Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **2**, 2006

УДК 531.51:531.18:530.12

Электромагнитные волны в поле тяготения

А. Н. Сердюков, А. Н. Годлевская

В калибровочно-инвариантной модели взаимодействующих электромагнитного и гравитационного полей со скалярным потенциалом пространство, в котором присутствует внешнее поле тяготения, в электромагнитном отношении можно рассматривать как сплошную среду с материальными уравнениями [1]

$$\mathbf{D} = e^{-\Phi/c^2}\mathbf{E},\ \mathbf{B} = e^{\Phi/c^2}\mathbf{H}. \tag{1}$$

Здесь Φ – потенциал поля тяготения, определяемый через напряжённость посредством соотношения $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. В конечном счете, уравнения Максвелла для электромагнитных волн во внешнем поле тяготения принимают вид

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} + \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\mathbf{E} = 0. \tag{3}$$

Обратимся далее к рассмотрению электромагнитных волн в однородном поле тяготения – поле с постоянным ускорением свободного падения **g**. Из уравнений (2) – (3) получаем два волновых уравнения для электрического и магнитного поля

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\nabla\right)\mathbf{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\nabla\right)\mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

С учётом соотношений (1) можно получить также уравнения для напряжённости магнитного поля и электрической индукции

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\nabla\right)\mathbf{H} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\nabla\right)\mathbf{D} = 0. \tag{5}$$

Здесь, в отличие от (4), вектор ускорения свободного падения **g** входит с противоположным знаком.

Будем искать решения волновых уравнений (4), (5) в виде плоских волн

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \tag{6}$$

с постоянными, вообще говоря, комплексными векторными амплитудами $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{D}_0$. Подставляя (6) в (4), (5) получим

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\mathbf{kg}}{c^2}\right)\mathbf{H} = 0, \quad \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\mathbf{kg}}{c^2}\right)\mathbf{D} = 0. \tag{7}$$

Ненулевые решения для **H** и **D** существуют при условии

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\mathbf{kg}}{c^2} = 0. \tag{8}$$

Очевидно, никакие вещественные значения одновременно для **k** и ω при условии $\mathbf{kg} \neq 0$ не могут удовлетворить данному дисперсионному уравнению. Поэтому решение уравнения (8) для **k** при вещественных частотах ω следует искать в комплексной форме

$$\mathbf{k} = \mathbf{K} + i\mathbf{N}, \tag{9}$$

где **K** и **N** – некоторые вещественные векторы, которые предстоит определить.

Допуская комплексную форму (9) волнового вектора **k**, мы, тем самым, переходим к поиску решений волновых уравнений (5) для полей **H** и **D** в виде неоднородных плоских волн

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{Nr}} e^{i(\mathbf{Kr} - \omega t)}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{-\mathbf{Nr}} e^{i(\mathbf{Kr} - \omega t)}. \tag{10}$$

Комбинируя (8) и (9), получаем

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{N}^2 - \omega^2 / c^2 - \mathbf{Ng} / c^2 + 2i\mathbf{K}\left(\mathbf{N} + \mathbf{g} / 2c^2\right) = 0$$

и приходим, таким образом, к системе уравнений

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{N}^2 - \omega^2 / c^2 - \mathbf{Ng} / c^2 = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{N} + \mathbf{g} / 2c^2\right) = 0, \tag{12}$$

которая позволяет определить векторы **K** и **N**. Эти соотношения должны выполняться для электромагнитных волн с любым направлением волновой нормали, то есть для произвольных направлений вектора **K**. Поэтому из (12) следует

$$\mathbf{N} = -\mathbf{g} / 2c^2. \tag{13}$$

Подставляя далее (13) в (11), получим дисперсионное уравнение для вектора **K**

$$\mathbf{K}^2 - \omega^2 / c^2 + \mathbf{g}^2 / 4c^4 = 0. \tag{14}$$

Из этого уравнения находим значение модуля волнового вектора **K** неоднородной электромагнитной волны

$$K = \sqrt{\omega^2 / c^2 - \mathbf{g}^2 / 4c^4}. \tag{15}$$

Определим обычным образом показатель преломления $n = n(\omega)$ неоднородных волн: $\mathbf{K} = \mathbf{n} n\omega / c$, где **n** – единичный вектор волновой нормали. Из (15) при этом следует

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \mathbf{g}^2 / 4c^2\omega^2}. \tag{16}$$

Как видим, показатель преломления электромагнитных волн, распространяющихся во внешнем поле тяготения, зависит от частоты. Это означает, что пространство, заполненное гравитационным полем, в отношении электромагнитных свойств ведёт себя как среда, обладающая частотной дисперсией.

Равенства (13), (16) позволяют окончательно определить комплексный волновой вектор (9)

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} n\omega / c - i\mathbf{g} / 2c^2. \tag{17}$$

В итоге, с учётом (17) можем записать для векторов поля (10) следующие выражения:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{\mathbf{gr}/2c^2} e^{i\left(\frac{n\omega}{c}\mathbf{nr} - \omega t\right)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{\mathbf{gr}/2c^2} e^{i\left(\frac{n\omega}{c}\mathbf{nr} - \omega t\right)}. \tag{18}$$

Как следует из сравнения волновых уравнений (4), (5), решения уравнений Максвелла для векторов напряжённости электрического поля **E** и магнитной индукции **B**, связанные с найденными решениями для векторов **H** и **D** можно построить из (18) посредством формальной замены **g** на **–g**. Таким образом, найдём:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{gr}/2c^2} e^{i\left(\frac{n\omega}{c}\mathbf{nr} - \omega t\right)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-\mathbf{gr}/2c^2} e^{i\left(\frac{n\omega}{c}\mathbf{nr} - \omega t\right)}. \tag{19}$$

Векторы поля (18) – (19) неоднородных плоских электромагнитных волн в поле тяготения с постоянным ускорением свободного падения **g** должны составлять единое решение уравнений Максвелла и материальных уравнений (1). Естественно, постоянные комплексные векторы $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ в таком решении, определяющие амплитуды колебаний соответствующих полей электромагнитных волн, связаны между собой. Чтобы установить эту связь, в первую очередь необходимо конкретизировать материальные уравнения (1), определив в них потенциал внешнего поля тяготения Φ как функцию координат. В нашем случае эта функция удовлетворяет уравнению $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ с заданным постоянным вектором **g**. Его частным решением будет потенциал

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{gr}, \tag{20}$$

ограниченный условием (калибровкой) в начале координат Φ(0) = 0. Таким образом, материальные уравнения (1) для электромагнитного поля в однородном внешнем поле тяготения **g** принимают вид

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} e^{\mathbf{gr}/c^2}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} e^{-\mathbf{gr}/c^2}. \tag{21}$$

Подставляя сюда (18), находим

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0. \tag{22}$$

Уравнения Максвелла для поля без источников (2), (3) приводят к следующим алгебраическим соотношениям между начальными амплитудами $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{D}_0$ неоднородных волн (18):

$$\mathbf{m}_+ \times \mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0, \ \mathbf{m}_- \times \mathbf{H}_0 = -\mathbf{D}_0, \tag{23}$$

где комплексные векторы рефракции

$$\mathbf{m}_\pm = \mathbf{m}' \pm i\mathbf{m}'' = n\mathbf{n} \pm i\mathbf{g}/2c\omega, \tag{25}$$

согласно (16), удовлетворяют условию

$$\mathbf{m}_+\mathbf{m}_- = |\mathbf{m}_+|^2 = |\mathbf{m}_-|^2 = 1. \tag{26}$$

Следует обратить внимание, что направления вектора фазовой рефракции $\mathbf{m}' = n\mathbf{n}$ и вектора экстинкции $\mathbf{m}'' = \mathbf{g}/2c\omega$ у рассматриваемых неоднородных волн независимы, так что $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{m}''$ могут составлять друг с другом произвольный угол. Здесь для сравнения заметим, что в макроскопической электродинамике изотропных сред векторы фазовой рефракции $\mathbf{m}'$ и экстинкции $\mathbf{m}''$ неоднородных волн при отсутствии поглощения ортогональны [2].

В отношении поляризации неоднородных электромагнитных волн в поле тяготения необходимо заметить, что в общем случае форма кривых, описываемых векторами поля, одинакова лишь у пары векторов **H**, **B** и у пары векторов **E**, **D**, связанных материальными уравнениями (21). Что же касается, например, двух векторов **B** и **E**, то их поляризация, вообще говоря, будет различной, а плоскости, в которых лежат описываемые этими векторами кривые, не будут совпадать. Исключение составляет лишь случай, когда векторы волновой нормали **n** и ускорения свободного падения **g** являются коллинеарными. Поскольку при этом

$$\mathbf{m}_\pm = (n \pm i\mathbf{gn}/2c\omega)\mathbf{n},$$

то из соотношений (23), (24) имеем

$$(n + i\mathbf{gn}/2c\omega)\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0, \quad (n - i\mathbf{gn}/2c\omega)\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 = -\mathbf{D}_0. \tag{27}$$

Отсюда следует, что амплитудные векторы $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}_0$ ортогональны волновой нормали **n**. В таком случае любой из этих векторов, например, комплексный амплитудный вектор $\mathbf{E}_0$ эллиптически поляризованной напряженности электрического поля волны можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{E}_0 = E_1\mathbf{a} + iE_2\mathbf{b} = E_1(\mathbf{a} + i\tau\mathbf{b}). \tag{28}$$

Здесь $\tau = E_2 / E_1$ – вещественный параметр эллиптичности, **a** и **b** – единичные векторы, направленные вдоль осей эллипса поляризации и образующие вместе с **n** ортонормированный базис, так что $\mathbf{n} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$. При этом из (27) получаем следующее выражение для амплитудного вектора магнитной индукции:

$$\mathbf{B}_0 = -i(n + i\mathbf{gn}/2c\omega)E_1(\tau\mathbf{a} + i\mathbf{b}). \tag{29}$$

Из выражений (28), (29) видно, что при распространении электромагнитной волны в направлении вектора **g** эллиптичности магнитной индукции и напряжённости электрического поля одинаковы, а их эллипсы поляризации развернуты по отношению друг к другу на угол $\pi/2$.

Хотя в общем случае поляризация электрических и магнитных полей рассматриваемых неоднородных волн различна, модули их векторных амплитудных характеристик $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{E}_0$ всегда равны. В этом легко убедиться в результате элементарных преобразований. Используя уравнение (23) и учитывая что $\mathbf{m}_+^* = \mathbf{m}_-$, запишем

$$\mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0 = (\mathbf{m}_- \times \mathbf{E}_0^*)(\mathbf{m}_+ \times \mathbf{E}_0).$$

Проделав тождественные преобразования в правой части данного соотношения, получим

$$\mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0 = (\mathbf{m}_+\mathbf{m}_-)(\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0) - (\mathbf{m}_-\mathbf{E}_0)(\mathbf{m}_-\mathbf{E}_0)^*.$$

Вследствие того, что векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{m}_-$, согласно (24), (22), ортогональны, и в силу (26) отсюда действительно следует равенство модулей комплексных векторов $\mathbf{B}_0^*\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0$.

Abstract. In the frame of gage-invariant scalar theory of gravitation the propagation of electromagnetic waves is considered.

Литература

1. А. Н. Сердюков, Калибровочная теория скалярного гравитационного поля. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 257 с.
2. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов, Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. – Минск: Наука и техника. – 380 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.06