобную проблему можно решить, построив теоретико-полевой ковариантный формализм взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом их поляризуемостей.

На протяжении многих лет Ф. И. Федоровым, Л. Г. Морозом и их учениками активно развивались ковариантные методы получения лагранжианов и уравнений взаимодействия электромагнитного поля с адронами, в которых электромагнитные характеристики этих частиц являются основополагающими [1–4]. Определение амплитуд и сечений через поляризуемости ядер в рамках нерелятивистской электродинамики представлено в работе [5].

В настоящей работе на основе калибровочно-инвариантного формализма и решений электродинамических уравнений методом функции Грина [6–8] дано релятивистское обобщение подхода, изложенного в [5], для получения амплитуды комптоновского рассеяния на скалярных и спинорных частицах с учетом их поляризуемостей.

1. Ковариантное представление амплитуды комптоновского рассеяния на π-мезоне с учетом вклада поляризуемостей. Для определения низкоэнергетической части амплитуды комптоновского рассеяния на π-мезоне с учетом поляризуемостей воспользуемся ковариантным формализмом Лагранжа. Из низкоэнергетической теоремы следует, что амплитуда комптоновского рассеяния в области низких энергий определяется борновской частью, а также вкладом поляризуемостей и среднеквадратичного радиуса мезона.

Определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной частицей с учетом поляризуемостей, следующим образом:

$$L=-\frac{1}{4}F^{2}+\partial_{\mu}\varphi^{+}\partial^{\mu}\varphi-m^{2}(\varphi^{+}\varphi)+L_{I}^{(e)}+L_{I}^{(\alpha)}. \tag{1}$$

В уравнении (1) введены следующие определения:

$$L_{I}^{(e)}=j_{\mu}A^{\mu}+e^{2}A^{2}(\varphi^{+}\varphi),\ L_{I}^{(\alpha)}=\left[L^{\mu\nu}(\overleftarrow{p},\overleftarrow{m},\overrightarrow{\partial})+L^{\mu\nu}(\overleftarrow{\partial},\overrightarrow{p},\overrightarrow{m})\right]F_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где

$$L^{\mu\nu}\left(\hat{\overleftarrow{p}},\hat{\overleftarrow{m}},\overrightarrow{\partial}\right)=-\frac{i}{4m}\left\langle\left[\left(\hat{\overleftarrow{p}}^{\mu}\,\overrightarrow{\partial}^{\nu}-\hat{\overleftarrow{p}}^{\nu}\,\overrightarrow{\partial}^{\mu}\right)+\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\hat{\overleftarrow{m}}_{\rho}\,\overrightarrow{\partial}_{\sigma}\right]\right\rangle,$$

$$L^{\mu\nu}\left(\overleftarrow{\partial},\hat{\overrightarrow{p}},\hat{\overrightarrow{m}}\right)=-\frac{i}{4m}\left\langle\left[\left(\overleftarrow{\partial}^{\nu}\,\hat{\overrightarrow{p}}^{\mu}-\overleftarrow{\partial}^{\mu}\,\hat{\overrightarrow{p}}^{\nu}\right)+\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overleftarrow{\partial}_{\sigma}\,\hat{\overrightarrow{m}}_{\rho}\right]\right\rangle.$$

В определении (2) $\hat{\vec{p}}^{\mu}$ и $\hat{\vec{m}}_{\mu}$ – операторы электрической и магнитной поляризаций структурной частицы, стрелки указывают действие операторов на волновые функции π-мезона, $\left\langle \hat{O} \right\rangle = \varphi^{+}(x)\hat{Q}\varphi(x),$ $\varphi(x)$ – волновая функция π-мезона.

Выражение (2) согласовано с классическим определением взаимодействия электромагнитного поля с частицей с учетом ее электрической и магнитной поляризаций [9, 10].

Получим уравнения движения структурной заряженной частицы в электромагнитном поле, для чего воспользуемся уравнениями Лагранжа–Эйлера. В результате получим:

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^{2})\varphi(x) = -(\hat{V}^{(e)}_{(x)} + \hat{V}^{(\alpha)}_{(x)})\varphi(x). \tag{3}$$

В уравнении (3) оператор $\hat{V}$ определяется следующим образом:

$$\hat{V}^{(e)}_{(x)} + \hat{V}^{(\alpha)}_{(x)} = \partial_{\nu}(ieA^{\nu} + \hat{\pi}_{I}^{(\alpha)\nu}) + ieA^{\nu}\partial_{\nu} - e^{2}A^{2},$$

где

$$\hat{\pi}_{I}^{(\alpha)\nu} = \frac{\partial}{\partial(\partial_{\nu}\varphi^{+})}\left[\hat{L}^{\rho\sigma}\left(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}},\vec{\partial}\right) + \hat{L}^{\rho\sigma}\left(\overleftarrow{\partial},\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}}\right)\right]F_{\rho\sigma}.$$

Вычислим теперь амплитуду комптоновского рассеяния на π-мезоне с учетом поляризуемостей. Для этого определим S-матричные элементы согласно работам [6, 7]:

$$S_{fi} = \left\langle f_{p}(x'), \int d^{4}x\Delta^{c}(x'-x)|_{t=+\infty}\hat{V}^{(\alpha)}(x)f_{p}(x)\right\rangle = (-i)\int d^{4}x f_{p}^{*}(x)\hat{V}^{(\alpha)}(x)f_{p}(x), \tag{4}$$

где $f_{p}(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2E_{p}}}e^{-ipx}$, $\Delta^{c}(x'-x)$ – функция Грина.

При вычислении (4) использовано соотношение

$$\left\langle f_{p}(x'), \Delta^{c}(x'-x)\right\rangle|_{z'=+\infty} = \int d^{3}x' f_{p}^{*}(x')\overleftrightarrow{\partial}_{t'}\Delta^{c}(x'-x)|_{t'=+\infty} = (-i)f_{p}^{*}(x).$$

Если в (4) воспользуемся асимптотическими условиями, а именно, будем пренебрегать взаимодействиями при $t = \pm\infty$, тогда для S_{fi} справедливо:

$$S_{fi} = i\int d^{4}x\partial_{\mu}f_{p}^{*}(x)\hat{\pi}_{I}^{(\alpha)\mu}(x) = \int d^{4}x\left[L^{\mu\nu}\left(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}},\vec{\partial}\right) + L^{\mu\nu}\left(\overleftarrow{\partial},\hat{\vec{p}},\hat{\vec{m}}\right)\right]F_{\mu\nu}.$$

В соотношении (2) представим операторы $\hat{p}^{\mu}$ и $\hat{m}_{\mu}$ следующим образом $\hat{p}^{\mu} = 4\pi\alpha F^{\mu\rho}(i\partial_{\rho})$, $\hat{m}_{\mu} = 4\pi\beta\tilde{F}_{\mu\rho}(i\partial^{\rho})$, где α и β – электрическая и магнитная поляризуемости π-мезона, а тензор $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. Тогда для S-матричного элемента получим:

$$S_{fi} = i\frac{2\pi}{m}\int d^{4}x\left[\left\langle\overleftarrow{\partial}_{\rho}\vec{\partial}^{\nu}\right\rangle + \left\langle\overleftarrow{\partial}^{\nu}\vec{\partial}_{\rho}\right\rangle\right]\left[\alpha F^{\mu\rho}F_{\mu\nu} + \beta\tilde{F}^{\mu\rho}\tilde{F}_{\mu\nu}\right]. \tag{5}$$

Если в (5) воспользуемся соотношением $\tilde{F}^{\mu\rho}\tilde{F}_{\mu\nu} = \left(F^{\mu\rho}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\nu}F^{2}\right)$, то (5) можно представить в виде:

$$S_{fi} = i\frac{2\pi}{m}\int d^4x\left[\left\langle\overleftarrow{\partial}_\rho\overrightarrow{\partial}^\nu\right\rangle + \left\langle\overleftarrow{\partial}^\nu\overrightarrow{\partial}_\rho\right\rangle\right]\left[(\alpha+\beta)F^{\mu\rho}F_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2}\delta^\rho_\nu F^2\right]. \qquad (6)$$

В импульсном представлении амплитуда (6) определяется следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{(-i)(2\pi)^4\delta(k_1+p_1-k_2-p_2)}{(2\pi)^6\sqrt{16\omega_1\omega_2E_1E_2}}M,$$

здесь введена матрица *M*:

$$M = -\frac{2\pi}{m}(p_{2\nu}p_1^\mu + p_2^\mu p_{1\nu})\left[(\alpha+\beta)(F^{(2)}_{\mu\rho}F^{\rho\nu}_{(1)} + F^{(1)}_{\mu\rho}F^{\rho\nu}_{(2)}) - \beta\delta^\nu_\rho F^{\mu\nu}_{(2)}F^{(1)}_{\mu\nu}\right], \qquad (7)$$

где $F^{\mu\nu}_{(1)} = k_1^\mu e^{(\lambda_1)\nu} - k_1^\nu e^{(\lambda_1)\mu}$, $F^{\mu\nu}_{(2)} = k_2^\mu e^{(\lambda_2)\nu} - k_2^\nu e^{(\lambda_2)\mu}$.

Из (7) следует калибровочно-инвариантное выражение для амплитуды комптоновского рассеяния на частице спина 0 с учетом поляризуемостей.

2. Ковариантное представление амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне с учетом вклада поляризуемостей. В этом случае определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с нуклоном следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\overline{\Psi}\left[\left(i\hat{\overrightarrow{\partial}} - m\right) - e\hat{A} - \frac{1}{4}\hat{\overrightarrow{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\Psi - \frac{1}{2}\overline{\Psi}\left[\left(i\hat{\overleftarrow{\partial}} + m\right) + e\hat{A} + \frac{1}{4}\hat{\overleftarrow{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\Psi. \qquad (8)$$

В этом выражении

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu),$$

$$\hat{\overrightarrow{L}}^{\mu\nu} = \frac{e\mu}{m}\sigma^{\mu\nu} - \frac{i}{2m}\left[\left(\hat{p}^\mu\overrightarrow{\partial}^\nu - \hat{p}^\nu\overrightarrow{\partial}^\mu\right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{m}_\rho\overrightarrow{\partial}_\sigma\right],$$

$$\hat{\overleftarrow{L}}^{\mu\nu} = \frac{e\mu}{m}\sigma^{\mu\nu} + \frac{i}{2m}\left[\left(\hat{p}^\mu\overleftarrow{\partial}^\nu - \hat{p}^\nu\overleftarrow{\partial}^\mu\right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{m}_\rho\overleftarrow{\partial}_\sigma\right].$$

Стрелки указывают направления действия производных, μ – магнитный момент частицы, а операторы $\hat{p}^\mu$ и $\hat{m}_\mu$ являются операторами электрической и магнитной поляризации структурной частицы.

Используя уравнения Лагранжа–Эйлера и лагранжиан (8), получим уравнения:

$$\left[\left(i\hat{\overrightarrow{\partial}} - m\right) - e\hat{A} - \frac{1}{4}\hat{\overrightarrow{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\Psi = 0,$$

$$\overline{\Psi}\left[\left(i\hat{\overleftarrow{\partial}} + m\right) + e\hat{A} + \frac{1}{4}\hat{\overleftarrow{L}}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] = 0.$$

Амплитуду комптоновского рассеяния вычислим по приведенной методике.

Чтобы получить согласование с низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне, операторы поляризации частицы определим так: $\hat{p}^\mu = 4\pi\alpha F^{\mu\nu}\gamma_\nu$, $\hat{m}_\mu = 4\pi\beta\tilde{F}^{\mu\nu}\gamma_\nu$, где α и β – электрическая и магнитная поляризуемости нуклона. Таким образом, *S*-матрица рассеяния выражается через поляризуемости следующим образом:

$$\hat{S} = i\int\langle L_I\rangle d^4x,$$

где

$$\left\langle L_I \right\rangle = \frac{2\pi}{m}\left[\alpha F_{\mu\nu}F_{\rho}{}^{\mu} + \beta\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\rho}{}^{\mu}\right]\theta^{\nu\rho},$$

$$\theta^{\nu\rho} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^{\nu}\gamma^{\rho}\Psi.$$

Вычисления дифференциального сечения комптоновского рассеяния на угол $\theta = 0°$ приводит к следующему результату:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi m}\right)^2\left[-2e + 8\pi m\omega^2(\alpha+\beta)\right]^2, \tag{9}$$

где ω – частота излучения.

Заключение. На основе калибровочно-инвариантного подхода и решений электродинамических уравнений методом функции Грина получены в ковариантной форме лагранжианы и амплитуды комптоновского рассеяния на пионе и нуклоне с учетом их поляризуемостей.

Установлено, что в случае пиона операторы $\hat{p}^{\mu}$ и $\hat{m}_{\mu}$ определяются через тензоры электромагнитного поля $\hat{p}^{\mu} = 4\pi\alpha F^{\mu\rho}(i\partial_{\rho})$, $\hat{m}_{\mu} = 4\pi\beta\tilde{F}_{\mu\rho}(i\partial^{\rho})$. Лагранжиан (2) согласуется с выражениями лагранжианов, приведенных в работе [11], и низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на пионе.

В случае комптоновского рассеяния на нуклоне операторы $\hat{p}^{\mu}$ и $\hat{m}_{\mu}$ определяются следующими выражениями: $\hat{p}^{\mu} = 4\pi\alpha F^{\mu\rho}\gamma_{\rho}$, $\hat{m}_{\mu} = 4\pi\beta\tilde{F}_{\mu\rho}\gamma^{\rho}$, что приводит к амплитуде низкоэнергетического комптоновского рассеяния на нуклоне, которая следует из низкоэнергетических теорем теории поля.

Литература

1. М о р о з Л. Г., Ф е д о р о в Ф. И. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39, вып. 2. С. 293–303.
2. К р ы л о в Б. В., Р а д ю к А. Ф., Ф е д о р о в Ф. И. Спиновые частицы в поле плоской электромагнитной волны. Препринт АН БССР. Ин-т физики. 1976. № 113.
3. М а к с и м е н к о Н. В., М о р о з Л. Г. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: общая и ядерная физика. 1979. № 4(10). С. 26–27.
4. Л е в ч у к М. И., М о р о з Л. Г. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1985. № 1. С. 45–54.
5. Б а р ы ш е в с к и й В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. М., 1995.
6. Б о г у ш А. А., М о р о з Л. Г. Введение в теорию классических полей. Минск, 1968.
7. Б о г у ш А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий. Минск, 1987.
8. Б ь ё р к е н Дж. Д., Д р е л л Е. Д. Релятивистская квантовая теория поля. М., 1978. Т. 1.
9. Г р о о т де С. Р., С а т т о р п Л. Г. Электродинамика. М., 1982.
10. A n a n d a n J. S. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 1354–1357.
11. F e i n b e r g G., S u c h e r J. // Phys. Rev. A2. 1970. P. 2395–2415.

N. V. MAKSIMENKO, O. M. DERYUZHKOVA

COVARIANT GAUGE-INVARIANT LAGRANGE FORMALISM WITH POLARIZABILITIES OF THE PARTICLES

Summary

The effective covariant Lagrangians of the low-energy electromagnetic field interaction with the structural particles of spin 0 and ½ are obtained. This allows by the covariant methods to determine the contribution of polarizabilities to the amplitudes and to the cross sections of two-photon processes.

On the basis of the relativistic gauge-invariant approach, the solutions of the electromagnetic equations by the covariant method of Green functions and the effective Lagrangians the low-energy Compton scattering amplitudes are determined.