

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В.А. Зыкунов

ПЕРТУРБАТИВНЫЕ РАСЧЁТЫ
В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2020

УДК 539.171, 539.172.2

Зыкунов, В. А.

Пертурбативные расчёты в физике высоких энергий / В. А. Зыкунов; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. – 277 с.

ISBN 978-985-577-625-4

Монография посвящена детализированному описанию техник расчётов с использованием теории возмущений, которая активно применяется в современной физике при учёте радиационных эффектов в экспериментах, изучающих структуру микромира в режиме высоких энергий. Речь идет как об прошедших (E-158 в Стэнфордском центре линейного ускорителя SLAC), идущих полным ходом экспериментальных программах (CMS LHC в Европейском центре ядерных исследований CERN), так и планируемых экспериментах (MOLLER в Лаборатории им. Джефферсона Jlab и Belle II в KEK), а также экспериментах на будущем электрон-позитронном коллайдере (ILC, CLIC, FCC, CEPC).

Монография будет полезной для специалистов в области физики высоких энергий и читателей, интересующихся феноменологией Стандартной модели и методами расчётов в физике элементарных частиц.

Табл. 23. Ил. 74. Библиогр.: 292 назв.

Рекомендовано к изданию
научно-техническим советом учреждения образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор В. В. Андреев
доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Арбузов

ISBN 978-985-577-625-4

© Зыкунов, В. А., 2020

© Учреждение образования
“Гомельский государственный
университет имени Франциска
Скорины”, 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	7
1 ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ	11
1.1 Экспериментальная физика высоких энергий	12
1.1.1 Адронные эксперименты	14
1.1.2 Лептонные эксперименты	17
1.1.3 Лептон-адронные эксперименты	19
1.2 Теория в рамках Стандартной модели	21
1.2.1 Лагранжианы релятивистской теории поля	21
1.2.2 Локальная калибровочная инвариантность	23
1.2.3 Формальное описание правил Фейнмана	24
1.2.4 Физика за рамками Стандартной модели	28
1.3 Учёт эффектов радиационных поправок	31
1.3.1 Расходимости в диаграммах высших порядков	33
1.3.2 Электромагнитные поправки	35
1.3.3 Электрослабые поправки	37
1.3.4 Поправки в адронных процессах	43
2 БАБА-РАССЕЯНИЕ	45
2.1 Описание процесса	46
2.1.1 Сечение в борновском приближении	47
2.1.2 Наблюдаемые величины	51
2.1.3 Относительные поправки	56
2.2 Вклад дополнительных виртуальных частиц	58
2.2.1 Бозонные собственные энергии	58
2.2.2 Вклад вершинных диаграмм	60
2.2.3 Боксы: выражения для амплитуд и сечения	62
2.2.4 Комбинации констант связи для боксов	66
2.2.5 Расчёт $\gamma\gamma$ -бокса	68

2.2.6	Расчёт γZ -бокса в LE-режиме	72
2.2.7	Расчёт ZZ - и WW -боксов в LE-режиме	76
2.2.8	Расчёт γZ , ZZ - и WW -боксов в HE-режиме	77
2.3	Тормозное излучение в Баба-рассеянии	81
2.3.1	Кинематика	81
2.3.2	Мягкие фотоны	86
2.3.3	Фазовый объём	87
2.3.4	Интегрирование по фазовому объёму	91
2.4	Численный анализ	93
3	МЁЛЛЕРОВСКОЕ РАССЕЙНИЕ	97
3.1	Борновское приближение и основные обозначения	97
3.2	Вклад дополнительных виртуальных частиц	102
3.2.1	Бозонные собственные энергии	103
3.2.2	Ренормализационные условия	104
3.2.3	Относительная поправка к асимметрии от BSE	106
3.2.4	Электронные вершинные функции	107
3.2.5	Двухбозонный обмен	111
3.3	Тормозное излучение в мёллеровском рассеянии	116
3.3.1	Мягкие фотоны и сокращение ИКР	120
3.3.2	Ведущее логарифмическое приближение	121
3.4	Численные оценки	124
3.4.1	LE-режим	124
3.4.2	HE-режим	126
3.4.3	Реальные условия эксперимента MOLLER	129
4	ЧЕТЫРЁХФЕРМИОННЫЙ ПРОЦЕСС	133
4.1	Безрадиационный четырёхфермионный процесс	134
4.1.1	Однопетлевые амплитуды и сечения	137
4.2	Аналитические выражения для относительных поправок	139
4.2.1	Собственные энергии бозонов	140
4.2.2	Вершинный вклад	141
4.2.3	Двухбозонный вклад	142
4.3	Тормозное излучение в четырёхфермионном процессе	148
4.3.1	Кинематика, амплитуды, сечения	148
4.3.2	Мягкие фотоны. Сокращение ИКР	150
4.3.3	Жесткие фотоны. Сокращение параметра ω	151

4.3.4	Инклюзивная поправка конечного состояния	155
4.3.5	Двухпетлевые ЭМП конечного состояния	157
4.4	Численные результаты и выводы	160
5	ПРОЦЕСС ДРЕЛЛА – ЯНА	165
5.1	Описание процесса	166
5.2	Конволюция	168
5.3	Безрадиационная кинематика	169
5.4	Сечения кварковых подпроцессов	172
5.5	Однопетлевые безрадиационные вклады	174
5.5.1	Бозонные собственные энергии. Вершинные вклады	174
5.5.2	Боксы: общие выражения	176
5.5.3	Боксы: HE- и LE-режимы	178
5.5.4	Сравнение с результатами других групп	179
5.6	Адронное сечение безрадиационных вкладов	181
5.7	Тормозное излучение в процессе Дрелла – Яна	182
5.7.1	Вклад мягких фотонов	186
5.7.2	Радиационная кинематика процесса Дрелла – Яна	188
5.7.3	Связь полного и дифференциального сечения	189
5.8	Решение проблемы кварковой массовой сингулярности	190
5.9	КХД радиационные поправки	191
5.10	Численные оценки ЭСП для условий CMS LHC	192
6	РАСЧЁТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ	197
6.1	Правила Фейнмана	197
6.2	Дилогарифм Спенса	201
6.3	Расчёт и перенормировка бозонной собственной энергии	202
6.4	Расчёт и перенормировка вершины	206
6.4.1	Скалярная часть	207
6.4.2	Векторная часть	211
6.4.3	Тензорная часть	212
6.4.4	Перенормировка вершины	214
6.5	Векторное и тензорное интегрирование	216
6.5.1	Интегралы G_α , H_α и F_α	216
6.5.2	Интегралы I_α и $I_{\alpha\beta}$	218
6.6	Скалярные многоточечные функции	220
6.6.1	Двухточечные функции	220

6.6.2	Трёхточечные функции	221
6.6.3	Четырёхточечные интегралы X_0 и I_0	225
6.6.4	Случай разных масс	227
6.7	Интегралы мягкого тормозного излучения	228
6.8	Вывод выражения для σ_K	236
6.9	Метод спиральных амплитуд	238
6.10	Кварковая асимметрия вперёд-назад	243
6.11	Интегралы для жёсткого тормозного излучения	245
ПОСЛЕСЛОВИЕ		247
ЛИТЕРАТУРА		249
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ		277

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ВВЕДЕНИЕ

Физика высоких энергий зародилась в начале XX века во времена становления квантовой механики и осознания принципа релятивизма. Теперь, с появлением технологических возможностей экспериментировать с объектами микромира и с помощью компьютера обрабатывать большие объёмы полученной информации, она представляет собой сплав идей из этих и многих других областей знания. К современному состоянию физика высоких энергий пришла, интенсивно развиваясь в двух аспектах.

- С одной стороны, достигнут огромный прогресс в области эксперимента: обнаружены переносчики слабого взаимодействия – массивные векторные W^\pm - и Z -бозоны [1] (CERN), открыто третье поколение фермионов: τ -лептон [2] (SLAC), τ -нейтрино [3] (FermiLab), b -[4] (FermiLab) и t -кварк [5], [6] (FermiLab), обнаружены нейтринные осцилляции [7] (SNO, SuperKamiokande) и, как следствие, массы у нейтрино, наконец, открыт новый скалярный (хиггсовский) бозон [8] (CERN).
- С другой стороны, существенно развились основы теории. Принято говорить об осуществившемся объединении трех известных до недавнего времени типов взаимодействий – электромагнитного, слабого и сильного, хотя в ходе построения современного варианта теории естественным образом возникают и другие типы полевых взаимодействий и самодействий (в основном это связано с довольно естественным появлением в теории нового скалярного [хиггсовского] поля). Единая электрослабая теория [9], [10], [11] и квантовая хромодинамика (КХД) [12] к настоящему моменту получили множество неопровержимых экспериментальных доказательств своей состоятельности, стали естественным элементом современной физики и сейчас носят общепринятое название: Стандартная модель (СМ).

Несмотря на впечатляющие успехи СМ, общеизвестны её принципиальные теоретические проблемы: наличие (как думается, неоправданно) боль-

шого числа свободных параметров, невыясненность повторения поколений фермионов и их числа, а также закономерности роста фермионных масс, проблема (калибровочной) иерархии, сложности включения в СМ гравитационного взаимодействия и частиц, которые могли бы объяснить существование тёмной материи. Хотя к настоящему моменту экспериментальных данных, говорящих прямо против СМ, не появилось, а частица Хиггса, наконец, после долгих усилий, обнаружена, поиски явлений, выходящих за рамки СМ, не прекращаются: проводятся поисковые эксперименты и строятся теории – варианты выхода за рамки СМ, так называемая Новая физика (НФ). Причинами тому являются не только упомянутые проблемы Стандартной модели, но и “здоровое любопытство” человечества – стремление познания Природы.

Среди сценариев Новой физики, существующих на настоящий момент, следует выделить *теорию великого объединения* (лептоны и кварки рассматриваются в рамках единой группы симметрии), *суперсимметрию* (SUSY), объединяющую фермионы и бозоны, а также *супергравитацию* (описание гравитации на языке SUSY). Имеются и другие интересные идеи, например, *струнная теория*, рассматривающая элементарные частицы как объекты, совершающие колебания в многомерном пространстве и обладающие (супер)симметрией бозон-фермион (суперструны). В струнной теории получила развитие идея Калуцы–Кляйна о сворачивании пространственных измерений. В результате объединения теории струн и суперсимметрии впоследствии сформировалась перспективная теория миров на бранах (*M-теория*).

Научный мир, получив подтверждение открытия бозона Хиггса, надеется и на обнаружение следов Новой физики. В свое время подобные надежды возлагались на LEP – кольцевой коллайдер на встречных пучках электронов и позитронов в CERN (Европейском Центре Ядерных Исследований), а затем на Tevatron – $p\bar{p}$ коллайдер в Fermilab. Теперь рассматриваемые перспективы связаны, в основном, с Большим адронным коллайдером, LHC. Заметим, что другой адронный коллайдер однажды сыграл роль машины открытия: коллаборации UA1 и UA2 в CERN открыли W -бозоны [13] и Z -бозоны [14]. И в дальнейшем становлении СМ коллайдерные эксперименты в электрослабом секторе были определяющими: так, два электрон-позитронных коллайдера (SLC – линейный коллайдер в SLAC и LEP – кольцевой коллайдер в CERN) в свое время собрали огромное количество точной информации, в результате чего за СМ был фактически утвержден статус экспериментально подтвержденной теории.

Вполне вероятно, что ход развития физики высоких энергий будет таким: успешные эксперименты ATLAS и CMS на LHC (как почти сорок лет назад UA1 и UA2) обусловят и мотивируют проектирование и запуск аналога коллайдеров SLC и LEP, то есть машины, которая:

- работает с лептонами – таким образом будет обеспечена высокая чистота экспериментальных данных, достичь которой в случае адронных столкновений невозможно;
- спроектирована на заданную область энергии, возможно, на ту, где LHC найдет проявления физики за рамками Стандартной модели.

Физики надеются, что такая машина – Международный линейный коллайдер (ILC), либо какой-либо из конкурирующих с ним проектов, обязательно будет построена.

Физика высоких энергий в настоящий момент находится в непростой ситуации. Достигнуты энергии, с одной стороны, соответствующие пределам применимости СМ, а с другой – возможностям экспериментальной техники и разумной стоимости реализации проектов. Несмотря на то, что весь существующий набор экспериментальной информации находится в надежном согласии с предсказаниями СМ, многое указывает на то, что уже в освоенном диапазоне энергий должна проявиться Новая физика, чему, в основном, и посвящены экспериментальные программы существующих и планируемых ускорителей, причем НФ, по всей видимости, проявится не через обнаружение новых частиц и/или новых явлений, а по небольшим отклонениям от предсказаний СМ. Обнаружение новых физических явлений по такому сценарию возможно только в ходе крайне точного (прецизионного) сравнения полученных экспериментальных данных с предсказаниями теории.

Возрастающая экспериментальная точность требует соответствующего улучшения точности теоретического описания исследуемых процессов, протекающих в микромире, и обеспечения экспериментов, представляющих интерес для современной физики высоких энергий, надежными и прецизионными программами учёта не только первого порядка теории возмущений, но и более высоких её порядков (предварительно назовём их радиационными эффектами, а более точно опишем ниже). Этим определяется *актуальность* настоящей монографии и мотивируется ее *цель* – подробное (детальное до той степени, которая может быть понята начинающими специалистами, например, студентами старших курсов вузов) описание пертурбативных методов расчётов радиационных эффектов и применение их в современных экс-

периментальных программах. Рассмотрены основные, можно сказать, простейшие процессы, интересные для физики высоких энергий.

Автор не стремится к единообразию применения расчётной техники для описания выбранных процессов, напротив, рассматриваются различные методы, проводится их сравнение с точек зрения как простоты и удобства использования, полезности для разных ситуаций, так и области применимости. В монографии автором дан минимум теоретических сведений, основной текст занимает практический расчётный материал.

Такой подход, во-первых, обоснован тем, что в настоящий момент существует огромное количество прекрасных учебников на любой вкус, в которых последовательно изложены основы и концептуальные принципы квантовой теории поля. Следует, прежде всего, порекомендовать классические книги по квантовой электродинамике Ахиезера и Берестецкого [15] и [16] (из курса Ландау – Лифшица), хотя для первого чтения, возможно, более подходят мастерски написанные и несложные учебники Москалева [17] и Гриффитса [18]. Основы Стандартной модели и техника диаграмм Фейнмана в необходимом объёме изложены в книге Биленького [19], а релятивистская кинематика элементарных частиц отлично объяснена в учебнике Бюклинга и Каянти [20].

Во-вторых, гораздо меньше литературы по приложениям пертурбативных методов в конкретных задачах, так что для многих начинающих физиков доведение расчёта “до числа” является сложной, едва ли не непреодолимой задачей, несмотря на существующую прямую возможность использовать программные комплексы активно развившейся в последнее время *компьютерной алгебры*. Возможную причину этого автор видит в том, что методы пертурбативных расчётов в физике высоких энергий разрабатывались десятилетиями и сильно рассеяны в оригинальных (то есть довольно старых) статьях и книгах, а терминология по расчётным методикам, несмотря на долгий пройденный путь, так полностью и не устоялась (это касается также и неустоявшегося соответствия англоязычных и русскоязычных терминов). Автор надеется на то, что частично заполнит отмеченные пробелы и эта монография окажется полезной физикам, начинающим практически работать в интереснейшей области современного знания, – физике высоких энергий.

1 ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В 1960–1970-е гг. была разработана теория, оказавшаяся способной корректно и единообразно описать три уже известных взаимодействия: электромагнитное, слабое, сильное. Эта теория, получившая название Стандартной модели, изначально оперировала двумя семействами элементарных частиц (лептонами и кварками) и включала в себя электрослабую теорию Глэшоу – Вайнберга – Салама [9], [10], [11] и квантовую хромодинамику [12]. Сразу же было установлено, что в пределе малых энергий (как и требует *принцип соответствия*) СМ естественным образом переходит в квантовую электродинамику (КЭД) и четырёхфермионную модель слабого взаимодействия (модель Ферми).

С момента, когда СМ стала “общепринятой” (примерно с 1978 г.), все теоретически предсказанные ею природные феномены получали безусловное экспериментальное подтверждение. Бозон Хиггса, который часто называют краеугольным камнем СМ, довольно долго не наблюдался, но также был недавно экспериментально обнаружен коллаборациями ATLAS и CMS [8] и подтвержден данными Tevatron [21].



Рис. 1.1: Стивен Вайнберг (Steven Weinberg; род. 1933) – американский физик. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1979 г. “за вклад в объединённую теорию слабых и электромагнитных взаимодействий между элементарными частицами, в том числе предсказание слабых нейтральных токов” [совместно с Ш. Л Глэшоу и М. А Саламом]



Рис. 1.2: Питер Уэр Хиггс (Peter Ware Higgs; 1929) – британский физик-теоретик. Франсуа Энглер (Francois Englert; 1932) – бельгийский физик-теоретик. Лауреаты Нобелевской премии по физике за 2013 г. за теоретическое открытие механизма генерации массы субатомных частиц в релятивистской калибровочной теории, подтвержденное обнаружением бозона Хиггса в ходе экспериментов на Большом адронном коллайдере

1.1 Экспериментальная физика высоких энергий

Экспериментальные исследования в физике микромира нуждаются в источниках частиц высоких энергий, которыми являются ускорители заряженных частиц, ядерные реакторы, а также космические лучи. Прогресс в области эксперимента за последние полстолетия был связан со всеми тремя типами. Так, на ядерных реакторах была реализована уникальная возможность получать с целью дальнейшего исследования электрически нейтральные частицы – нейтрино и нейтроны. Активно используются космические лучи – источник частиц, обладающих огромной энергией, достигнуть которой в лаборатории непросто, и к тому же бесплатной; с другой стороны, эксперименты на космических лучах чрезвычайно трудно повторить из-за их случайной природы. Отдельный интерес представляют эксперименты по изучению космических (солнечных) нейтрино, именно на них были обнаружены нейтринные осцилляции – взаимопревращения различных типов нейтрино и антинейтрино (SNO, Канада и SuperKamiokande, Япония) [7]. Тема монографии связана с третьим типом – экспериментами физики высоких энергий на ускорителях.

Следуя установившейся терминологии, “высокими” называют такие энергии столкновений (реакции) \sqrt{s} (подробнее об используемой системе физических величин и определении энергии см. в разд. 6.1), которые существенно выше, чем массы самих сталкивающихся частиц m_f . В заголовке и всем последующем тексте будет идти речь только о таких энергиях. Тем не менее в настоящий момент в современной литературе по электрослабой физике, как и в этой монографии, акценты в понятиях “низкий – высокий” смещены. Теперь (в эпоху электрослабой физики) масштаб энергии характеризуется также и относительно масс слабых W - и Z -бозонов, а именно так: часто “низкая энергия” соответствует области $m_f \ll \sqrt{s} \ll m_W$, а “высокая энергия” – области $\sqrt{s} \gg m_Z$ (последнюю также часто называют “сверхвысокой энергией”). Во избежание путаницы далее в тексте будем пользоваться такими терминами:

1. LE-режим (от “low energies”, низкие энергии): $m_f \ll \sqrt{s} \ll m_W$,
2. RE-режим (от “resonance”, Z -резонанс): $\sqrt{s} \sim m_Z$,
3. HE-режим (от “high energies”, высокие энергии): $\sqrt{s} \gg m_Z$.

Область энергий $\sqrt{s} \leq m_f$ (в первоначальном смысле слова “низких”) в монографии не рассматривается, кроме некоторых случаев, которые будут обсуждаться особо.

Перечислим и кратко охарактеризуем основные современные и планируемые экспериментальные комплексы по ускорению частиц до высоких энергий, сыгравшие роль в установлении СМ. Наиболее эффективно энергия сталкивающихся частиц используется, когда пучки заряженных частиц ускоряются в противоположных направлениях и сталкиваются в специальных точках (точках столкновения), как говорят, в режиме коллайдера. Пе-



Рис. 1.3: Энрико Ферми (Enrico Fermi; 1901–1954) – итальянский физик, создатель первого в мире ядерного реактора, внёс большой вклад в развитие ядерной физики, физики элементарных частиц, квантовой и статистической механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1938 г.

речислим и кратко охарактеризуем основные лаборатории, где в настоящий момент проходят современные (и/или планируются будущие) эксперименты по физике высоких энергий (приведём соответствующие общепринятые аббревиатуры для ссылок):

1. BNL – Брукхейвенская национальная лаборатория (Аптон, США),
2. CERN (ЦЕРН) – Европейский центр ядерных исследований (от фр. Conseil européen pour la recherche nucléaire), расположен на территории Швейцарии и Франции недалеко от Женевы),
3. DESY – Немецкий электронный синхротрон (от нем. Deutsches Elektronen-Synchrotron, Гамбург и Цойтен, Германия),
4. ИИЭП – Институт физики высоких энергий (Institute of High Energy Physics, Пекин, Китай),
5. JLab – Лаборатория Джефферсона (Ньюпорт-Ньюс, США),
6. КЕК – Организация по изучению высокоэнергетических ускорителей (Цукуба, Япония),
7. Fermilab – Национальная ускорительная лаборатория им. Энрико Ферми (Батавия, США),
8. SLAC – Центр Стэнфордского линейного ускорителя (Stanford Linear Accelerating Center, Пало-Альто, США),
9. ИФВЭ (ИИЭП) – Институт физики высоких энергий им. А. А. Логунова (Протвино, Россия),
10. ИЯФ СО РАН (BINP) – Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия),
11. ОИЯИ (Joint Institute for Nuclear Research, JINR) – Объединённый институт ядерных исследований (Дубна, Россия).

1.1.1 Адронные эксперименты

Как уже говорилось, история науки показывает, что адронные коллайдеры – это типичные машины новых открытий. Так, на экспериментах, прошедших на адронном коллайдере SPS (Super Proton Synchrotron – протонный

суперсинхротрон), коллаборациями UA1 и UA2 в CERN в 1983 г. был открыт сначала W -бозон [13], а затем Z -бозон [14], чем блестяще подтвердились основы СМ (первым экспериментальным проявлением СМ, однако, было обнаружение в 1973 г. нейтрального слабого тока [22] на пузырьковой камере Gargamelle в CERN, там был зафиксирован трек от электрона, в который врезалось нейтрино, обменявшись с ним Z -бозоном).

До недавнего времени самым мощным ускорителем был Tevatron – протон-антипротонный ($p\bar{p}$) коллайдер в Fermilab. Tevatron завершил свою работу в 2011 г. после 28 лет работы и нескольких модернизаций, после последней (upgraded Tevatron) он имел энергию 980 ГэВ на каждый пучок. К основным достижениям этого коллайдера относятся открытие коллаборациями CDF [6] и D0 [5] t -кварка (1995) – шестого и последнего на данный момент, также в ходе эксперимента DONuT (Direct Observation of the Nu Tau) впервые было непосредственно зарегистрировано τ -нейтрино ([3], 2000).

В 2008 г. запущен и, как планируется, в мае 2021 г. выйдет на максимальную энергию 14 ТэВ LHC (Large Hadron Collider, Большой Адронный Коллайдер, БАК) в CERN – протон-протонный и ядро-ядерный коллайдер. LHC проработает до конца 2024 г., что составит третий этап его работы – Run3. В 2012 г. коллаборации ATLAS и CMS объявили об экспериментальном обнаружении нового скалярного бозона [8] с массой 125.26 ± 0.21 ГэВ. После перерыва, в середине 2027 г., начнется работа коллайдера в режиме HL-LHC – на той же энергии, но повышенной светимости (High Luminosity LHC – LHC на высокой светимости). LHC проработает по крайней мере до 2035 г., собрав более 3000 fb^{-1} . Ранее планировалось, что, возможно, он уступит в 2040 г. место преемнику – коллайдеру VLHC (Very Large Hadron Collider) с энергией 27 ТэВ в с.ц.м. адронов, однако в настоящий момент этот проект не развивается.

Наконец, заслуживает упоминания релятивистский коллайдер тяжёлых ионов RHIC (The Relativistic Heavy Ion Collider), работающий в BNL. На этой установке изучается спиновая структура нуклонов и кварк-глюонная плазма. RHIC пока уникален в своей способности сталкивать поляризованные протоны.

Важнейшим процессом, изучаемым на адрон-адронных машинах, является процесс Дрелла – Яна – рождение пары противоположно заряженных лептонов в столкновениях адронов, имеющий свои характерные особенности, которые с успехом используют физики для получения ценной инфор-

мации о структуре материи (см., например, обзорный доклад [23] и ссылки там). Этот процесс впервые был экспериментально исследован в BNL [24], тогда же были получены данные, впоследствии ассоциированные с рождением J/ψ -частицы, открытой только в 1974 г. Далее процесс Дрелла – Яна послужил в 1977 г. делу открытия Υ -резонансов в Fermilab. Стремясь найти приложения кварк-партонной модели (КПМ) вне сектора лептон-адронных столкновений, Дрелл и Ян приступили к изучению жёсткого процесса рождения лептонной пары в адронных столкновениях в SLAC [25] [26]. Заметим, что немного ранее были опубликованы работы советских ученых (Матвеев, Мурадян, Тавхелидзе) на эту же тему [27] (имеется также английский перевод SLAC того времени). В перечисленных работах КПМ получила полное подтверждение, более того, был сделан значительный шаг по утверждению квантовой хромодинамики (КХД) на роль основы КПМ.

Процесс Дрелла – Яна позволил впервые изучить партонные распределения в нестабильных пионах и каонах (см. [28] и ссылки там) и детально изучить, комбинируя данные по протонам и антипротонам, отдельно валентные и “морские” распределения кварков в нуклоне [29]. В случае поляризованных адронов процесс Дрелла – Яна предоставляет уникальную возможность для исследования спиновых распределений, этому вопросу посвящена большая часть спиновой программы коллайдера RHIC. Исследование рождения прямых фотонов в протон-протонных столкновениях – источник ценной информации о вкладе глюонов в нуклонную поляризацию [30], [31].

Тестирование нового энергетического масштаба (тысячи ГэВ) в идущих полным ходом экспериментах на коллайдере LHC, то есть поиск на этом масштабе явлений, лежащих за пределами СМ, является одной из главных задач современной физики. Она осуществляется на пути изучения наблюдаемых величин (сечений и асимметрии вперёд-назад) процесса Дрелла – Яна при больших инвариантных массах лептонной пары l^+l^- .

Процесс рождения лептонов в адронных столкновениях в условиях большой статистики, которую предоставляет LHC, может быть полезен и для уточнения параметров СМ: так, рождение одиночных W -бозонов на LHC (процесс во многом сходный с процессом Дрелла – Яна) – прямой источник прецизионной информации о массе W -бозона (m_W). Точное определение m_W является одной из актуальных задач современной физики, поскольку оно позволяет, во-первых, точнее определить массу хиггсовского бозона и, во-вторых, усилить ограничения на возможные параметры НФ (в частности, суперсимметричного расширения СМ). Результат LEP после обработки всех

данных даёт неопределенность m_W примерно 50 МэВ [32], а результаты коллабораций D0 и CDF [33] в Fermilab после обработки всех данных Fermilab Tevatron – неопределенность 17 МэВ. Наконец, эксперименты с высокой статистикой коллайдера LHC дадут возможность получить значение массы m_W с неопределенностью лучшей, чем 15 МэВ [34].



Рис. 1.4: Лауреаты Нобелевской премии по физике за 1979 г. (совместно со С. Вайнбергом) Шелдон Ли Глэшоу (Sheldon Lee Glashow; род. 1932) – американский физик, Мухаммад Абдус Салам (Mohammad Abdus Salam; 1926 – 1996) – пакистанский физик

1.1.2 Лептонные эксперименты

Среди лептонных коллайдеров прежде всего нужно отметить фабрики по производству электрослабых бозонов SLC и LEP:

- SLC – Stanford Linear Collider – электрон-позитронный линейный коллайдер в SLAC с пучками с энергией в системе центра масс 90 ГэВ (его предшественник SPEAR обеспечил открытие τ -лептона [2]),
- LEP – Large Electron Positron (Ring) – кольцевой e^+e^- -коллайдер на встречных пучках электронов и позитронов в CERN с первоначальной энергией 50 ГэВ и последующим ее увеличением до 104.5 ГэВ, что позволило впервые исследовать парное рождение слабых бозонов.

Эти машины дали настолько много точной информации, что многие аспекты электрослабой теории были количественно проверены на новом уровне –

с учётом эффектов радиационных поправок. После анализа данных, полученных на этих машинах, за Стандартной моделью наконец был закреплен статус экспериментально подтвержденной теории.

С электронным коллайдером нового поколения –

- Международным линейным коллайдером (International Linear Collider, ILC), который по плану будет состоять из двух линейных ускорителей с энергией 500 ГэВ на пучок электронов и позитронов общей длиной 31 км (возможно дополнение новыми секциями, вследствие чего длина установки возрастет до 50 км, а энергия – до 1 ТэВ);
- конкурирующим и долгое время параллельно развивающимся с ним проектом – Компактным линейным коллайдером (Compact Linear Collider, CLIC) с суммарной энергией до 3 ТэВ;
- и новыми проектами “Будущий циклический коллайдер” (Future Circular Collider, FCC) – проектами по созданию коллайдера на базе CERN после окончания программы LHC с энергией в лептонном режиме (FCC-ee) от 45 до 175 ГэВ (~ 2039 г.) и в адронном режиме (FCC-hh) до 100 ТэВ (~ 2043 г.) [интересен также проект Кругового e^-e^+ -коллайдера (Circular Electron Positron Collider, CEPC), предложенный в 2012 г.],

связаны надежды научного мира по точному изучению свойств нового скалярного бозона в продолжение открытия LHC [8], физику t -кварка, а также поиск НФ: проявления дополнительных измерений [35], дополнительных бозонов [36], суперсимметрии, кандидатов на темную материю и, если НФ будет до этого обнаружена на LHC, ее интенсивное и прецизионное изучение, чему поможет относительная “чистота” лептонного типа реакций на ILC/CLIC/FCC/CEPC.

В работе ILC/CLIC/FCC/CEPC возможна также электрон-электронная (мёллеровская) мода, которая, как и при более низких энергиях в эксперименте E-158 (SLAC) и в планируемом эксперименте MOLLER в JLab, может быть чрезвычайно интересна как для прецизионных тестов и измерений СМ, так и для поисков НФ [38]. Как одна из естественных опций высокоэнергетических линейных коллайдеров типа ILC/CLIC в электрон-электронном режиме рассматривается проект *фотонного коллайдера*, на котором энергия и светимость имеют тот же масштаб, что и у исходных электронных пучков. При столкновении фотонов будут рождаться хиггсовские бозоны и любые новые заряженные частицы.

1.1.3 Лептон-адронные эксперименты

Лептон-адронные установки используются для исследования процессов упругого и глубоконеупругого рассеяния (ГНР) лептонов на нуклонах. Упругое *ep*-рассеяние – источник точной информации о структуре протона и определения слабых зарядов, оно весьма активно изучается, например, в JLab (эксперименты G0 и Qweak, [39] и ссылки там). Что касается ГНР, то, в первую очередь, именно благодаря изучению этого процесса утвердилось представление о кварках, как о фундаментальных составляющих адронов, что в свою очередь обеспечило становление “сильного” сектора СМ [40], [41].

Кварк-партоновая модель [42], [43], [44], основанная на предположении, что составляющие нуклон партоны на малых расстояниях ведут себя как свободные частицы, хорошо описывала экспериментальные данные, но имела и трудности: например, нарушение принципа Паули для барионов и отклонение данных от точного скейлинга [45]. Они были решены с созданием КХД – динамической теории кварков и глюонов.

В рамках КХД каждому кварку приписывается новая характеристика – “цвет”, вводятся “цветные” глюоны, обмениваясь которыми, и взаимодействуют кварки [46], [47]. Наблюдаемые адроны остаются “бесцветными”, то есть являются синглетами относительно “цветовой” группы $SU_C(3)$ [48], [49], на основе которой и построена КХД. Калибровочным глюонным полям КХД присуще самодействие, этот факт приводит к важнейшему физическому свойству – “асимптотической свободе” – ослаблению взаимодействия между кварками с уменьшением расстояния. При больших значениях квадрата переданного импульса, то есть в глубоконеупругой области, кварки и глюоны практически свободны, что делает возможным и целесооб-



Рис. 1.5: Вольфганг Эрнст Паули (Wolfgang Ernst Pauli; 1900–1958) – швейцарский физик-теоретик, работавший в области физики элементарных частиц и квантовой механики (понятие спина и спиноров, принцип запрета, предсказание нейтрино). Лауреат Нобелевской премии по физике за 1945 г.

разным применением здесь КПМ. Эволюция партонных (кварковых и глюонных) распределений в зависимости от переданного импульса описывается уравнениями Докшицера – Грибова – Липатова – Альтарелли – Паризи [50].

Данные по измерению спиновой структурной функции $g_1^p(x)$, полученные впервые в экспериментах E80 и E130 в SLAC [51], [52] по ГНР поляризованных электронов на поляризованной протонной мишени, хорошо согласовывались с КПМ. Однако ситуация в корне изменилась после проведения в 1988 г. эксперимента EMC [53], [54], результаты которого показали, что спиновая структурная функция $g_1^p(x)$ нарушает правило сумм Эллиса – Джаффе (1974 г.) [55] и полный кварковый вклад в спин протона $\Delta\Sigma$, в отличие от предсказаний КПМ, не превышает 30%. Принято говорить о сложившемся положении как о *спиновом кризисе*.

Эксперименты последних лет, направленные на разрешение спинового кризиса, проводились на четырёх установках:

- в CERN (SMC [56]) с пучками мюонов 190 ГэВ на твердых мишенях;
- в SLAC (E142 [57], E143 [58], E154 [59]) с пучками электронов энергией 20–50 ГэВ с газовыми и твердыми мишенями;
- в DESY (HERMES [60]) на коллайдере HERA с пучками электронов и протонов и энергией в системе центра масс ~ 318 ГэВ, где впервые активно исследовалась электрослабая физика глубоконеупругого рассеяния (заряженный ток) при высоких энергиях;
- в CERN (COMPASS [61]) с пучком мюонов 160 ГэВ (было показано, что вклад глюонов в спин ΔG не превышает кваркового).

Несмотря на непрекращающиеся экспериментальные и теоретические исследования проблемы протонного спина [62], [63], спиновый кризис не разрешен до сих пор. Возможно, проблема найдет решение в серии экспериментов по изучению трехмерной структуры протона, к которой коллаборация COMPASS++/AMBER планирует приступить в ближайшее время в CERN. Проект COMPASS++/AMBER является предложением по продолжению (в период после 2021 г.) исследований структуры и свойств адронов на ускорителе SPS (Super Proton Synchrotron, CERN) на базе существующей экспериментальной установки COMPASS. Предполагаемая физическая программа включает в себя: прецизионное измерение радиуса протона, измерение обобщённых партонных распределений в реакциях глубоко-виртуального

комптоновского рассеяния и глубоко-виртуального рождения мезонов, изучение структуры пионов, каонов, антипротонов и нуклонов в процессах Дрелла – Яна и рождения J/ψ -частицы, изучение глюонной структуры каонов в процессах рождения прямых фотонов и др.

1.2 Теория в рамках Стандартной модели

Одним из аргументов в пользу того, что СМ, по крайней мере в ближайшем будущем, будет улучшаться и расширяться, а не коренным образом перестраиваться, является то, что значительная, если не сказать подавляющая, часть явлений физики микромира теоретически описаны на основе единого принципа – требования *локальной калибровочной инвариантности (local gauge invariance)*. Она означает независимость “прогнозов физической полевой теории относительно (локальных) калибровочных преобразований – координатно-зависимых преобразований поля, описывающих переход между базисами в пространстве внутренних симметрий этого поля”.



Рис. 1.6: Поль Адриен Морис Дирак (Paul Adrien Maurice Dirac; 1902–1984) – английский физик, один из создателей квантовой механики и квантовой электродинамики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 г. Ввел статистическое распределение для фермионов, концепцию магнитного монополя и др.

1.2.1 Лагранжианы релятивистской теории поля

В *теории поля* мы имеем дело с физическими полями Φ_i [здесь индекс i нумерует поля, $i = (1, 2, \dots)$]. Поля по определению занимают некоторое место в пространстве-времени (координату в нём будем задавать 4-вектором x^μ) и, следовательно, являются функциями вида $\Phi_i = \Phi_i(x^\mu)$. Плотность функции Лагранжа (далее будем называть её *лагранжианом* \mathcal{L})¹ зависит от полей и их производных по координатам x^μ . Для сокращенной записи этих произ-

¹Точнее было бы называть \mathcal{L} плотностью лагранжиана.

водных традиционно используется обозначение:

$$\partial_\mu \Phi_i \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\mu}.$$

Зная лагранжиан и применяя принцип наименьшего действия $\delta S = 0$ (действие задаётся выражением: $S = \int \mathcal{L} d^4x$), нетрудно (по стандартной схеме вариационного исчисления) построить уравнения, описывающие физические поля – уравнения Лагранжа – Эйлера:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i}. \quad (1.1)$$

В классической механике функция Лагранжа определяется разностью кинетической и потенциальной энергий, затем из нее выводятся уравнения движения системы. В релятивистской квантовой теории поля на первом этапе, наоборот (так сложилось исторически), лагранжианы строятся на основе известных уравнений полей, причем такой подбор осуществляется неоднозначно, а с точностью до произвольного множителя и слагаемого определенного вида – дивергенции произвольной функции $\partial_\mu M^\mu$. Так, для свободного бесспинового (скалярного) поля Φ с массой m лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}_{(0)} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2. \quad (1.2)$$

Будем использовать систему $\hbar = c = 1$ и систему единиц Хевисайда – Лоренца. Применив уравнения Лагранжа – Эйлера (1.1), получим известное уравнение Клейна – Гордона – Фока:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0. \quad (1.3)$$

Для свободных полей ψ со спином $\frac{1}{2}$ и массой m лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_{(1/2)} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (1.4)$$

где γ^μ – так называемые гамма-матрицы (матрицы Дирака), ψ – четырёхкомпонентная комплексная волновая функция (так называемый *биспинор*). Отсюда непосредственно после применения (1.1) вытекают уравнения Дирака для биспинора ψ и для присоединенного биспинора $\bar{\psi}$ (используется сокращение $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$):

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0, \quad i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0. \quad (1.5)$$

Эти релятивистские уравнения, которые впервые были установлены Полем Дираком в 1928 г., позволяют естественным образом объяснить спин (собственный механический момент электрона), равный $\frac{1}{2}\hbar$. Другим замечательным свойством (1.5) стала возможность ввести представление об античастицах и предсказать их свойства: ту же массу, что и у соответствующей частицы (это впервые заметил Герман Вейль), но противоположные – электрический заряд, лептонное число и чётность. Впервые античастицу (позитрон) экспериментально обнаружил Карл Андерсон в 1932 г.

Наконец, для свободного поля A со спином 1 (так называемого векторного поля) с массой m лагранжиан выглядит так:

$$\mathcal{L}_{(1)} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu, \quad (1.6)$$

где $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ – тензор (электромагнитного) поля. После применения (1.1) получаем уравнение Прока:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (1.7)$$

1.2.2 Локальная калибровочная инвариантность

Лагранжиан свободного поля со спином $\frac{1}{2}$ (1.4) станет инвариантен относительно так называемого локального (то есть зависящего от положения в пространстве-времени x) калибровочного преобразования:

$$\psi \rightarrow e^{-iq\alpha(x)}\psi \quad (1.8)$$

и соответствующего для присоединенного биспинора (здесь q – электрический заряд частицы, которая описывается уравнением Дирака), если к нему добавить безмассовое векторное поле A_μ , которое при калибровочном преобразовании (1.8) меняется по закону:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.9)$$

Новый лагранжиан выглядит так:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - q(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu. \quad (1.10)$$

Здесь A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля, а выражение в скобках в последнем слагаемом – плотность тока $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Два последних слагаемых – это лагранжиан электромагнитного поля с источником J^μ , из которого немедленно следуют уравнения Максвелла в тензорной форме:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = qJ^\nu. \quad (1.11)$$

Из последнего уравнения следует $\partial_\mu J^\mu = 0$, то есть ток удовлетворяет уравнению непрерывности, что означает закон сохранения заряда. Таким образом, требование локальной калибровочной инвариантности связывает спинорное и электромагнитное поля и обеспечивает их единое описание в рамках квантовой электродинамики. Обобщить этот результат можно следующим правилом: чтобы обеспечить локальную калибровочную инвариантность лагранжиана свободного спинорного поля, нужно осуществить последовательную замену $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$, где $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ – так называемая ковариантная (“длинная”) производная.

Идея применения локальной калибровочной инвариантности относительно преобразования (1.8), относящегося к группе симметрии унитарных матриц $U(1)$, восходит к работе Вейля (1919), однако всю мощь этого метода физики смогли оценить только во второй половине века. Сначала Янг и Миллс в 1954 г. попытались применить эту же стратегию для описания преобразования двух полей со спином $\frac{1}{2}$, объединенных в дублет (протона и нейтрона, массы которых различаются незначительно) относительно неабелевой группы $SU(2)$.

Хотя этот прием оказался неприменим именно для описания протона и нейтрона по причине несуществования в природе соответствующего безмассового калибровочного поля, принципиальный переход от абелевой симметрии к неабелевой позволил по следам работ Янга и Миллса построить теорию, основанную на цветовой $SU(3)$ симметрии. Теория получила название квантовая хромодинамика – КХД. Лагранжиан КХД имеет вид, по структуре совпадающий с (1.10):

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu}\vec{F}_{\mu\nu} - q_C(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\lambda}\psi)\vec{A}_\mu, \quad (1.12)$$

где

$$\vec{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu\vec{A}^\nu - \partial^\nu\vec{A}^\mu - 2q_C\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu, \quad (1.13)$$

q_C – цветовой заряд, $\vec{\lambda}$ – матрицы Гелл-Мана, а \vec{A}^μ – векторное калибровочное поле глюонов (знак вектора означает 8 компонент, соответствующих октету глюонных полей).

1.2.3 Формальное описание правил Фейнмана

Рассмотренные выше лагранжианы описывают как классические, так и квантовые поля, в том смысле, что для того, чтобы перейти к точной квантовой теории, не требуется какая-либо модификация лагранжиана или уравнений

поля. То, что требуется, – это иная интерпретация переменных, описывающих поля. Говорят, что поля “квантуются”, то есть элементарная частица рассматривается как квант соответствующего поля: фотон – квант электромагнитного поля, глюон – квант сильного цветового поля, лептоны и кварки – кванты дираковских полей и т. д.

Теория возмущений (perturbation theory, отсюда термин “*пертурбативный*”) приводит к соответствию между лагранжианом и правилами, по которым можно построить амплитуду (матричный элемент) процесса с участием элементарных частиц.

Такие правила носят название правил Фейнмана: свободному лагранжиану соответствует так называемый *пропагатор*, лагранжиану взаимодействия – вершина. Минимальный набор правил Фейнмана, требующийся для работы в рамках СМ, приведен в разд. 6.1, здесь будет приведено их формальное описание, достаточное для первого чтения.

Итак, выражения для пропагаторов можно получить из полевых уравнений (1.3), (1.5), (1.7). Перепишем их в *импульсном представлении*, применяя известное правило перехода квантовой механики

$$i\hbar\partial_\mu \rightarrow p_\mu$$

(сокращённые обозначения объяснены в разд. 6.1):

$$\begin{aligned} [p^2 - m^2]\Phi &= 0 && \text{– для поля спина } 0; \\ [\hat{p} - m]u = 0, & ([\hat{p} + m]v = 0) && \text{– для (анти)частиц спина } \frac{1}{2}; \\ [(-p^2 + m^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu]A^\nu &= 0 && \text{– для поля спина } 1. \end{aligned}$$

Пропагаторы формально можно определить как величины, обратные к выражениям, которые находятся в квадратных скобках в полевых уравнениях



Рис. 1.7: Ричард Филлипс Фейнман (Richard Phillips Feynman; 1918–1988) – американский физик, один из создателей квантовой электродинамики. Разработал метод интегрирования по траекториям (1948), метод диаграмм Фейнмана (1949), партонную модель нуклона (1969). Лауреат Нобелевской премии (1965)

(также традиционно домножаем на i):

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \text{ - для поля спина } 0; \quad (1.14)$$

$$\frac{i}{\hat{p} - m} \text{ - для поля спина } \frac{1}{2}; \quad (1.15)$$

$$\frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right] \text{ - для поля спина } 1 \text{ и } m \neq 0. \quad (1.16)$$

В случае безмассового векторного поля необходимо вернуться к уравнениям поля и выбрать подходящую калибровку, тогда, например, при выборе калибровки Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ пропагатор фотона имеет вид $-ig_{\mu\nu}/p^2$.

Вводя в лагранжиан так называемые члены, фиксирующие калибровку, получим пропагатор векторного бозона в общем виде R_ξ -калибровки:

$$\frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \xi m^2} \right], \quad (1.17)$$

где ξ – параметр, определяющий тип калибровки. При $\xi = \infty$ (случай унитарной калибровки) пропагатор содержит два слагаемых, но хорош тем, что в теории не появляются нефизических частиц. В калибровке 'т Хоофта – Фейнмана ($\xi = 1$), которую автор последовательно использует в своих работах, пропагатор наиболее прост, однако требует рассмотрения нефизических вкладов “духов” Фаддеева – Попова.

Выражения для вершин получаем из слагаемого, соответствующего лагранжиану взаимодействия. Переходя в импульсное пространство, “обрезая” поля и снова традиционно домножая на i , получим:

$$-iq\gamma_\mu \text{ - для электрон-фотонной вершины}; \quad (1.18)$$

$$-iq_C\gamma_\mu \vec{\lambda} \text{ - для кварк-глюонной вершины}. \quad (1.19)$$

Наконец, объединяя принцип локальной калибровочной инвариантности и идею спонтанного нарушения калибровочной симметрии² с помощью механизма Хиггса [64] (теперь принято называть его механизмом Браута – Энглерта – Хиггса [Brout – Englert – Higgs mechanism] по фамилиям нобелевских лауреатов), строим лагранжиан, в котором векторные калибровочные

²Имеется в виду неабелева калибровочная симметрия группы $SU(2) \times U(1)$, объединяющая слабые и электромагнитные взаимодействия: $SU(2)$ – группа слабого изоспина, $U(1)$ – группа гиперзаряда. Левые фермионные поля $\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$ преобразуются по представлению $SU(2)$, правые фермионные поля $\psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$ – синглеты (знак при γ_5 жёстко не фиксируется, разный у разных авторов). Калибровочные поля СМ такие: триплет векторных безмассовых бозонов \mathbf{W}_μ (от трёх генераторов $SU(2)$) и синглет B_μ (от генератора $U(1)$). Жирной буквой везде обозначаем 3-вектор.

поля имеют массы (три из четырёх, четвертое – фотон – остаётся безмассовым). Представим здесь лагранжиан СМ в духе работы [65]:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_F, \quad (1.20)$$

где первое слагаемое описывает калибровочные поля СМ. Такими полями являются поля нейтрального Z - и заряженных W^\pm -бозонов, которые могут быть объединены с полем фотонов в рамках единой электрослабой теории. Фотонное поле описывается формулой (1.6), а точные выражения для полевых тензоров можно найти, например, в [65]. Второе слагаемое – лагранжиан скалярного хиггсовского поля, который выглядит так:

$$\mathcal{L}_H = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (1.21)$$

где $V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2$ – потенциальная часть скалярного поля со спонтанно нарушенной симметрией. Параметры, описывающие эту часть, связаны с v – средним по вакууму от хиггсовского поля и массой хиггсовского бозона m_H (см. [65], стр. 174). Третье слагаемое в (1.20) – лагранжиан, описывающий взаимодействие фермионных полей с калибровочными полями и с полем Хиггса (так называемый лагранжиан Юкавы). В последнем содержатся массовые члены, возникающие благодаря механизму Хиггса, юкавские константы связи пропорциональны соответствующим массам фермионов (для уточнения типа фермиона – лептон или кварк – используем индекс $f = l, q$):

$$g_f = \sqrt{2} m_f / v.$$

Приведем выражение для вершин, соответствующее взаимодействиям фермионных полей со всеми (в том числе с массивными) векторными калибровочными полями СМ. Для обозначения типа бозона используем индекс i , так что $i = \gamma, Z, W$. Итак, вершину запишем в унифицированной форме, характерной для работ [66], [67]:

$$ie\gamma_\mu (v_f^i - \gamma_5 a_f^i), \quad (1.22)$$

где v_f^i и a_f^i – векторная и аксиально-векторная (иногда говорят просто “аксиальная”) константы связи (см. подробно в разд. 6.1).

Прочие вершины электрослабой теории и КХД: 3-частичные $WW\gamma, WWZ, ggg$ и 4-частичные $WW\gamma\gamma, WW\gamma Z, WWZZ, WWWW, gggg$ приведены в многочисленных оригинальных статьях и учебниках. Так как правила Фейнмана у разных авторов существенно разнятся по причине существования

определённой свободы в их форме записи, особенно для общего множителя (знака) [68]. Естественно, физически наблюдаемые величины не зависят от выбора правил Фейнмана. Автор последовательно использует в монографии выражения из обзора [66].

Массовые члены $m\bar{\psi}\psi$ дираковского лагранжиана (1.4) не инвариантны относительно электрослабой симметрии $SU(2)_L \times U(1)$, поэтому фермионы изначально вводятся безмассовыми и приобретают массу только после спонтанного нарушения симметрии. Лагранжиан взаимодействия дираковского и скалярного хиггсовского полей приводит к следующему правилу Фейнмана для соответствующей вершины: $-im_f/v$ (по современным оценкам $v \approx 246$ ГэВ). Численно масса хиггсовского бозона, как и прочие массы, теорией в рамках СМ не предсказывается.

1.2.4 Физика за рамками Стандартной модели

Несмотря на большой путь и замечательные успехи СМ, в ней остается ещё много неясных моментов, даже в наиболее изученном *электрослабом секторе*. Так, с явно недостаточной точностью измерены элементы матриц Кабиббо – Кобаяши – Маскавы [69] и Понтекорво – Маки – Накагавы – Сакаты [70], массы топ-кварка³, нейтрино и другие параметры СМ, это относится даже к таким фундаментальным параметрам, как масса W -бозона и синус угла Вайнберга. Недостаточно точно измерено нарушение CP -инвариантности, неточно известен круг процессов и явлений, где она нарушается. Нет надежной теоретической основы для существования или несуществования аномальных вершинных трех- и четырёхчастичных вкладов, запрещенных в СМ, и, хотя феноменологически аномальные константы имеют ограничения, напрямую связанные с точностью полученных экспериментальных данных, в ряде случаев эти ограничения оставляют желать лучшего. В границах непринципиальной модификации Стандартной модели вполне могут существовать дополнительные (например, Z' и W') калибровочные бозоны, на настоящий момент неясна их роль и массовый масштаб. Наконец, неизвестно, до какого энергетического масштаба СМ будет продолжать давать правильные предсказания для наблюдаемых величин.

Вышесказанное о проблемах теории электрослабых взаимодействий в полной мере относится и к *сильному сектору СМ*. Неизвестно, как из КХД

³Топ-кварк – очень тяжелый (масса равна примерно массе ядра гафния), но, тем не менее, в СМ рассматривается как точечный. Существует мнение, что именно изучение топ-кварка (в первую очередь – его одиночного рождения) приведет к экспериментальному открытию отклонения от предсказаний СМ.

получить низкоэнергетическую динамику: удержание кварков (конфайнмент), спонтанное нарушение киральной симметрии (симметрии лагранжиана КХД в пределе безмассовых кварков) и спектр адронных масс. Непонятно, почему КХД не нарушает CP -симметрию так, как это происходит в теории электрослабого взаимодействия (эксперименты также не показывают никакого нарушения CP -симметрии в области КХД), возможное объяснение этой проблемы даёт введение аксионов в рамках теории Печчеи – Квинн. Аппарата современной КХД недостаточно для последовательного рассмотрения связанных кварковых систем, функции партонных распределений вводятся до сих пор феноменологически. И если кварк-глюонная структура нуклона не вызывает сомнений [71], [72], то вопрос о природе нуклонного спина и о правилах его распределения (по валентным и морским кваркам, глюонам, по орбитальной и собственной компонентам) до сих пор нуждается в дополнительном изучении.

Существует довольно большое число теоретических проблем, которые СМ не в состоянии решить принципиально. В лагранжиане СМ содержится большое число свободных параметров (три калибровочные константы связи, массы фермионов и калибровочных бозонов, углы смешивания в матрицах Кабиббо – Кобаяши – Маскавы и Понтекорво – Маки – Накагавы – Сакавы, величина хиггсовской константы связи и масса хиггсовского бозона m_H). Неясны причины повторения поколений лептонов, нет обоснования их числа, непонятен огромный разброс в значениях фермионных масс при совершенно одинаковых прочих характеристиках (*проблема иерархии фермионных масс*). В СМ не фиксировано число поколений фермионов,⁴ по современным представлениям, подтвержденным данными коллайдера LEP (по крайней мере для нейтрино), оно равно трём. Кроме того, в СМ никак не включается гравитационное взаимодействие.

Хотя экспериментальных данных, говорящих против СМ, не существует, а кандидат на частицу Хиггса обнаружен, не прекращаются поиски выхода за рамки СМ – поиски Новой физики. Перечислим и коротко охарактеризуем их.

Прежде всего это Теория великого объединения (ТВО, Grand Unifica-

⁴Косвенным образом объясняется то, что лептоны и кварки имеют одинаковое число поколений. Швингер и позднее Адлер, Белл и Джаквиз показали, что аномальные треугольные диаграммы, приводящие к несохранению аксиального тока, неперенормируемы, но тем не менее их вклад взаимно сокращается отдельно в каждом поколении. По этой же причине электрические заряды кварков и лептонов нельзя назвать свободными параметрами СМ, их точные значения зафиксированы требованием сокращения *аксиальной аномалии* и, как следствие, требованием обеспечения перенормируемости СМ.

tion Theory) – объединение трёх типов взаимодействий: электромагнитного, слабого и сильного, простейший вариант которой разработали Джорджи и Глэшоу ([73], 1974). ТВО в рамках единой группы симметрии $SU(5)$ (как подгруппу она содержит группу SM) рассматривает мультиплеты лептонов и кварков, а кроме известных калибровочных полей SM , двенадцать новых “трехцветных” полей (так называемые лептокварки): X -частицы (с электрическим зарядом $\pm\frac{4}{3}$) и Y -частицы (с зарядом $\pm\frac{1}{3}$). Симметрия между лептонами и кварками считается точной в энергетической области $\sim 10^{16}$ ГэВ (как говорят “на масштабе Великого объединения”, массы лептокварков имеют значения именно такого порядка), где константы всех взаимодействий (электромагнитного, слабого и сильного) имеют примерно одинаковое значение $\sim \frac{1}{40}$. Понятно, что о прямой экспериментальной проверке ТВО не может идти речи в силу недоступности столь высоких энергий. Распад протона, который является предсказанием ТВО (минимальная модель ТВО дает для времени жизни протона значение в 10^{30} лет), однако можно зафиксировать: подобные измерения находятся вполне в соответствии с возможностями современной экспериментальной техники. Однако непрекращающиеся поиски распада протона пока не дали результата [74], что заставляет сомневаться по крайней мере в минимальных моделях ТВО. Наконец, поиски магнитного монополя ТВО (магнитного монополя ’т Хоофта – Полякова) в космических лучах также пока не принесли положительного результата.

Такая теория, как SUSY – суперсимметрия, объединяет в единые мультиплеты фермионы и бозоны (идея принадлежит Вессу и Зумино [75], 1974). Для такого объединения есть резоны:

- введение новых частиц (суперсимметричных партнеров) удачно модифицирует зависимость от энергии всех трёх констант связи, так что на масштабе ТВО они сходятся;
- естественным образом решается *проблема (калибровочной) иерархии*, которая состоит в том, что характерные энергетические масштабы известных фундаментальных взаимодействий слишком сильно различаются;
- легкие суперпартнеры (электрически нейтральные, бесцветные, стабильные) являются возможными кандидатами на объяснение природы тёмной материи (Dark Matter);
- появляется возможность подключить в единую теорию гравитацию –

описание гравитации на языке SUSY называют супергравитацией, которая в определенном смысле является “теорией всего” (к сожалению, приложения супергравитации пока не реализованы, поскольку не доказана её перенормируемость).

Существуют и другие идеи, например, струнная теория, рассматривающая не элементарные точечные частицы, а объекты, колеблющиеся в многомерных пространствах и обладающие симметрией бозон-фермион (суперструны). Квантовая теория поля и СМ в этом подходе являются лишь эффективными феноменологическими теориями в низкоэнергетическом пределе. Существенным компонентом теории струн является SUSY. В результате объединения таких теорий, как струнная и суперсимметричная, за последние годы сформировалась очень перспективная M -теория – теория миров на бранах (brane worlds, брана – многомерная мембрана), которая, например, имеет логичные подходы к решению проблем иерархии и числа фермионных поколений: ADD-сценарий (от Arkani-Hamed – Dimopoulos – Dvali), RS1- и RS2-сценарии (от Randall – Sundrum). В струнной теории получила свою вторую жизнь идея Калуцы и Кляйна компактификации (сворачивания) пространственных измерений, впервые примененная ими в 20-х годах прошлого столетия в попытке получить объединенную теорию гравитации и электромагнетизма. Теперь гравитон Калуцы – Кляйна (КК-гравитон) все активнее включается в феноменологический анализ данных.

1.3 Учёт эффектов радиационных поправок

Постоянное совершенствование экспериментальной техники требует анализа и, при необходимости, учёта вкладов радиационных эффектов в систематическую ошибку эксперимента. К тому же, в доступной сегодня области энергий явления физики, выходящей за рамки СМ, по всей видимости, проявятся не прямо (через обнаружение новых частиц и явлений, выходящих за границы сложившихся представлений), а косвенно – как раз по *небольшим отклонениям* от предсказаний СМ. Поэтому, наряду с получением прецизионных экспериментальных данных, требуется “прецизионная” теория.

Приближения в первом порядке теории возмущений – так называемого *борновского приближения* уже становится недостаточно, требуется учёт ненаблюдаемых радиационных эффектов, сопровождающих процесс; или, другими словами, требуется применение *процедуры радиационной поправки*. Задача её состоит в теоретическом расчёте *вклада экспериментально неот-*

личимых процессов более высокого порядка⁵ с последующей интерпретацией его при анализе экспериментально получаемого значения наблюдаемой величины.

В физике высоких энергий традиционно применяется метод пертурбативного разложения по константе связи α (в случае КХД – по константе сильного взаимодействия α_s , такую КХД называют пертурбативной) и уточнение предсказаний достигается за счёт учёта высших членов пертурбативного разложения. Принято считать, что для надежного анализа экспериментальных данных нужно иметь *точность теоретических предсказаний не хуже, чем треть от экспериментальной точности*. Для многих процессов физики высоких энергий эта задача ещё не решена.

Итак, общие тенденции развития экспериментальной техники (повышение возможных энергий и экспериментальной точности измерений) обосновывают безусловную актуальность задачи учёта радиационных поправок в практически всех современных экспериментах физики высоких энергий. В этом разделе приводятся сведения об общих принципах проведения пертурбативных расчётов и некоторых (как представляется автору, наиболее интересных) программах учёта радиационных эффектов в экспериментах физики высоких энергий.



Рис. 1.8: Макс Борн (Max Born; 1882–1970) – немецкий и британский физик и математик, лауреат Нобелевской премии по физике (1954). Автор фундаментальных результатов в квантовой теории: матричная механика, вероятностная интерпретация волновой функции Шрёдингера. Внёс существенный вклад в квантовую теорию рассеяния (борновское приближение)

⁵ Следует отличать процессы более высокого порядка от так называемых *фоновых процессов*. Фоновый процесс (в противоположность, как говорят экспериментаторы, сигнальному процессу) – это процесс, который экспериментально может быть принят за исследуемый (сигнальный), обычно в нём более сложное конечное состояние, в котором есть и частицы сигнального процесса, и другие. Определение это не совсем однозначно: например, процесс с тормозным излучением (фотон не детектируется), который в монографии подробно изучается, фоновым не считается, а относится к радиационным поправкам. К ним же относится процесс с рождением фермионных пар от излучения дополнительного виртуального фотона или глюона, они очень важны, но выходят за рамки этой книги.

Если перенормируемость квантовой электродинамики и построенный на ней аппарат электромагнитных поправок известны уже довольно давно⁶ (работы Дайсона, Томонаги, Фейнмана и Швингера 40-х гг. [78], [79], [80], [81], [82], [83]), то только в начале 70-х гг. (после доказательства перенормируемости теории полей Янга – Миллса нидерландскими физиками 'т Хоофтом и Велтманом [84], [85], [86]) стало ясно, что как электрослабые поправки, так и поправки пертурбативной КХД можно эффективно применять для коррекции экспериментальных данных (история расчётов ЭСП и подробный анализ совокупности точных экспериментальных данных, который определяет статус ЭСП как необходимого элемента в современном эксперименте и инструмента для исследования Новой физики в будущих экспериментах излагается, например, в [87] и [88]).

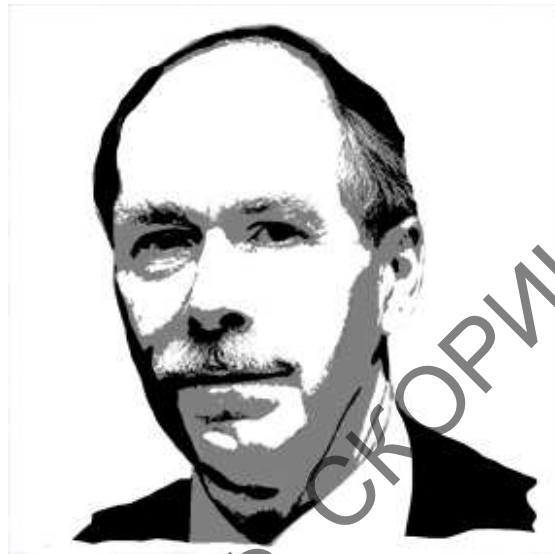


Рис. 1.9: Нидерландский физик Герард 'т Хоофт (Gerardus 't Hooft, род. 1946), лауреат Нобелевской премии по физике за 1999 г. “за прояснение квантовой структуры электрослабых взаимодействий” – доказательство перенормируемости теории полей Янга – Миллса [совместно с Мартинусом Велтманом (Martinus J. G. Veltman; род. 1931)]. Разработанные ими методы ренормализации янг-миллсовских полей, как безмассовых, так и получающих массу вследствие спонтанного нарушения симметрии, позволили оценить массы W , Z -бозонов и массу топ-кварка

1.3.1 Расходимости в диаграммах высших порядков

Вычисления в ходе процедуры радиационной поправки наталкиваются на трудности, связанные с расходимостями в диаграммах высших порядков. Что касается расходимости на верхнем пределе петлевых интегралов (так называемой *ультрафиолетовой расходимости*), то эта проблема решается с помощью процедуры *перенормировки (renormalization)* [86]. *Инфракрасная расходимость* (расходимость в области малых импульсов) вкладов дополнительных *виртуальных* частиц (V -вклада, от “virtual”) устраняется, ес-

⁶Вероятно первый последовательный расчёт с перенормировкой был выполнен Хансом Бете для точного вычисления лэмбовского сдвига в 1947 г. История развития квантовой теории поля, в частности метода перенормировки, подробно исследована и изложена в книгах [76], [77] С. Швебера, который был учеником Бете.

ли учесть соответствующий вклад от тормозного излучения (ТИ) *реальных* фотонов (R -вклад, от “real”).⁷ Математически инфракрасная расходимость (ИКР) либо параметризуется с помощью инфинитезимальной (бесконечно малой) массы фотона λ , либо вычисляется в рамках метода размерной регуляризации [86], [90], причем, как показано в [91], физически эти схемы эквивалентны.

Процесс перенормировки содержит определенную неоднозначность, о которой обычно говорят как о фиксировании условий перенормировки. Действительно, существует свобода выбора входных независимых параметров лагранжиана и связи параметров с экспериментально определяемыми величинами. Иными словами, возникает проблема возможных различий в численных данных на однопетлевом уровне, которые должны компенсироваться вкладом высших порядков, а однопетлевой вклад, соответственно, приобретает зависимость от схемы перенормировок. Весьма активно применяющейся схемой является \overline{MS} (minimal subtraction scheme, схема минимального вычитания) [92], [93], [94], ставшая весьма популярной для расчётов КХД-поправок, в которых нет особенных требований при выборе энергетического масштаба при определении входных параметров, достаточно лишь обеспечения условий, необходимых для работы теории возмущений. Для КЭД и электрослабой теории такие требования существуют (естественными параметрами являются постоянная тонкой структуры, извлеченная из классического томсоновского рассеяния, и массы частиц), поэтому на роль схемы, наиболее естественной с современной точки зрения для применения как в КЭД, так и в электрослабом секторе, вероятно, более всего претендует ренормализационная схема на массовой поверхности (РМП), которая была сформулирована в [95] и развита в работах [96], [97], [98], [65], [66], [67]. В соответствии с названием, в качестве входных параметров в ней используются массы частиц (фермионов, калибровочных бозонов и частицы Хиггса) и постоянная тонкой структуры α , а константа Ферми G_F , определяемая из данных по распаду мюона, в котором W -бозон не лежит на массовой поверхности, соответственно, входным параметром не является и может быть определена через параметры РМП с учётом вклада Δr соответствующих радиационных поправок (согласно формуле (6.11) с заменой $G_F \rightarrow (1 - \Delta r)G_F$).

В течение двух десятилетий со времен первых работ по пертурбативным расчётам в КЭД наблюдаемые величины основных процессов кванто-

⁷ Досконально в этой проблеме разобрались Блох и Нордсик ещё в 1937 г. [89].

вой электродинамики с учётом радиационных поправок были рассчитаны, а методы вычислений ЭМП и терминология в основном определены. Одним из основных терминов в пертурбативных КЭД расчётах являются так называемые *коллинеарные логарифмы* (collinear logarithms, CL), которые будем обозначать следующим образом:

$$L_{rf} = \ln \frac{|r|}{m_f^2}. \quad (1.23)$$

Под логарифмом стоит отношение лоренц-инварианта ($r = s, t, u, \dots$) и квадрата массы фермиона f , который излучает [если в числителе стоит величина, соответствующая характерному энергетическому масштабу реакции, (1.23) называют “большим логарифмом”]. Если в рассматриваемой реакции имеется фермион только одного сорта, то будем опускать второй индекс. Так, в главах 2 и 3, посвящённых рассеянию Баба и Мёллера, $L_r = \ln \frac{|r|}{m^2}$, где m – масса электрона (позитрона). Часто встречающийся логарифм отношения инвариантов будем обозначать так:

$$l_{r_1 r_2} = \ln \frac{|r_1|}{|r_2|},$$

например: $l_{st} = \ln \frac{s}{|t|}$, $l_{tu} = \ln \frac{t}{|u|}$, Введённые логарифмы в основном определяют структуру КЭД поправок или, иначе, их математическое содержание, знание которого необходимо, чтобы контролировать масштаб и поведение радиационных поправок и уметь конструировать программу их численной оценки с необходимой точностью.

1.3.2 Электромагнитные поправки

Один из первых детальных пертурбативных КЭД расчётов, который стоит отметить, был осуществлен Кахане в 1964 г. [99]. Им были оценены однопетлевые радиационные эффекты в πe -рассеянии. В 1971 г. была опубликована работа [100], посвящённая расчёту ЭМП для мюон-электронного рассеяния с оригинальным решением, использующим дисперсионные соотношения. В 1969 г. Мо и Тсаи проделали расчёт ЭМП [101], [102] в связи с экспериментами в SLAC [103], [104] по неполяризованному глубоконепругому рассеянию электронов на протонах. Проблема выделения ИКР во вкладе ТИ там решалась посредством введения параметра Δ , формально разделяющего области мягких и жестких фотонов. Формулы Мо – Тсаи были записаны в лабораторной системе отсчёта, поэтому годились лишь для

экспериментов на неподвижной мишени. Метод Мо – Тсаи успешно применялся в анализе данных различных экспериментов, например [105], однако, как показано в [106], он перестает работать при более высоких энергиях.

В работах [107], [108], [109], [110] Бардиным и Шумейко с соавторами был выполнен точный расчёт ЭМП к процессам упругого рассеяния неполяризованных точечных частиц и сформулирован ковариантный метод расчёта РП, который, в отличие от метода Мо – Тсаи, не оперирует с нековариантным (то есть зависящим от системы отсчёта) параметром “мягкости” фотона и работает в классе экспериментов, когда интегрирование R -вклада проводится по полному фазовому объёму тормозного фотона. В рамках этого метода были получены точные ковариантные формулы [111] для лептонных ЭМП низшего порядка для ГНР неполяризованных частиц.

В дальнейшем метод Бардина – Шумейко был обобщён на случай рассеяния поляризованных частиц [112], [113]. В работах [112] лептонные ЭМП в поляризационном $l^\pm N$ -ГНР найдены модельно-независимым образом и проводится анализ ЭМП к поляризационной асимметрии. На основе [112], [113] проводилась процедура РП в эксперименте SMC в CERN [56]. Метод Бардина – Шумейко применялся также для расчётов РП к полуинклюзивному ГНР [114], [115], [116]. Полные ЭМП для поляризационного lN -ГНР в кварк-партонной модели непосредственно в ультрарелятивистском приближении были рассчитаны в [117] и [118] (особое внимание в [118] уделялось анализу адронных поправок с применением системы компьютерной алгебры REDUCE [119]). Результаты работ [112],[113] легли в основу программы POLRAD20 [120], Монте-Карло генератора RADGEN [121], расчёта РП к процессу дифракционного электророждения векторных мезонов [122], а также к эксклюзивному процессу рождения векторных мезонов [123].

Ковариантный метод также активно использовался для расчёта РП в экспериментах по упругому электрон-протонному рассеянию на CEBAF [124], [125] (от. англ. Continuous Electron Beam Accelerator Facility – электронный ускоритель-рекуператор в JLab). Альтернативно РП в этой реакции для современной постановки в рамках экспериментов G0 и Q_{Weak} были посчитаны в работе [39] модельно зависимо и с применением метода Мо – Тсаи. С помощью метода Бардина – Шумейко также была решена проблема сокращения ИКР при расчёте ЭМП для мёллеровского рассеяния без поляризации (программа MERA) [126], который лег в основу Монте-Карло-генератора радиационных событий MERADGEN [127] для целей поляриметрии.

Другой подход к расчёту радиационных поправок, основанный на методе структурных функций, был предложен Кураевым и Фадиным в работе [131]. Он был обобщён на случай ГНР [132] и далее использован для расчёта комптоновского тензора с жестким фотоном для неполяризованных [133] и продольно поляризованных фермионов [134]. Расчёт лидирующей и следующей за лидирующей поправок к радиационному хвосту от упругого пика на основе метода структурных функций можно найти в [135].

Стоит отметить работу [128], в которой высчитаны ЭМП непосредственно к функциям партонных распределений. Анализ, проведенный в ней, учитывает КЭД-эволюцию кварковых распределений, что позволяет эффективно избавиться от этой неопределенности при анализе экспериментальных данных для наблюдаемых величин в рамках КПМ (см., например, наборы партонных распределений MRST2004QED [129] и MSTW2008 [130]).

1.3.3 Электрослабые поправки

Как уже говорилось, с установлением электрослабой теории расчёт ЭСП стал насущной необходимостью экспериментальной физики высоких энергий, а ЭМП со времени успешной реализации экспериментальных программ LEP и SLC рассматриваются в основном как частный случай ЭСП. В слабой составляющей ЭСП крайне важную роль (наряду с коллинеарными логарифмами) играют судаковские логарифмы (Sudakov logarithms, SL) [136], [137]. Для обозначения судаковских логарифмов будем пользоваться сокращённой записью:

$$L_{ra} = \ln \frac{|r|}{m_a^2}, \quad (1.24)$$



Рис. 1.10: Эдуард Алексеевич Кураев (1940–2014) – советский и российский физик. Автор высококлассных работ по квантовой теории поля

где под логарифмом стоит отношение инварианта ($r = s, t, u, \dots$) и квадрата массы бозона $a = Z, W$ (в работе Судакова [136] рассматривался случай массивного фотона: $a = \gamma$).

Ренормализационная схема на массовой поверхности, наиболее естественная с современной точки зрения для применения в электрослабом секторе, впервые была сформулирована для электрослабой теории в работе [95] и нашла применение в интерпретации низкоэнергетических процессов (соответствующих LE-режиму) типа распада мюона и рассеяния нейтрино [98]. В 1986 г. Бём, Холлик и Шпицбергер в работе [66] переформулировали РМП, широко обсудили её теоретические свойства, в первую очередь связанные с тождествами Уорда – Такахаша – Славнова – Тейлора,⁸ обеспечивающими калибровочную инвариантность теории, и привели подробные результаты для собственных фермионных и бозонных энергий и вершинных функций, пригодных для расчётов в различных каналах.

Развивая идеи упомянутых работ, в 1990 г. вышли: работа [138], в которой дается всестороннее обсуждение схемы перенормировок на массовой поверхности в варианте [98], и работа Холлика [65], в которой последовательно исследуются четырёхфермионные процессы типа $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$, в основном для нужд коллайдеров LEP и SLC. Немного позднее вышла работа Деннера [67], в которой схема РМП сформулирована по-другому (также в ней изучаются процессы с внешними W -бозонами). Сравнение схем перенормировки с различными ренормализационными условиями (условия Холлика [65], [66] и условия Деннера [67]) подробно обсуждается в главе 3.

Техника, описанная в работах [65], [66], [67], с успехом применялась для многочисленных расчётов ЭСП (перечислим некоторые из них): к рассеянию Баба [139], [140], [141], [142], [143] (при больших углах рассеяния [144]) (см. подробно в главе 2); реакции мёллеровского рассеяния [145], [146], [126], [147], [148], [149], [150] (см. подробно ниже в главе 3); к реакциям $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ [151]; $e^+e^- \rightarrow \gamma Z^0$ [152]; $e^+e^- \rightarrow Z^0 Z^0$ [153]; для распада топ-кварка [154]; $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ в [155], [156]; для процессов $ZZ \rightarrow ZZ$ [157] и $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$ [158]; для процесса $\mu^+\mu^- \rightarrow H\gamma$ [159]; для процесса $p\bar{p} \rightarrow e^+e^-$ в эксперименте PANDA [160].

Изучение четырёхфермионных процессов аннигиляции электрон-позитронной пары в пару фермионов другого сорта (см. главу 4) сыграло фунда-

⁸В простейшем КЭД-случае – это соотношения, связывающие вершинную функцию Γ_μ электрона и его собственную энергию Σ , вида: $\Gamma_\mu(p, p) = -\partial\Sigma(p)/\partial p^\mu$. В случае неабелевых полей Славнов и Тейлор нашли связи сложнее, они включают в себя также “духи” Фаддеева – Попова и играют ключевую роль в доказательстве калибровочной инвариантности, перенормируемости СМ и унитарности S -матрицы.

ментальную роль в формировании современных представлений о природе микромира. Среди особо значимых для электрослабой физики e^-e^+ -коллайдеров (обсуждаемый процесс экспериментально ставится естественным образом именно в режиме коллайдера) в первую очередь нужно отметить фабрики по производству слабых массивных бозонов SLC и LEP, которые дали столько точной информации, что основные аспекты электрослабой теории были прецизионно проверены, а некоторые (например, существование трех поколений нейтрино) были твердо установлены – Стандартная модель электрослабого взаимодействия получила статус экспериментально подтвержденной теории.

Процесс электрон-позитронной аннигиляции отнюдь не исчерпал свой потенциал и по настоящий день. Так, успешно продолжают свою работу установки, нацеленные на изучение мезонной физики VEPP (Новосибирск), BEPC-II (Пекин, Китай). В 2008 г. закончил работу эксперимент Babar (электроны 9.1 ГэВ, позитроны 3 ГэВ) на коллайдере PEP-II в SLAC, в котором изучалось нарушение CP -инвариантности.

Интересны программы SuperB (Италия) и Belle II (КЕК, Япония) – e^-e^+ -коллайдеры для производства B -мезонов. Энергии и экспериментальная постройка их примерно одинаковы. Запуск SuperB откладывается на неопределенный срок, далее обсудим программу Belle II. Одной из главных целей Belle II будет определение важнейшего параметра Стандартной модели – синуса угла Вайнберга $\sin\theta_W$ в канале $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ при энергии ниже Z -резонанса (для Belle II энергия реакции $\sqrt{s} = m(\Upsilon_{4S}) = 10.577$ ГэВ). Реальная постройка Belle II такая: энергия продольно поляризованного (80%) электрона 7 ГэВ, энергия неполяризованного позитрона 4 ГэВ, пучки сталкиваются под небольшим углом 40 мрад (2.292°). Измерения Belle II прекрасно дополняют данные, которые были получены для $\sin^2\theta_W$ из экспериментов E-158 (SLAC) и QWeak (JLab) и которые планируется существенно уточнить в эксперименте MOLLER. ЭСП для наблюдаемых асимметрий Belle II изучены в [37], [142], [143].

С установками ILC, CLIC, FCC, CEPC – электрон-позитронными коллайдерами нового поколения – связаны не только возможности точного изучения свойств нового скалярного (хиггсовского) бозона в продолжение открытия ЛНС [8], но и серьезные перспективы в поиске НФ: проявления дополнительных измерений, суперсимметрии, кандидатов на темную материю и, если НФ будет до этого обнаружена на ЛНС, ее интенсивное и прецизионное изучение, чему поможет относительная “чистота” лептонного типа реакций

на ILC/CLIC/FCC/CEPC. Как уже говорилось, в работе этих установок возможна мёллеровский режим работы (а на коллайдерах ILC и CLIC также и фотон-фотонная мода), которая, как и при более низких энергиях в экспериментах типа E-158/MOLLER, чрезвычайно интересна как для прецизионных тестов и измерений СМ, так и для поисков НФ [38].



Рис. 1.11: Фриц Берендс (Frederik Allard Berends; 1938–2002) – нидерландский физик. Автор высококлассных работ по пертурбативным расчётам

Одной из первых работ по расчёту радиационных поправок к четырёхфермионному процессу аннигиляции (см. подробно в главе 4) является работа Берендса с соавторами [161] (речь идет об электромагнитных поправках, также в [161] проведён учёт жестких фотонов). Для нужд коллайдеров LEP и SLC потребовалось систематическое включение слабой части поправок и точное соответствие экспериментальным возможностям детекторов. Решение этой задачи потребовало разработки соответствующего программного обеспечения. Перечислим названия некоторых программ расчёта ЭСП к наблюдаемым в обсуждаемом канале: ВММ и WOH [162], [163], [65],

LEPTOP [164], TORAZO [165], ZFITTER [166], [167] а также более поздние результаты группы SANC [168], [169] и программу ККМС [170], [171], в которой используются электрослабые библиотеки DIZET из ZFITTER. Этим коллаборациям удалось достичь впечатляющих результатов по согласованию [172], во многом благодаря чему экспериментальные данные LEP и SLC были успешно обработаны. Подробный анализ ЭСП в четырёхфермионном процессе с детальным изложением процедуры перенормировки приведен также в [88].

Важную роль в физике микромира играет изучение процессов рассеяния двух тождественных лептонов. Впервые сечение *мёллеровского рассеяния* (MP) в рамках КЭД на борновском уровне и без учёта поляризации было рассчитано в работе [173]. Только через двадцать лет (к тому времени процедура перенормировки в электродинамике была в основном разработана)

неполяризованное МР было изучено с точностью до ЭМП первого порядка (Рэдхэд [174]), затем подробно вклад в МР дополнительных виртуальных и реальных мягких фотонов исследовал Половин [175]. Позднее (1960) Тсаи [176] предложил последовательный подход для сокращения ИКР при расчёте сечения неполяризованного МР с учётом однопетлевых ЭМП. Учёт поляризации в МР впервые был произведен в работах ДеРаада мл. и Нг [177], [178], где были использованы результаты, ранее полученные в работах [101] и [179]. Поперечная поляризация в мёллеровском рассеянии исследовалась в работе [180] методом радиаторных функций. Другим методом (так называемым методом *спиральных амплитуд*, см. разд. 6.9) [161], [179] группой CALCUL были получены спиральные амплитуды мёллеровского рассеяния с излучением дополнительных реальных фотонов. Распределения по углам и энергиям реальных фотонов в МР изучались в [181].

Теоретические исследования, описанные выше, позволили экспериментально реализовать изучение процесса мёллеровского рассеяния для точного определения поляризации электронного пучка (*поляриметра*), которое осуществлялось, например, в экспериментах: SLC [182], E-143 [183] и E-154 [184] в SLAC, в нескольких экспериментах в JLab [185] и MIT-Bates [186]. Мёллеровский поляриметр может быть использован также в планируемых экспериментах на ILC/CLIC/FCC/CEPC [187]. При энергиях вышеупомянутых экспериментов для обеспечения требуемой точности достаточно знать однопетлевые ЭМП, которые впервые оценены с помощью ковариантного метода в работе [188]. Другой расчёт был предпринят в [126], где основное внимание уделено нахождению компактных, удобных для численной оценки выражений и исследованию эффектов зависимости от экспериментальных ограничений на неупругость и/или квадрат потерянной массы.

Эксперимент E-158 в SLAC [189], [190], [191], [192], в котором изучалось МР поляризованных электронов с энергиями 45–48 ГэВ на неполяризованных электронах водородной мишени, позволил получить с беспрецедентной точностью значение одного из важнейших параметров СМ – синуса угла Вайнберга s_W – LE-режиме [193]. Аналогичный эксперимент следующего поколения MOLLER [194] с пучком 11 ГэВ, который планируется осуществить в скором будущем в JLab, позволит измерить наблюдаемую асимметрию на лучшем уровне чувствительности 0.73×10^{-9} . Это даст возможность измерить слабый заряд электрона с относительной погрешностью 2.3% и определить s_W^2 с точностью ± 0.00026 (стат.) ± 0.00013 (сист.).

Поскольку МР с экспериментальной точки зрения – “чистый” процесс

с хорошо выраженной возможностью детектирования конечных частиц и легко подавляемым фоном, отклонения от СМ (то есть сигналы Новой физики) достаточно легко зафиксировать. Спектр новых явлений, которые могут быть открыты при прецизионном изучении МР чрезвычайно широк (суперсимметрия [195], дополнительный нейтральный Z' -бозон, композитность лептонов, эффекты аномального анапольного момента, скаляры с двойным зарядом, проявления дополнительных размерностей, билептоны, контактные взаимодействия [38], [196], [197] и т. д.). Мёллеровское рассеяние, таким образом, представляет существенный интерес в физике на масштабе ТэВ-ных энергий и играет существенную дополнительную роль к программе исследований ЛНС.

Первый расчёт ЭСП в МР был сделан Марсиано и Чарнецким в работе [197]. В соответствии с ним асимметрия, нарушающая чётность,⁹ в эксперименте E-158 должна уменьшаться за счёт ЭСП на $40 \pm 3\%$. В работе Деннера и Поццорини [145] ЭСП изучались для произвольной энергии реакции, включая планируемую область ILC. В вышеперечисленных работах были использованы различные ренормализационные схемы: в [197] – \overline{MS} , а в [145] – РМП. Стоит заметить, что в этих работах были включены не все вклады в ЭСП, например, полностью игнорировался вклад жёсткого ТИ, которое впервые для этого процесса (в эксперименте E-158) было учтено в работе Петриелло [199]. Позднее в работах [146], [200], также посвящённых расчёту ЭСП для E-158 и в которых применялся ковариантный метод выделения инфракрасной расходимости и РМП, было получено хорошее согласие с [197], [145], [199] для основных вкладов в ЭСП. Расчёт ЭСП к МР для сверхвысоких энергий ILC (HE-режим) был предпринят также в работе [147].

Серия новых расчётов [148], [149], [201], [202], [203], [204], [205] позволила, во-первых, провести расчёт в РМП с разными наборами ренормализационных условий и получить точное совпадение для полной поправки (не имея совпадения для отдельных вкладов); во-вторых, рассчитать полные однопетлевые ЭСП, концентрируясь на точности, хотя бы двумя способами, например: точно, без всяких приближений, используя современные вычислительные возможности, например, компьютерные коды *FeynArts* и *FormCalc* [206] (будем далее обозначать этот расчёт аббревиатурой EC – exact calculation), и приближенно, получив как результат весьма компактные формулы, удобные для анализа и “быстрой” оценки радиационных эффектов (обозначаем аббревиатурой AC – approximate calculation). Таким

⁹Нарушения чётности в мёллеровском рассеянии со слабым током предсказано Зельдовичем в 1959 г. [198].

образом, получив совпадение, легко контролировать точность на однопетлевом уровне. В-третьих, требуется получить результат, полностью (аналитически и численно) свободный от каких-либо нефизических параметров и высших коллинеарных логарифмов. Кроме этого были проанализированы электрослабые двухпетлевые вклады в наблюдаемые МР.

1.3.4 Поправки в адронных процессах

В адронном секторе электрослабые и КХД радиационные эффекты также активно рассчитывались. В рамках схемы РМП полные ЭСП низшего порядка (включающие ТИ) для ГНР лептонов на нуклонах были представлены в работах [207], [208], [209], [210], [211] (заряженные лептоны в рассеянии с нейтральным током), [212], [213] и [214] (заряженные лептоны в рассеянии с заряженным током), [215], [216] и [217], [218] (нейтрино в рассеянии с заряженным и слабым токами). ЭСП в рождении одиночных W -бозонов в адронных столкновениях рассмотрены в работах [219], [220], [221], [222], [223] и авторских работах [224], [225].

ЭСП к процессу Дрелла – Яна также изучены довольно хорошо, начиналась эта деятельность в работах по расчёту ЭМП [226], [227], [228]. Важна работа [229], в которой приведены многочисленные ссылки на предыдущие публикации и где рассчитаны ЭСП в области инвариантной массы лептонов $M \leq 2$ ТэВ. Имеются результаты программы ZGRAD [230], [229], [231], [232], программы дубненской группы SANC [233], авторского кода READY [234], [235], [236], [237] и расчёт радиационных поправок к процессу Дрелла – Яна в канале двухфотонного рождения [238].

Математическая структура ЭСП к процессу Дрелла – Яна хорошо известна. В слабой составляющей основную роль играют SL [136], а именно двойные SL, то есть их квадраты, которые быстро растут с увеличением энергии и дают один из главных эффектов при больших инвариантных массах дилептона. В этой области (HE-режиме) исследования продвинулись довольно далеко: слабое судаковское разложение для произвольного четырёхфермионного процесса подробно изучено в работах [239], [240] и [241], там же приведен обширный список ссылок, хорошо отражающий историю проблемы. Коллинеарные логарифмы также дают большой вклад в HE-режиме и конкурируют с двойными SL. Существуют и другие важные электрослабые вклады в (4.66): поправки высших порядков, например, двухпетлевые электрослабые логарифмы, которые обсуждаются в [241], [242], вклад излучения

слабых бозонов, рассчитанный в [231], наконец, вклад высших поправок, обусловленных множественной фотонной эмиссией, который исследовался в [243].

КХД-поправки в процессе Дрелла – Яна изучались в работах [244], [245], [246], [247], [248] (см. также список работ, цитируемых там), а для сходного процесса с заряженным током, например, в [249] и [250], где рассчитаны КХД-поправки низшего порядка для процесса Дрелла – Яна в обоих каналах: заряженном и нейтральном, работа [251] и авторские работы [252], [253], [254]. В работе [244] были впервые решены многие качественные проблемы, в частности, выяснено, что вклад части сечения $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ (NNLO, согласно терминологии КХД)¹⁰ мал по сравнению с $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ -вкладами (NLO в КХД). Показано, что процессы $q\bar{q}$ -типа (идущие в несинглетном канале) дают положительный вклад в K -фактор (поправку к полному сечению), а qg -типа (синглетного канала) – отрицательный; для поправок, соответствующих сечению в NLO, первый тип доминирует, а для NNLO они в основном друг друга компенсируют.

¹⁰Термины “LO” (Leading Order, ведущий [главный] порядок), “NLO” (Next-to-Leading Order, следующий за ведущим порядок), “NNLO (или N²LO)” (Next-to-Next-to-Leading Order) и т. д. пришли из КХД, но сейчас активно используются и для обозначения порядка в пертурбативном расчёте петлевых электрослабых поправок.

2 БАБА-РАССЕЯНИЕ

Процесс рассеяния электронов на позитронах с таким же конечным состоянием занимает уникальное положение среди четырёхфермионных процессов: тождественность масс создаёт особые возможности по постановке эксперимента, хотя и существенно усложняет расчёт наблюдаемых величин, особенно в высших порядках теории возмущений. Впервые сечение рассеяния этого процесса в рамках КЭД на борновском уровне вычислил Х. Баба в 1935 г. в своей работе [255] (в его честь дано название процесса – “Баба-рассеяние”). В числе первых работ по расчёту ЭМП к процессу Баба были работы Берендса с соавторами, например, [139]. Затем на основе техники, описанной в [66], [65], [162], анализ ЭСП в рассеянии Баба был осуществлен в [140], [141], [142], [143]. Для нужд коллайдеров LEP и SLC потребовалось систематическое включение ЭСП в соответствии с экспериментальными возможностями детекторов, обзор соответствующего программного обеспечения в обсуждаемом канале описан, например, в [256].



Рис. 2.1: Хоми Джехангир Баба́ (Homi Jehangir Vhabha; 1909–1966) – выдающийся индийский физик, автор научных трудов в области физики космических лучей, ядерной физики, теории мезонов (первый показал, что движущийся мезон имеет большее время жизни, чем покоящийся; в 1937 г. совместно с Гайтлером разработал каскадную теорию электронных ливней в космических лучах)

2.1 Описание процесса

Процесс рассеяния Баба в рамках СМ записывается следующей формулой:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4). \quad (2.1)$$

В ней обозначены частицы, участвующие в реакции: в начальном (конечном) состоянии электрон e^- и позитрон e^+ . В скобках стоят 4-импульсы начальных и конечных частиц. Фейнмановские диаграммы, соответствующие процессу (2.1) в борновском приближении, изображены на рис. 2.2.

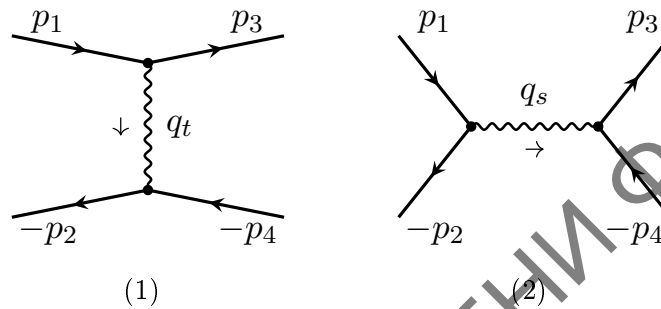


Рис. 2.2: Фейнмановские диаграммы процесса $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ с безрадиационной кинематикой. Внутренней волнистой линией на всех диаграммах обозначены фотон или Z -бозон

Приведём стандартный набор лоренц-инвариантных *переменных Мандельштама*:

$$s = q_s^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t = q_t^2 = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_2 - p_3)^2, \quad (2.2)$$

которые сформированы из 4-импульсов начальных (p_1 и p_2) и конечных (p_3 и p_4) частиц.

Далее, если особо не оговаривается, приводятся только результаты, соответствующие *ультрарелятивистскому приближению* (УРП):

$$s, |t|, |u| \gg m^2, \quad (2.3)$$

где m – масса электрона. УРП, в общем случае, можно описать так: лоренц-инварианты много больше (по абсолютной величине) всех фермионных масс в квадрате. В некоторых ситуациях УРП неприменимо, например, при очень больших или малых углах, а в радиационном случае при малых энергиях тормозного фотона.

Чтобы записать амплитуду процесса, изображенного на рис. 2.2, используем правила Фейнмана, изложенные в разд. 6.1. В записи векторных и аксиальных констант в процессе Баба везде, кроме петлевых вставок в поляризации вакуума, индекс $f = e$, и его будем опускать.

2.1.1 Сечение в борновском приближении

Применяем формулы раздела 6.1, тогда амплитуды процесса Баба в приближении Борна (часто используется и термин “на древесном уровне”), соответствующие рис. 2.2, выглядят так:

$$\mathcal{M}_t^a = ie^2 D_a(q_t) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{M}_s^a = -ie^2 D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4). \quad (2.5)$$

Знак “минус” в s -канальной амплитуде учитывает то, что электроны удовлетворяют статистике Ферми (название процедуры – *антисимметризация*).

В вершинах фигурирует Q_e – заряд электрона в элементарных зарядах e , для ясности: $Q_e = -1$. Если этот заряд входит в чётной степени, можно его не приводить. Тем не менее, если заряд в (2.4), (2.5) все-таки удерживать (например, при $a = \gamma$), предоставляется возможность использовать полученный результат для расчёта более общей реакции (например, с фермионом другого аромата в конечном и (или) начальном состоянии). Бозонный пропагатор D_a определяется формулой (6.3). Полную амплитуду процесса с обменом бозоном a получаем, суммируя

$$\mathcal{M}_0^a = \mathcal{M}_t^a + \mathcal{M}_s^a. \quad (2.6)$$

Сформируем сечение процесса, для этого нужно применить формулу (6.12): квадрировать амплитуду \mathcal{M}_0 и провести преобразование фазового объёма (6.13) (как это сделать, подробно объяснено в разделе 2.3.3). В результате получаем дифференциальное (по углу рассеяния) сечение процесса (2.1) в борновском приближении:

$$\frac{d\sigma^0}{dc} = \frac{1}{2^5 \pi s} \sum_{a,b=\gamma,Z} \mathcal{M}_0^a \mathcal{M}_0^{b+}, \quad (2.7)$$

где $c = \cos \theta$ – косинус угла между начальным электроном и конечным (детектируемым) электроном в с.ц.м. начальных частиц.

Поясним подробнее, как квадратируются амплитуды. Квадрат амплитуды – это произведение амплитуды на эрмитово-сопряжённую (эту же) амплитуду

$$\mathcal{M}_0^a \mathcal{M}_0^{b+} = (\mathcal{M}_t^a + \mathcal{M}_s^a)(\mathcal{M}_t^b + \mathcal{M}_s^b)^+.$$

Раскрывая скобки, получим четыре слагаемых. Рассмотрим первое из них. Эрмитово-сопряжённая амплитуда даётся выражением (чтобы не путаться,

нужно поменять немой индекс; μ поменяем на, например, ν):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^{b+} &= -ie^2 D_b^*(q_t) \cdot (\bar{u}(p_3) \gamma_\nu \Gamma^b u(p_1) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\nu \Gamma^b u(-p_4))^+ = \\ &= -ie^2 D_b^*(q_t) \cdot \bar{u}(p_1) \Gamma^{b+} \gamma_\nu u(p_3) \cdot \bar{u}(-p_4) \Gamma^{b+} \gamma_\nu u(-p_2).\end{aligned}$$

При нахождении эрмитового сопряжения амплитуды используются следующие свойства γ -матриц и биспинорных амплитуд:

$$\gamma^0 \gamma^0 = 1, \quad \gamma^0 \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^0, \quad u^+ \gamma^0 = \bar{u}.$$

Применяем *трюк Казимира* (Casimir's trick), перепишем квадрат амплитуды через произведение *следов* матриц (след матрицы – это сумма её диагональных элементов, часто его называют “трейс” [от англ. trace] или “шпур” [от нем. Spur]):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^a \mathcal{M}_t^{b+} &= e^4 D_a(q_t) D_b^*(q_t) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \bar{u}(p_1) \Gamma^{b+} \gamma_\nu u(p_3) \times \\ &\times \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4) \bar{u}(-p_4) \Gamma^{b+} \gamma_\nu u(-p_2) = \quad (2.8) \\ &= e^4 D_a(q_t) D_b^*(q_t) \cdot \text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \bar{u}(p_1) \Gamma^{b+} \gamma_\nu u(p_3) \bar{u}(p_3)] \times \\ &\times \text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4) \bar{u}(-p_4) \Gamma^{b+} \gamma_\nu u(-p_2) \bar{u}(-p_2)].\end{aligned}$$

Техника расчёта следов γ -матриц хорошо развита и детально изложена, например, в учебнике Биленького [19]. На сегодняшний день существует множество систем компьютерной алгебры для подобных расчётов. Первой, вероятно, была знаменитая Schoonschip [257], которая существенно помогла Велтману и 'т Хоофту установить перенормируемость электрослабой теории [86]. Упомянем и сыгравшую большую роль систему REDUCE [119], которую разработал Херн. Современной простейшей и безотказно работающей является, например, система FORM [258] Вермазерена с соавторами, пример её применения дан в разд. 6.3.

Используются следующие правила:

- по поляризациям начальных частиц не суммируем, а берём заданные поляризации, так формируется *матрица плотности*. На этом этапе надо определиться, какие поляризации¹ нас интересуют (то есть как поляризованы частицы в экспериментальной постановке: обе неполяризованы, обе продольно, обе поперечно, и т. д.). Далее будем рассматривать

¹Что касается терминов “поляризованный” и “поляризационный”. Автор предпочитает применять их так: поляризованный электрон (англ. “polarized electron”), но поляризационный процесс (англ. “polarized process”; редко, но используется и “polarization process”).

простейший случай продольной поляризации начальных частиц, тогда для электрона и позитрона матрицы плотности определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\rho(p_1) &= u(p_1)\bar{u}(p_1) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5\hat{\xi}_1)(\hat{p}_1 + m), \\ \rho(-p_2) &= u(-p_2)\bar{u}(-p_2) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5\hat{\xi}_2)(\hat{p}_2 - m);\end{aligned}\quad (2.9)$$

- полагая, что в эксперименте не регистрируются поляризации конечных частиц, по ним (поляризациям конечных частиц) суммируем, так формируется *проекционный оператор*.

Вводятся *векторы поляризации* частиц, для ультрарелятивистских продольно поляризованных частиц они пропорциональны своим 4-векторам:

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{m}p_1, \quad \xi_2 = \frac{\lambda_2}{m}p_2. \quad (2.10)$$

Заметим, что в случае неполяризованных начальных частиц усреднение в матрице плотности получается естественным образом, если занулить их степени поляризации: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

В итоге произведения биспинорных амплитуд (матрицы плотности для начальных частиц и проекционные операторы для конечных) удобно переписать единообразно через следующие выражения (приведём также их вид в УРП):

$$\begin{aligned}U_1 &= \rho(p_1) \approx \frac{1}{2}(1 + \lambda_1\gamma_5)\hat{p}_1, \quad U_2 = \rho(-p_2) \approx \frac{1}{2}(1 - \lambda_2\gamma_5)\hat{p}_2, \\ U_3 &= \sum u(p_3)\bar{u}(p_3) = \hat{p}_3 + m, \quad U_4 = \sum u(-p_4)\bar{u}(-p_4) = \hat{p}_4 - m.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Квадрируя все слагаемые, получим следующее выражение:

$$\mathcal{M}_r^a \mathcal{M}_{r'}^{b+} = e^4 D_a(q_r) D_b^*(q_{r'}) S_{rr'}^{aab}, \quad (2.12)$$

где используется общее обозначение $r(r') = s, t$ для канала реакции, а выражения $S_{rr'}^{abc}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}S_{tt}^{abc} &= \text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3] \text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2], \\ S_{ts}^{abc} &= -\text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2 \gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3], \\ S_{st}^{abc} &= -\text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2], \\ S_{ss}^{abc} &= \text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2] \text{Sp}[\gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3].\end{aligned}\quad (2.13)$$

Можно заметить, что в формулах (2.13) встречаются две определенные комбинации, которые могут быть “закодированы” в УРП следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1^{ab} = \Gamma^a U_1 \Gamma^{b+} &= \frac{1}{2} \left(g_V^{ab} - \lambda_1 g_A^{ab} - (g_A^{ab} - \lambda_1 g_V^{ab}) \gamma_5 \right) \hat{p}_1 = \\ &= \left(g_V^{ab} \frac{1 + \lambda_1 \gamma_5}{2} - g_A^{ab} \frac{\lambda_1 + \gamma_5}{2} \right) \hat{p}_1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$U_4^{ab} = \Gamma^a U_4 \Gamma^{b+} = \left(g_V^{ab} - g_A^{ab} \gamma_5 \right) \hat{p}_4, \quad (2.15)$$

где

$$g_V^{ab} = v^a v^b + a^a a^b, \quad g_A^{ab} = v^a a^b + a^a v^b. \quad (2.16)$$

Важно научиться записывать сечение реакции в симметричном (по возможности компактном) виде, это существенно облегчает программирование и анализ физического содержания. Общая форма записи сечения будет такая:

$$\frac{d\sigma^0}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi_k^{ab} S_k^{aab}, \quad (2.17)$$

где $k = \{rr'\} = \{tt, ts, st, ss\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Пропагаторы бозонов встречаются в комбинациях

$$\Pi_{rr'}^{ab} = D_a(q_r) D_b^*(q_{r'}),$$

а S_k после вычисления следов выражаются через комбинации констант связи $g_{V,A}$:

$$f_{\pm}^{abc} = g_V^{ac} g_V^{bc} \pm g_A^{ac} g_A^{bc}, \quad g_{\pm}^{abc} = g_V^{ac} g_A^{bc} \pm g_A^{ac} g_V^{bc}, \quad (2.18)$$

и четыре комбинации степеней поляризации:

$$P_1^{\pm} = \lambda_1 \pm \lambda_2, \quad P_2^{\pm} = 1 \pm \lambda_1 \lambda_2 \quad (2.19)$$

следующим образом (назовём это основной формой записи):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_{tt}^{abc} &= P_2^- f_+^{abc} u^2 + P_2^+ f_-^{abc} s^2 - P_1^- g_+^{abc} u^2 + P_1^+ g_-^{abc} s^2, \\ \frac{1}{2} S_{ts}^{abc} &= \frac{1}{2} S_{st}^{abc} = P_2^- f_+^{abc} u^2 - P_1^- g_+^{abc} u^2, \\ \frac{1}{2} S_{ss}^{abc} &= P_2^- (f_+^{abc} u^2 + f_-^{abc} t^2) - P_1^- (g_+^{abc} u^2 - g_-^{abc} t^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Заметим, что в формулах (2.13) встречаются также и другие комбинации, которые могут быть использованы для сокращенных обозначений сечений в УРП:

$$U_1^a \equiv \Gamma^a U_1 = \frac{1}{2}(v^{a_1} - a^{a_1} \gamma_5) \hat{p}_1, \quad U_2^c \equiv \Gamma^c U_2 = \frac{1}{2}(v^{c_2} - a^{c_2} \gamma_5) \hat{p}_2, \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} v^{a_1} &= v^a - a^a \lambda_1, & a^{a_1} &= a^a - v^a \lambda_1, \\ v^{c_2} &= v^c + a^c \lambda_2, & a^{c_2} &= a^c + v^c \lambda_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Комбинируются и переобозначаются также и остальные биспинорные амплитуды:

$$U_3^c \equiv \Gamma^c U_3, \quad U_4^b \equiv \Gamma^b U_4. \quad (2.23)$$

Тогда вклады, формирующие сечения, примут вид:

$$\begin{aligned} S_{tt}^{abc} &= \text{Sp}(\gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_3^c) \text{Sp}(\gamma_\mu U_4^b \gamma_\nu U_2^c) = S^{abc} + U^{abc}, \\ S_{ts}^{abc} &= -\text{Sp}(\gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \gamma_\mu U_4^b \gamma_\nu U_3^c) = U^{abc}, \\ S_{st}^{abc} &= -\text{Sp}(\gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_3^c \gamma_\mu U_4^b \gamma_\nu U_2^c) = U^{abc}, \\ S_{ss}^{abc} &= \text{Sp}(\gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c) \text{Sp}(\gamma_\mu U_4^b \gamma_\nu U_3^c) = T^{abc} + U^{abc}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

После расчёта следов γ -матриц получим альтернативную форму записи:

$$\begin{aligned} S^{abc} &= 2s^2 (v_-^{a_1 c_2} v_-^{bc} - a_-^{a_1 c_2} a_-^{bc}), \\ T^{abc} &= 2t^2 (v_+^{a_1 c_2} v_+^{bc} - a_+^{a_1 c_2} a_+^{bc}), \\ U^{abc} &= 2u^2 (v_+^{a_1 c_2} v_+^{bc} + a_+^{a_1 c_2} a_+^{bc}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где вводятся следующие комбинации констант связи, полезные для упрощения записи:

$$v_\pm^{ij} = v^i v^j \pm a^i a^j, \quad a_\pm^{ij} = v^i a^j \pm a^i v^j, \quad (2.26)$$

где $i, j = \gamma, Z, \gamma_1, \gamma_2, Z_1, Z_2$.

2.1.2 Наблюдаемые величины

Прежде чем приступить к расчёту следующего порядка теории возмущений (однопетлевых поправок), введём интересующие нас *наблюдаемые величины*, построенные на основе уже введенного дифференциального сечения.

Прежде всего это *полное сечение* (total cross section), которое определяется так:

$$\sigma^C(c_1, c_2) = \int_{c_1}^{c_2} \frac{d\sigma^C}{dc} dc. \quad (2.27)$$

Индекс C (от “contribution”) означает рассматриваемый вклад в сечение и принимает значения:

$$C = 0, V, \text{soft}, \text{VS}, \text{hard}, \text{NLO}.$$

“0” означает борновский вклад, часто его обозначают как “LO” (Leading Order), “NLO” означает однопетлевые вклады (Next-to-Leading Order). Все остальные вклады будут объяснены ниже. Пределы интегрирования в (2.27) (часто их называют жаргонным словом “кат” от англ. “to cut” – обрезать) определяются условиями детектирования конечного электрона. Радиационные вклады имеют нетривиальное поведение при $c_{1,2} \rightarrow \pm 1$, это напрямую связано с *коллинеарной сингулярностью*.

Введем три наблюдаемые асимметрии, построенные на основе дифференциального сечения $d\sigma^C/dc$. Первая наблюдаемая величина – *поляризационная асимметрия* (или single spin asymmetry, то есть асимметрия с одиночной поляризацией):

$$A_{\text{LR}}^C = A_{\text{LR}}^C(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} - \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc}}{\frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} + \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc}}, \quad (2.28)$$

скомбинированная из сечений:

$$d\sigma_{L0}^C = \frac{1}{2}(d\sigma_{LL}^C + d\sigma_{LR}^C), \quad d\sigma_{R0}^C = \frac{1}{2}(d\sigma_{RL}^C + d\sigma_{RR}^C), \quad (2.29)$$

которые соответствуют рассеянию левополяризованного (правополяризованного) электрона на неполяризованном позитроне (множитель $\frac{1}{2}$ происходит от усреднения, в данном случае по степеням поляризации позитрона).

Использование нижних индексов L и R в сечениях традиционно такое: L и R означают степени поляризации $\lambda_{1,2} = -1$ и $\lambda_{1,2} = +1$, соответственно. Другими словами (именно так программируются сечения):

$$\sigma_{\text{LL,RR}} = \sigma|_{\lambda_1=\mp 1, \lambda_2=\mp 1}, \quad \sigma_{\text{LR,RL}} = \sigma|_{\lambda_1=\mp 1, \lambda_2=\pm 1},$$

аналогично вычисляются сечения рассеяния с неполяризованными частицами:

$$\sigma_{00} = \sigma|_{\lambda_1=0, \lambda_2=0}, \quad \sigma_{L0} = \sigma|_{\lambda_1=-1, \lambda_2=0}, \quad \sigma_{R0} = \sigma|_{\lambda_1=+1, \lambda_2=0}.$$

Наконец, выпишем соотношения для сечения рассеяния неполяризованных частиц с явно выписанным фактором усреднения:

$$\sigma_{00} = \frac{1}{4}(\sigma_{LL} + \sigma_{LR} + \sigma_{RL} + \sigma_{RR}) = \frac{1}{2}(\sigma_{L0} + \sigma_{R0}).$$

На борновском уровне имеется возможность получить компактные выражения для асимметрии в LE-режиме:

$$A_{LR}^0|_{LE} = \frac{8v^Z a^Z stu^3}{m_Z^2(s^4 + t^4 + u^4)}. \quad (2.30)$$

Можно её существенно упростить:

$$A_{LR}^0|_{LE} = \frac{4v^Z a^Z}{m_Z^2} \frac{stu^3}{(t^2 + tu + u^2)^2} = \frac{4v^Z a^Z s}{m_Z^2} \left[\frac{\sin \theta (1 + \cos \theta)}{3 + \cos^2 \theta} \right]^2, \quad (2.31)$$

тогда нетрудно установить, что асимметрия имеет максимум, точка максимума такая: $\cos \theta = 4 - \sqrt{13}$, $\theta = 66.77^\circ$ (см. ниже). В HE-режиме эта асимметрия имеет вид:

$$A_{LR}^0|_{HE} = \frac{u^4 \sum g_+^{aab}}{u^4 F_+ + (s^4 + t^4) F_-}, \quad F_{\pm} = \sum f_{\pm}^{aab}, \quad (2.32)$$

где суммирование идет по a и b : $a, b = \gamma, Z$. Зависимости поляризационной асимметрии A_{LR} от θ при разных \sqrt{s} приведены на рис. 2.3.

Вторая важная наблюдаемая величина – *поляризационная интегральная асимметрия*:

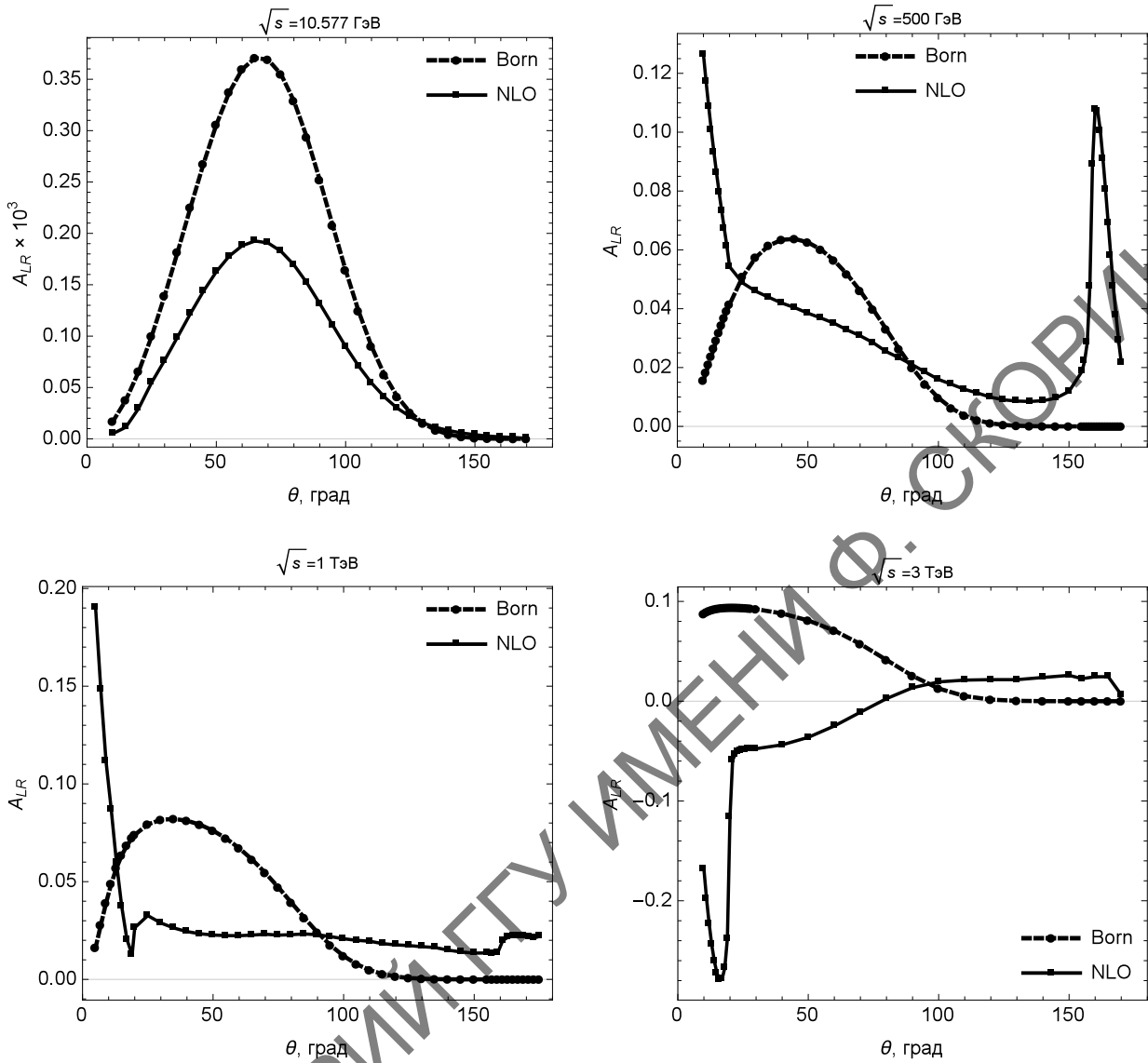
$$A_{LR\Sigma}^C = A_{LR\Sigma}^C(a) = \frac{\Sigma_L^C - \Sigma_R^C}{\Sigma_L^C + \Sigma_R^C}, \quad (2.33)$$

сформированная из аналогичных (2.29) сечений

$$\Sigma_L^C = \int_{-\cos a}^{\cos a} \frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} \cdot dc, \quad \Sigma_R^C = \int_{-\cos a}^{\cos a} \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc} \cdot dc.$$

Эти сечения отличаются от выражений (2.27) тем, что имеют симметричные пределы интегрирования. На борновском уровне получаем выражения для поляризационной интегральной асимметрии в LE-режиме:

$$A_{LR\Sigma}^0|_{LE} = \frac{4v^Z a^Z s s_a^2}{m_Z^2} \frac{c_a(21 + c_a^2) + 12l_a}{c_a(c_a^4 + 26c_a^2 - 75) - 24s_a^2 l_a}. \quad (2.34)$$

Рис. 2.3: Зависимость поляризационных асимметрий A_{LR} от θ

В HE-режиме эта асимметрия имеет вид:

$$A_{LR\Sigma|HE}^0 = \frac{[c_a(c_a^4 + 50c_a^2 - 99) - 48s_a^2 l_a] \sum g_+^{aab}}{[c_a(c_a^4 + 50c_a^2 - 99) - 48s_a^2 l_a] F_+ + [c_a^4 - 2c_a^2 - 51] c_a F_-}, \quad (2.35)$$

где

$$c_a = \cos a, \quad s_a = \sin a, \quad l_a = \ln \frac{1 - c_a}{1 + c_a}.$$

На рис. 2.4 приведены зависимости от \sqrt{s} полного сечения и поляризационной интегральной асимметрии в борновском приближении. В LE- и HE-режимах – это гладкие кривые, в области резонанса – имеют нетривиальное поведение.

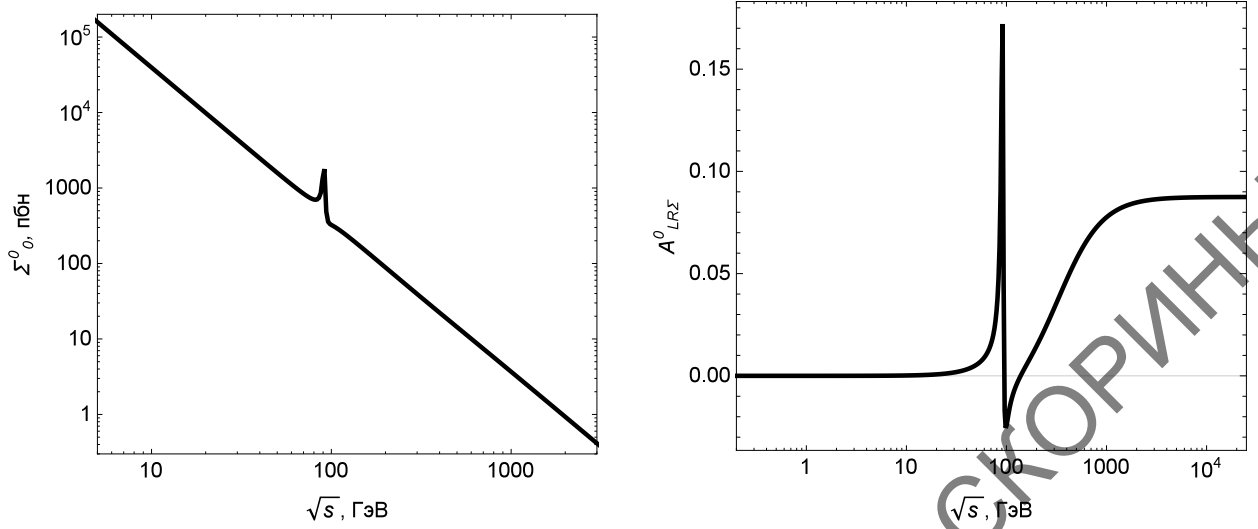


Рис. 2.4: Зависимость от \sqrt{s} полного сечения (слева) и поляризационной интегральной асимметрии (справа) в борновском приближении (полагаем $c_2 = -c_1 = 0.9$)

Третья наблюдаемая величина – *асимметрия вперёд-назад*:

$$A_{\text{FB}}^C = A_{\text{FB}}^C(a) = \frac{\Sigma_F^C - \Sigma_B^C}{\Sigma_F^C + \Sigma_B^C}, \quad (2.36)$$

сформированная из сечений рассеяния в переднюю и заднюю полусферы с отступом на угол a от оси пучка:

$$\Sigma_F^C = \int_0^{\cos a} \frac{d\sigma_{00}^C}{dc} \cdot dc, \quad \Sigma_B^C = \int_{-\cos a}^0 \frac{d\sigma_{00}^C}{dc} \cdot dc.$$

На борновском уровне получаем выражения для асимметрии в LE-режиме:

$$A_{\text{FB}}^0|_{\text{LE}} = 3 \frac{c_a^2(c_a^2 - 17) - 8s_a^2 \ln s_a^2}{c_a(c_a^4 + 26c_a^2 - 75) - 24s_a^2 l_a} \quad (2.37)$$

и в HE-режиме:

$$A_{\text{FB}}^0|_{\text{HE}} = \frac{1}{3c_a} \frac{-c_a^2[(15 + c_a^2)F_- + (19 - 3c_a^2)F_+] - 16s_a^2 \ln s_a^2 F_+}{[(c_a^4 + 2c_a^2 - 51)F_- + (c_a^4 + 50c_a^2 - 99)F_+] - 48s_a^2 l_a F_+}. \quad (2.38)$$

С помощью полученных формул для борновских асимметрий легко понять их характерные особенности (экстремумы, масштаб), они отображены на рис. 2.3–2.6.

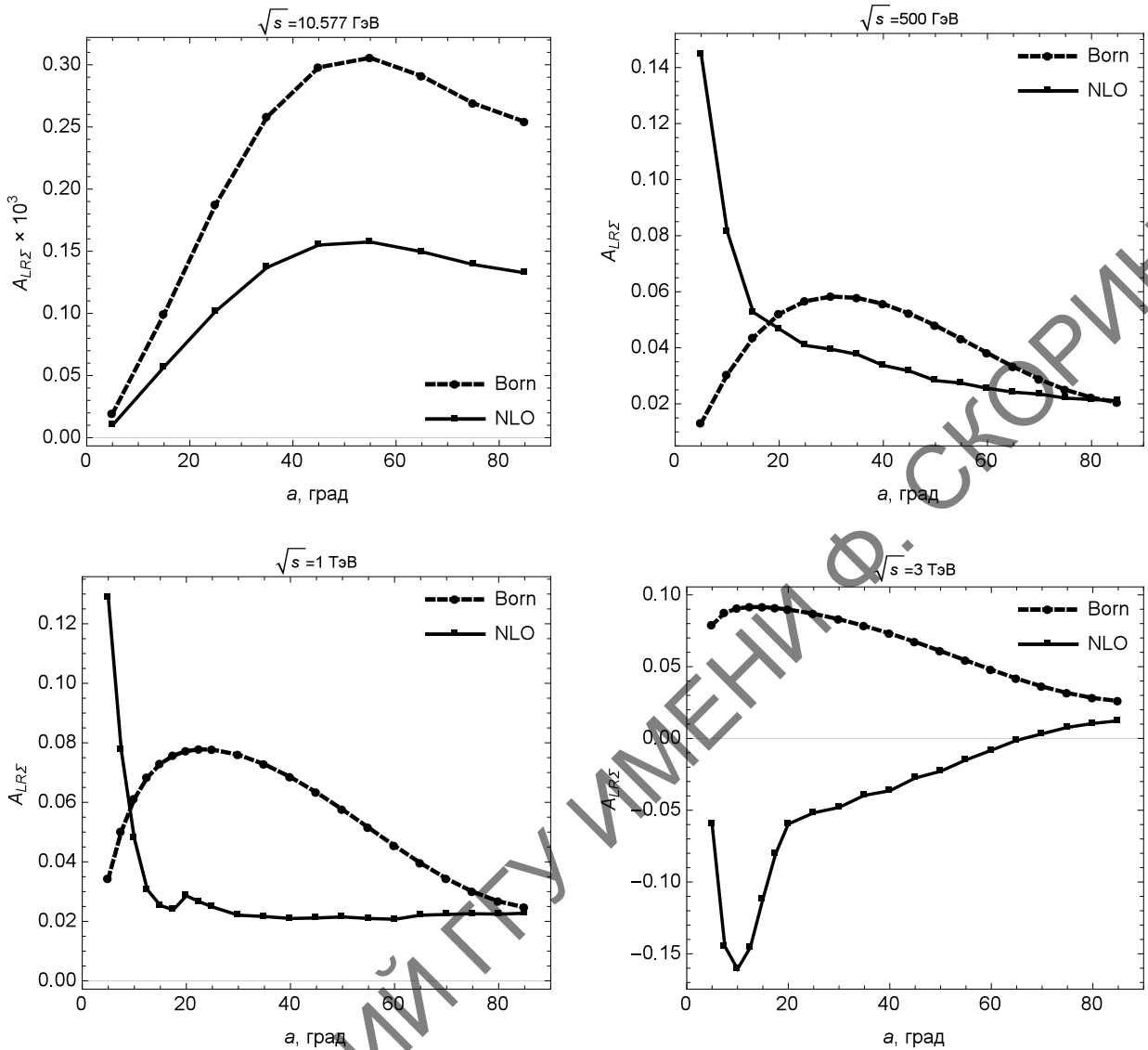


Рис. 2.5: Зависимость интегральных поляризационных асимметрий $A_{LR\Sigma}$ от угла a

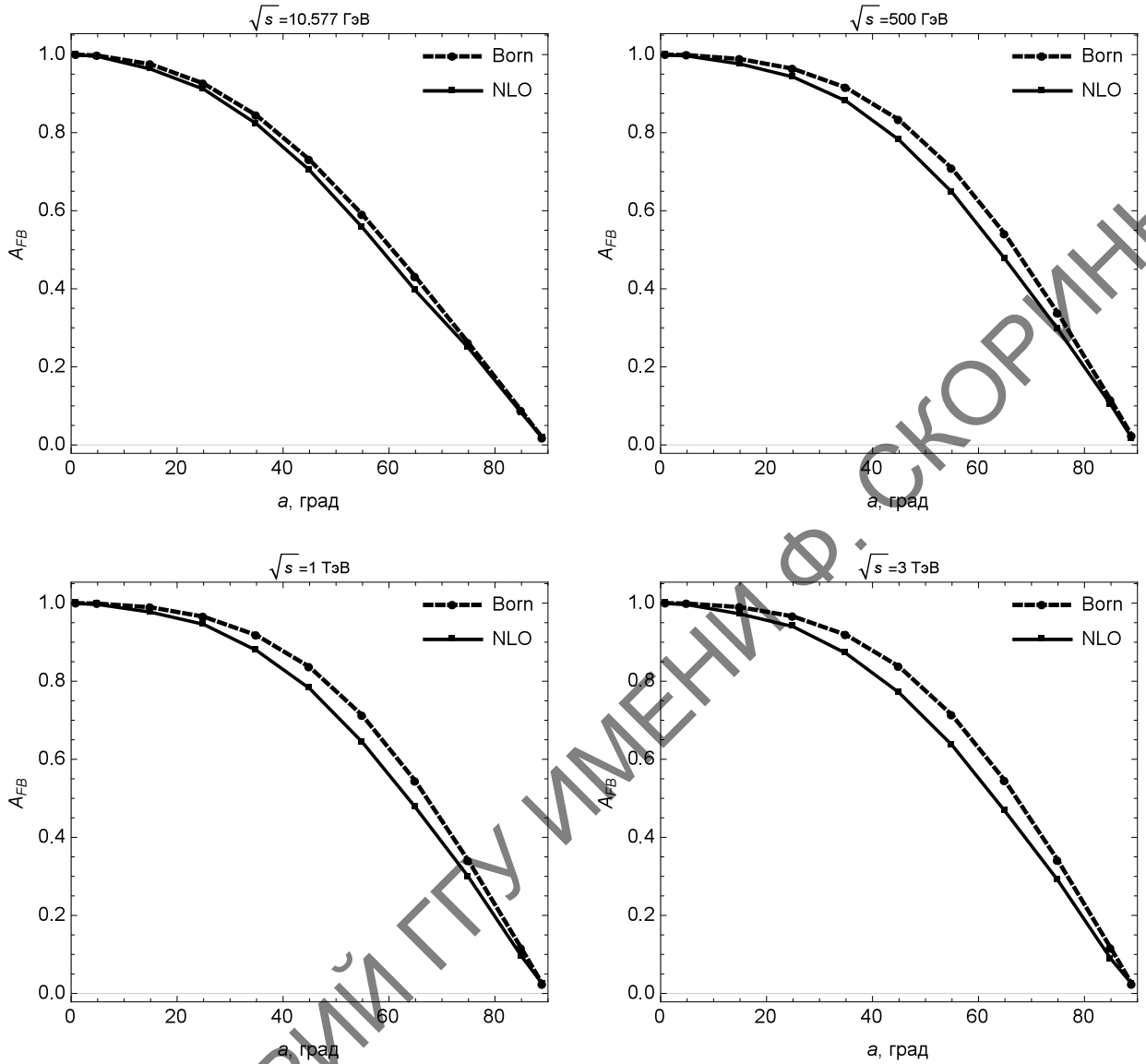
2.1.3 Относительные поправки

Введем две *относительные поправки* от рассматриваемого вклада C к комбинациям дифференциального сечения:

$$\delta_{\pm}^C = \frac{d\sigma_{L0}^C \pm d\sigma_{R0}^C}{d\sigma_{L0}^0 \pm d\sigma_{R0}^0} \quad (2.39)$$

(соответствующие поправки для полного сечения обозначаем большой буквой: Δ_{\pm}^C). Эти поправки обладают замечательным качеством *аддитивности*:

$$\delta_{\pm}^{C_1+C_2} = \delta_{\pm}^{C_1} + \delta_{\pm}^{C_2}, \quad (2.40)$$

Рис. 2.6. Зависимость асимметрий вперед-назад A_{FB} от угла a

и, следовательно, крайне удобны для анализа влияния радиационных поправок на наблюдаемые величины: δ_+^C дает неполяризованное сечение

$$\sigma_{00}^C = \delta_+^C \cdot \sigma_{00}^0, \quad (2.41)$$

а вместе они формируют поправку к поляризационной асимметрии:

$$\delta_A^C = \frac{A_{LR}^C - A_{LR}^0}{A_{LR}^0} = \frac{\delta_-^C - \delta_+^C}{1 + \delta_+^C}. \quad (2.42)$$

Пользуясь (2.42), получаем поправленную асимметрию (с учтённой однопетлевой поправкой):

$$A_{\text{LR}}^{\text{NLO}} = (1 + \delta_A^{\text{NLO}}) A_{\text{LR}}^0 = \frac{1 + \delta_-^{\text{NLO}}}{1 + \delta_+^{\text{NLO}}} A_{\text{LR}}^0. \quad (2.43)$$

2.2 Вклад дополнительных виртуальных частиц

Перейдем к расчёту радиационных вкладов. Начнем с вклада дополнительных виртуальных частиц (V -вклад), который представлен тремя классами диаграмм: бозонные собственные энергии (boson self energies, BSE), вершинные функции (vertices, Ver) и двухбозонный обмен (боксы, Box); они обозначаются индексами: $C = V = \text{BSE}, \text{Ver}, \text{Box}$. В схеме перенормировки на массовой поверхности нет однопетлевых вкладов от электронных собственных энергий.

2.2.1 Бозонные собственные энергии

Диаграммы, соответствующие вкладам бозонных собственных энергий, представлены на рис. 2.7. Кругом на них обозначены все варианты, возможные в рамках СМ. Обозначения 4-импульсов те же, что на борновских диаграммах (см. рис. 2.2).

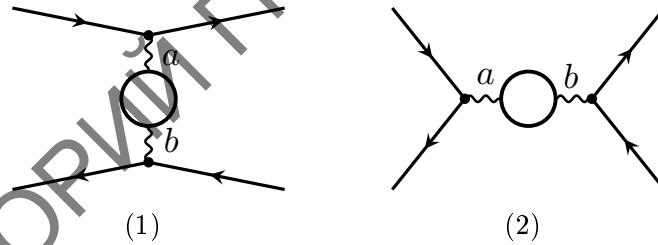


Рис. 2.7. Фейнмановские диаграммы вкладов BSE в процесс $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$

Сечение вклада бозонных собственных энергий получаем в виде:

$$\frac{d\sigma^{\text{BSE}}}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b,c=\gamma,Z} \Pi_k^{abc} S_k^{abc}, \quad (2.44)$$

где

$$\Pi_{rr'}^{abc} = -D_a(q_r) \hat{\Sigma}_T^{ab}(r) D_b(q_r) D_c^*(q_{r'}),$$

а $\hat{\Sigma}_T^{ab}(r)$ – перенормированная поперечная часть вклада диаграмм собственных энергий фотона, Z -бозона и γZ -смешивания, она соответствует части

диаграмм рис. 2.7, обозначенной кружком (в нее не входят пропагаторные структуры и множитель $i^2 = -1$) и часто называется “обрезанной” собственной энергией (truncated self energy). По правилам Фейнмана она формально соответствует интегралу по двум замкнутым линиям в фермионной (или W -бозонной) петле. Подробно расчёт и перенормировка диаграммы собственной энергии фотонов рассмотрены в разд. 6.3. Так, для случая чисто фотонной поперечной части BSE имеем известное выражение вида

$$\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(k^2) \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right), \quad (2.45)$$

где k – 4-импульс входящего в фермионную петлю фотона. С одним электроном в петле получим (численное значение соответствует энергии Belle II):

$$\text{Re} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma, e}(s)}{s} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_e^2} - \frac{5}{9} \right) = -0.0141$$

(сравнивая это выражение с приведённым в разд. 6.3, видим разницу в знаке, обусловленную обсуждаемым выше правилом “труккирования” – деления на i^2).

Расчёт всех $\hat{\Sigma}_T^{ab}(r)$ проведем по схеме перенормировки на массовой поверхности. Наиболее популярным в рамках данной схемы является применение ренормализационных условий Холлика (РУХ) [66], [65] либо ренормализационных условий Деннера (РУД) [67]. Будем использовать схему с применением РУХ, приведенную в [66]. При использовании формул для перенормированных выражений [66] следует быть осторожными, так как в опубликованном варианте имеются опечатки. Для контроля приведем здесь численные значения для действительных и мнимых частей “обрезанных” перенормированных поперечных собственных энергий $\hat{\Sigma}_T^{ab}$ для энергии эксперимента Belle II $\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ:

$$\begin{aligned} \text{Re} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(s)}{s} &= -0.0361, & \text{Re} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(s)}{s} &= -0.0301, & \text{Re} \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(s) D_Z(q_s) &= -0.0317, \\ \text{Im} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(s)}{s} &= 0.0159, & \text{Im} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(s)}{s} &= -0.0056, & \text{Im} \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(s) D_Z(q_s) &= -0.0003. \end{aligned}$$

Значения электрослабых параметров и масс элементарных частиц в этом разделе (и далее в монографии, если особо не уточняется) берём из Particle Data Group (PDG) Report [259]:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= 137.035999, & m_W &= 80.4628 \text{ ГэВ}, \\ m_Z &= 91.1876 \text{ ГэВ}, & m_H &= 125 \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Заметим, что численные результаты для ЭСП довольно слабо зависят от значения массы хиггсовского бозона: установлено, что, например, относительная ошибка от вкладов бозонных собственных энергий при изменении m_H от 115 ГэВ (значения, часто использовавшегося для оценок в предшествующих открытию хиггсовского бозона работах) до современного составляет не более 0.3 %. Для электронной, мюонной и τ -лептонной массы берём значения:

$$m_e = 0.510998910 \text{ МэВ}, \quad m_\mu = 0.105658367 \text{ ГэВ}, \quad m_\tau = 1.77684 \text{ ГэВ}. \quad (2.47)$$

Кварковые массы, которые технически необходимы для расчёта:

$$\begin{aligned} m_u &= 0.06983 \text{ ГэВ}, & m_c &= 1.2 \text{ ГэВ}, & m_t &= 174 \text{ ГэВ}, \\ m_d &= 0.06984 \text{ ГэВ}, & m_s &= 0.15 \text{ ГэВ}, & m_b &= 4.6 \text{ ГэВ}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

будут последовательно использоваться в монографии. Приведённые “эффективные значения” кварковых масс обеспечивают сдвиг постоянной тонкой структуры, обусловленный поляризацией вакуума адронами (с учётом пяти кварковых ароматов): $\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(m_Z^2) = 0.02757 [260]$, где

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(s) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{q=u,d,s,c,b} Q_q^2 \left(\ln \frac{s}{m_q^2} - \frac{5}{3} \right). \quad (2.49)$$

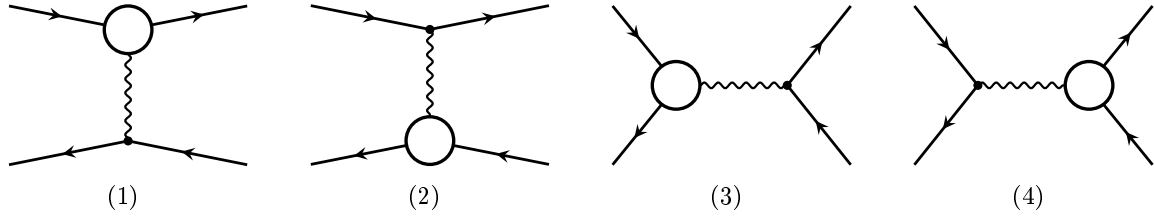
Использование фиксированных кварковых масс как численных параметров является одним из возможных вариантов описания вкладов в ЭСП, обусловленных поляризацией вакуума адронами. Альтернативно можно, например, применить аппарат дисперсионных соотношений [261] и непосредственную экспериментальную информацию о сечении реакции $e^+e^- \rightarrow$ адроны [262].

2.2.2 Вклад вершинных диаграмм

Диаграммы, соответствующие вершинным вкладам (vertex diagrams), представлены на рис. 2.8. Снова кружком на них обозначены все варианты, возможные в рамках СМ, и обозначения 4-импульсов те же, что на борновских диаграммах рис. 2.2.

Сечение вершинных вкладов имеет вид

$$\frac{d\sigma^{\text{Ver}}}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi_k^{ab} (S_k^{F_a ab} + S_k^{aF_a b}), \quad (2.50)$$

Рис. 2.8: Фейнмановские диаграммы вершинных вкладов в процесс $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$

здесь расчёт следует работе [66], где используются перенормированные вершинные формфакторы в качестве эффективных констант связи:

$$v_e^{\gamma(Z)} \rightarrow v_e^{F_{\gamma(Z)}}, \quad a_e^{\gamma(Z)} \rightarrow a_e^{F_{\gamma(Z)}}, \quad (2.51)$$

для фотона:

$$v_e^{F_\gamma} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[v_e^\gamma \Lambda_{1,e}^\gamma + ((v_e^Z)^2 + (a_e^Z)^2) \Lambda_2^Z + \frac{3}{4s_W^2} \Lambda_3^W \right], \quad (2.52)$$

$$a_e^{F_\gamma} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[a_e^\gamma \Lambda_{1,e}^\gamma + 2v_e^Z a_e^Z \Lambda_2^Z + \frac{3}{4s_W^2} \Lambda_3^W \right],$$

для Z -бозона:

$$v_e^{F_Z} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[v_e^Z \Lambda_{1,e}^\gamma + v_e^Z ((v_e^Z)^2 + 3(a_e^Z)^2) \Lambda_2^Z + \frac{1}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W - \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right], \quad (2.53)$$

$$a_e^{F_Z} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[a_e^Z \Lambda_{1,e}^\gamma + a_e^Z (3(v_e^Z)^2 + (a_e^Z)^2) \Lambda_2^Z + \frac{1}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W - \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right].$$

Функция $\Lambda_{1,e}^\gamma$ описывает вклад треугольной диаграммы с фотонным обменом. Точный расчёт и перенормировка этой диаграммы (фотонной вершины конечного состояния в s -канале) приведены в разд. 6.4. Функция Λ_2 описывает вершинный вклад с обменом массивным бозоном – Z или W , а Λ_3 – с трехбозонной вершиной – $WW\gamma$ или WWZ , они рассчитываются аналогично. Вершинные функции комплексны, но нас будет интересовать только действительная часть, поскольку мнимая не дает вклад в наблюдаемые величины в первой петле, хотя и важна при расчёте двухпетлевых (и более высокого порядка) поправок. Выражения для вершинных функций хорошо известны и приводятся в литературе, можно рекомендовать, например, обзор [65]. Заметим, что некоторые асимптотические выражения для вершин автору пришлось пересчитывать, в частности, Λ_2 для LE-режима (см. главу 3).

Действительная часть первой функции содержит коллинеарный логарифм, в УРП в t -канале она имеет вид

$$\operatorname{Re}\Lambda_{1,e}^\gamma = -2 \ln \frac{-t}{\lambda^2} \left(\ln \frac{-t}{m_e^2} - 1 \right) + \ln \frac{-t}{m_e^2} + \ln^2 \frac{-t}{m_e^2} + \frac{1}{3}\pi^2 - 4. \quad (2.54)$$

В s -канале в УРП эта функция выглядит несколько иначе:

$$\operatorname{Re}\Lambda_{1,e}^\gamma = -2 \ln \frac{s}{\lambda^2} \left(\ln \frac{s}{m_e^2} - 1 \right) + \ln \frac{s}{m_e^2} + \ln^2 \frac{s}{m_e^2} + \frac{4}{3}\pi^2 - 4. \quad (2.55)$$

Сравнивая выражение (2.55) с соответствующей формулой, выведенной в разд. 6.4, можно убедиться в полном совпадении. Заметим, что величина $\frac{\alpha}{4\pi}\Lambda_{1,e}^\gamma \gamma^\mu$ обозначена в разд. 6.4 символом $\Lambda^\mu|_R$.

В УРП для других вершинных функций в s -канале получаем следующие выражения: в LE-режиме:

$$\Lambda_2^{Z,W} = \Lambda_2(s, m_{Z,W}) = \left(\frac{2}{3} \ln \frac{m_{Z,W}^2}{s} + \frac{11}{9} \right) \frac{s}{m_{Z,W}^2}, \quad (2.56)$$

$$\Lambda_3^W = \Lambda_3(s, m_W) = -\frac{5}{27} \frac{s}{m_W^2}, \quad (2.57)$$

в HE-режиме:

$$\Lambda_2^{Z,W} = -\ln^2 \frac{m_{Z,W}^2}{s} - 3 \ln \frac{m_{Z,W}^2}{s} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2}, \quad (2.58)$$

$$\Lambda_3^W = -\frac{1}{3} \ln \frac{m_W^2}{s} + \frac{5}{6}. \quad (2.59)$$

Выражения, соответствующие t -каналу, получаем заменой $s \rightarrow -t$. Заметим, что старшие степени судаковских логарифмов (двойные SL) содержатся только в функциях Λ_2 в HE-режиме.

На рис. 2.9 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок δ_\pm от суммарного вклада BSE и Ver (каждый из них по отдельности не имеет физического смысла, поскольку только в сумме их образуется калибровочно-инвариантный набор). Во всех численных оценках этой главы масса фотона будет фиксирована: $\lambda = 10^{-7}$ ГэВ.

2.2.3 Боксы: выражения для амплитуд и сечения

Сечение, соответствующее вкладу боксовских диаграмм в NLO, выглядит так:

$$\frac{d\sigma^{\text{Box}}}{dc} = \frac{1}{2^4 \pi s} \operatorname{Re} \sum_{c=\gamma, Z} \mathcal{M}_{\text{Box}} \mathcal{M}_0^{c+}, \quad (2.60)$$

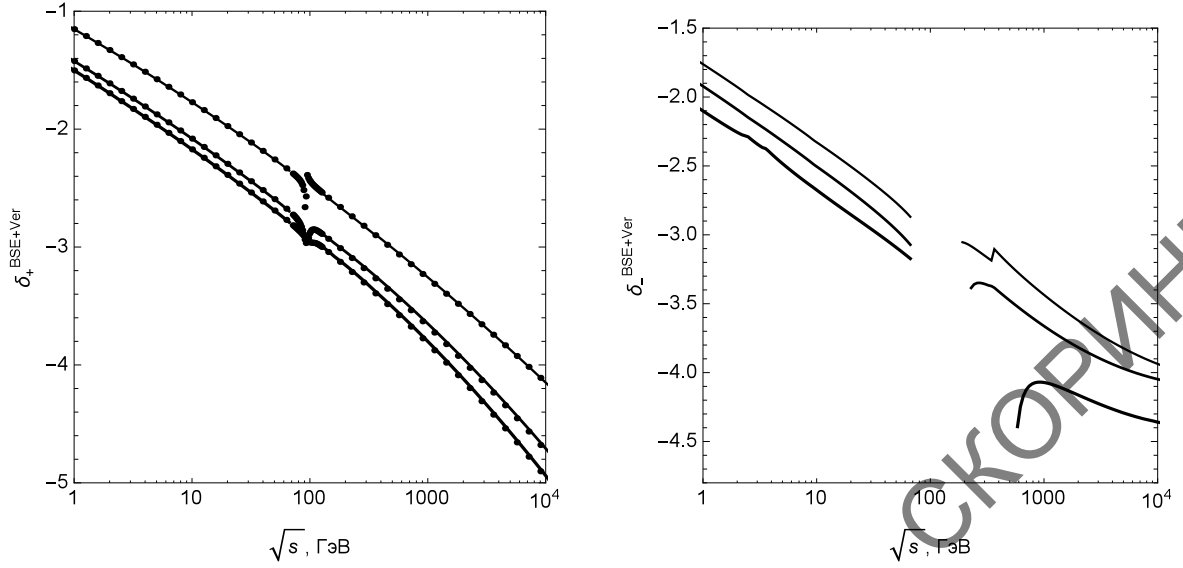


Рис. 2.9: Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок $\delta_+^{\text{BSE+Ver}}$ (слева) и $\delta_-^{\text{BSE+Ver}}$ (справа) к дифференциальному сечению Баба-рассеяния при различных углах рассеяния: $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ для тонкой, средней и толстой линий соответственно. Точки – относительные поправки $\delta_+^{\text{BSE+Ver}}$, полученные с помощью системы FeynArts/FormCalc

где амплитуда боксов имеет вид суммы от всех возможных вариантов (классов диаграмм):

$$\mathcal{M}_{\text{Box}} = \mathcal{M}_t^{\gamma\gamma} + \mathcal{M}_t^{\gamma Z} + \mathcal{M}_t^{Z\gamma} + \mathcal{M}_t^{ZZ} + \mathcal{M}_t^{WW} + (t \rightarrow s). \quad (2.61)$$

Диаграммы прямого и перекрестного бокса изображены на рис. 2.10. Соответствующие им амплитуды обозначаются в общем виде так: $\mathcal{M}_{t(s),D(C)}^{ab}$.

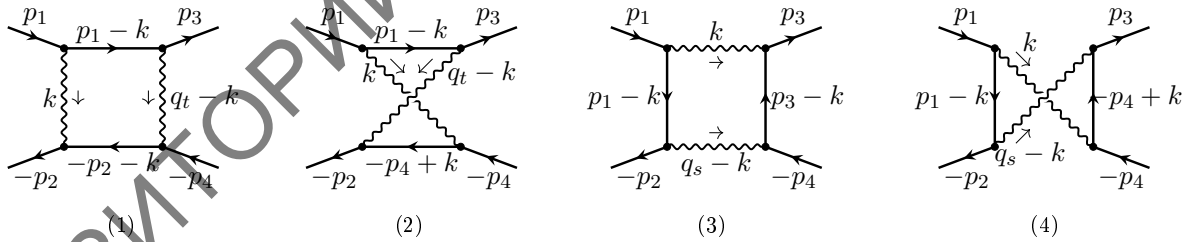


Рис. 2.10: Диаграммы боксов. Волнистой линией обозначены фотон, Z - или W -бозон, в зависимости от конфигурации амплитуды

Заметим, что первые три типа в (2.61) содержат как прямой (direct, D), так и перекрестный (crossed, C) бокс:

$$\mathcal{M}_t^{ab} = \mathcal{M}_{t,D}^{ab} + \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \quad (\text{здесь } a, b = \gamma, Z),$$

а WW -тип содержит только прямой бокс (как для t -, так и для s -канала):

$$\mathcal{M}_t^{WW} = \mathcal{M}_{t,D}^{WW},$$

так как перекрестный бокс запрещён законом сохранения заряда.

После квадрирования, используя обозначения для 4-векторов передач в случае t - и s -каналов [$q_t = p_1 - p_3$, $q_s = p_1 + p_2$, см. формулы (2.2)], получим (в общем случае $a, b = \gamma, Z, W$) для прямых t -канальных боксов (диаграмма 1 на рис. 2.10, далее обозначается как случай 1):

$$\mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = 4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_t) \times \quad (2.62)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a S(-p_2 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \gamma_\nu U_2^c \right],$$

$$\mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = -4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_s) \times \quad (2.63)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \gamma_\mu \Gamma^a S(-p_2 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right],$$

для перекрестных t -канальных боксов (диаграмма 2 на рис. 2.10, далее обозначается как случай 2):

$$\mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = 4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_t) \times \quad (2.64)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \gamma_\nu U_2^c \right],$$

$$\mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = -4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_s) \times \quad (2.65)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right],$$

для прямых s -канальных боксов (диаграмма 3 на рис. 2.10, далее обозначается как случай 3):

$$\mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = -4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_t) \times \quad (2.66)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a S(p_3 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \gamma_\nu U_2^c \gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right],$$

$$\mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = 4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_s) \times \quad (2.67)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a S(p_3 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right],$$

для перекрестных s -канальных боксов (диаграмма 4 на рис. 2.10, далее обо-

значается как случай 4):

$$\mathcal{M}_{s,C}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} = -4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_t) \times \quad (2.68)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \gamma_\nu U_2^c \gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right],$$

$$\mathcal{M}_{s,C}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} = 4\pi\alpha^3 \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_s) \times \quad (2.69)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \right] \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right].$$

Попробуем упростить запись результата для дальнейшего удобства. Для этого, во-первых, используем коммутационные свойства матриц Γ :

$$\Gamma^a \Gamma^b = \Gamma^b \Gamma^a, \quad \Gamma^a \gamma^\mu = \gamma^\mu \Gamma^{a+}. \quad (2.70)$$

Во-вторых, вынесем за знак интеграла величины, не зависящие от k , и применим сокращение

$$C_r = 4\pi\alpha^3 D_c^*(q_r).$$

Наконец, выпишем фермионные пропагаторы S в явном виде в УРП, например:

$$S(p_1 - k) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \approx \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}}{k^2 - 2p_1 k}.$$

В результате получим упрощенные выражения, в которых явно видна структура четырёхточечных функций. Для прямых t -канальных боксов (случай 1) получим:

$$\mathcal{M}_{t,D}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} = -C_t \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} \times \quad (2.71)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu (\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_2 \right],$$

$$\mathcal{M}_{t,D}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} = +C_s \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} \times \quad (2.72)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_2 \gamma_\mu (\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right],$$

для перекрестных t -канальных боксов (случай 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= -C_t \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_4k)} \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_2 \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= +C_s \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_4k)} \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_2 \gamma_\beta(\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned} \quad (2.74)$$

для прямых s -канальных боксов (случай 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= -C_t \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)} \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu(\hat{p}_3 - \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_2 \gamma_\beta(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= +C_s \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)} \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_2 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu(\hat{p}_3 - \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned} \quad (2.76)$$

для перекрестных s -канальных боксов (случай 4):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= +C_t \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_4k)} \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_2 \gamma_\beta(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= -C_s \int \frac{dk}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_4k)} \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_2 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\beta(\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

2.2.4 Комбинации констант связи для боксов

В вышеприведённых выражениях использована ещё одна (новая, уже третья) форма записи комбинаций констант связи и степеней поляризацій. Она возможна только в УРП, так как в этом случае выполняется следующее свойство: каждый сомножитель состоит из суммы произведений либо чётного, либо нечётного количества гамма-матриц. Например, УРП комбинация $\hat{p}_1 - \hat{k}$ имеет в каждом слагаемом нечётное количество гамма-матриц, а с учётом массы было бы ещё и слагаемое $+mI_4$ (чётная степень, а именно

нулевая). Кстати, матрица $1 + \gamma_5 \lambda_1$ также обладает этим свойством. Итак, обсуждаемое свойство и свойства (2.70) позволяют комбинациям Γ^i коммутировать с любыми матрицами в шпуре, то есть свободно перемещаться в нём. В результате новые сокращения приобретают вид

$$U_{1,4}^{abc} = \Gamma^a \Gamma^b \Gamma^c U_{1,4} = (v_0^{abc} - a_0^{abc} \gamma_5) U_{1,4}, \quad (2.79)$$

где

$$\begin{aligned} v_0^{abc} &= v^a v^b v^c + v^a a^b a^c + a^a v^b a^c + a^a a^b v^c, \\ a_0^{abc} &= a^a a^b a^c + a^a v^b v^c + v^a a^b v^c + v^a v^b a^c. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Упрощая в УРП, получим

$$U_1^{abc} = \frac{1}{2} (v_1^{abc} - a_1^{abc} \gamma_5) \hat{p}_1, \quad U_4^{abc} = (v_0^{abc} - a_0^{abc} \gamma_5) \hat{p}_4, \quad (2.81)$$

где

$$v_1^{abc} = v_0^{abc} - \lambda_1 a_0^{abc}, \quad a_1^{abc} = a_0^{abc} - \lambda_1 v_0^{abc}. \quad (2.82)$$

Новая форма записи позволяет собрать константы связи в сечениях боксов в симметричные и весьма удобные для программирования комбинации:

$$\begin{aligned} C_1^{abc} &= v_1^{abc} (v_0^{abc} + \lambda_2 a_0^{abc}), & C_2^{abc} &= a_1^{abc} (a_0^{abc} + \lambda_2 v_0^{abc}), \\ C_3^{abc} &= v_0^{abc} (v_1^{abc} + \lambda_2 a_1^{abc}), & C_4^{abc} &= a_0^{abc} (a_1^{abc} + \lambda_2 v_1^{abc}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Видно, кстати, что выполняется свойство: $C_1^{abc} + C_2^{abc} = C_3^{abc} + C_4^{abc}$. Запишем в новых обозначениях вклады в борновское сечение:

$$\begin{aligned} S_{tt}^{aac} &= 2 [C_1^{a\gamma c} (u^2 + s^2) + C_2^{a\gamma c} (u^2 - s^2)], \\ S_{ts}^{aac} &= S_{st}^{aac} = 2u^2 [C_1^{a\gamma c} + C_2^{a\gamma c}], \\ S_{ss}^{aac} &= 2 [C_3^{a\gamma c} (u^2 + t^2) + C_4^{a\gamma c} (u^2 - t^2)]. \end{aligned}$$

Верхний индекс γ в C играет пассивную роль: $v_0^{a\gamma c} = g_V^{ac}$, $a_0^{a\gamma c} = g_A^{ac}$.

После вычисления следов в числителях боксовских интегралов 4-вектор k либо отсутствует, либо содержится как k_α или $k_\alpha k_\beta$. Соответственно, для расчёта боксовских сечений нам предстоит вычисление четырёхточечных скалярных, векторных и тензорных функций (согласно порядку расположения [через запятые] в числителе подынтегральных выражений ниже), пе-

речислим их для всех четырёх случаев:

$$\begin{aligned}
I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(1),ab} &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2) ((k - q_t)^2 - m_b^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 + 2p_2 k)}, \\
I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(2),ab} &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2) ((k - q_t)^2 - m_b^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_4 k)}, \\
I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(3),ab} &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2) ((k - q_s)^2 - m_b^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_3 k)}, \\
I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(4),ab} &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2) ((k - q_s)^2 - m_b^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_4 k)}.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Сведение четырёхточечных векторных и тензорных интегралов к скалярным (так называемое *векторное и тензорное интегрирование*) подробно разобрано в разд. 6.5 (расчёт векторных и тензорных трёхточечных функций приведён в разд. 6.4.2 и 6.4.3).

2.2.5 Расчёт $\gamma\gamma$ -бокса

Все вклады (2.71)–(2.78) в сечение от диаграмм $\gamma\gamma$ -бокса вычисляются по сходной методике. В начале этого раздела будет рассчитана $(s, D) \times s$ -часть сечения $\gamma\gamma$ -бокса, то есть формула (2.76) при $a, b = \gamma$.

Прежде всего выделим в (2.76) инфракрасно-расходящиеся члены; произведения амплитуд имеют две точки с ИКР: $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow q_r$. В точке $k \rightarrow 0$ (2.76) имеет вид:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow 0} = C_s D_\gamma(q_s) S_{s,D}^c H_0^\gamma(p_1, p_3), \tag{2.85}$$

где происходит факторизация определенных выражений.

1. Борновский пропагатор утрачивает зависимость от k и выносится за знак интеграла: $\lim_{k \rightarrow 0} D_\gamma(q_s - k) = D_\gamma(q_s)$.

2. Трёхточечная функция

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_3 k)}, \tag{2.86}$$

непосредственно выражающаяся через скалярный мастер-интеграл, полный расчёт которого приведен в разд. 6.6.

3. Борновская структура от произведения двух шпуров:

$$S_{s,D}^c = \text{Sp} \left[\gamma_\beta \hat{p}_1 \gamma_\mu U_1^{\gamma\gamma} \gamma_\nu U_2^c \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu \hat{p}_3 \gamma_\beta U_4^{\gamma\gamma} \gamma_\nu U_3^c \right] = -2t \cdot S_{ss}^{\gamma c}.$$

4. Факторизуется также инвариант t , это можно проверить непосредственным расчётом.

Из полученных в точке $k \rightarrow 0$ выражений без труда формируется искомая ИКР-часть $\gamma\gamma$ -бокса, приведем эти выражения здесь в порядке, удобном для дальнейшего попарного суммирования – t -канальные:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= -2C_t D_\gamma(q_t) \cdot S_{tt}^{\gamma\gamma c} \cdot sH_0^\gamma(p_1, -p_2), \\ \mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= +2C_t D_\gamma(q_t) \cdot S_{tt}^{\gamma\gamma c} \cdot uH_0^\gamma(p_1, p_4), \\ \mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= -2C_s D_\gamma(q_t) \cdot S_{ts}^{\gamma\gamma c} \cdot sH_0^\gamma(p_1, -p_2), \\ \mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= +2C_s D_\gamma(q_t) \cdot S_{ts}^{\gamma\gamma c} \cdot uH_0^\gamma(p_1, p_4), \end{aligned} \quad (2.87)$$

и s -канальные:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= -2C_t D_\gamma(q_s) \cdot S_{st}^{\gamma\gamma c} \cdot tH_0^\gamma(p_1, p_3), \\ \mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= +2C_t D_\gamma(q_s) \cdot S_{st}^{\gamma\gamma c} \cdot uH_0^\gamma(p_1, p_4), \\ \mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= -2C_s D_\gamma(q_s) \cdot S_{ss}^{\gamma\gamma c} \cdot tH_0^\gamma(p_1, p_3), \\ \mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= +2C_s D_\gamma(q_s) \cdot S_{ss}^{\gamma\gamma c} \cdot uH_0^\gamma(p_1, p_4). \end{aligned} \quad (2.88)$$

В точке $k \rightarrow q_s$, применяя закон сохранения 4-импульса, получим похожую факторизацию:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow q_s} = C_s D_\gamma(q_s) S_{s,D}^c F_0^\gamma(p_1, p_3). \quad (2.89)$$

Интеграл $F_0^\gamma(p_1, p_3)$ определяется так:

$$F_0^\gamma(p_1, p_3) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{((k - q_s)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)}. \quad (2.90)$$

Заменой $k \rightarrow k + q_s$, которая формально требует перестановок: $p_1 \rightarrow -p_2$, $p_3 \rightarrow -p_4$, не меняющих инвариантов, он сводится к рассмотренному выше:

$$F_0^\gamma(p_1, p_3) = H_0^\gamma(p_1, p_3). \quad (2.91)$$

Соответствующие формулам (2.87) и (2.88) выражения в точках $k \rightarrow q_r$ из-за равенства интегралов (2.91) имеют в точности такой же вид:

$$\mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+} |_{k \rightarrow 0} = \mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+} |_{k \rightarrow q_r}.$$

Теперь произведем вычитание ИКР-части $\gamma\gamma$ -боксов из полного результата, это делается для каждого из восьми слагаемых сечения по единой схеме:

$$\mathcal{M}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}^{c+} - \mathcal{M}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow 0} - \mathcal{M}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow q_s}.$$

В получившемся выражении после алгебраических преобразований все ИК-расходящиеся скалярные интегралы сгруппируются в инфракрасно-конечную комбинацию (будем обозначать её $X_0(p_1, p_3)$, согласно работе Кахане [99]). Упрощенный расчёт интеграла $X_0(p_1, p_3)$ приведен в разд. 6.6. Там же приведены все требуемые двухточечные функции и ИК-конечные скалярные трёхточечные функции G_0 .

Часто ИКР-часть сечения боксов, благодаря очевидной факторизации перед борновским сечением (не совсем, впрочем, полной, а лишь отдельно перед $t \times (t + s)$ (2.87) и $s \times (t + s)$ (2.88) частями борновского сечения), объединяется с вершинной ИКР-частью (после этого факторизация уже полная, перед всем сечением) и вкладом мягких фотонов, так что параметр λ сокращается аналитически. Здесь поступим по-другому: приведем для сечений боксов полные формулы, оставляя тем самым λ в программе численной оценки. Этим достигается как полнота и определённая симметрия записи, так и то, получив в сумме всех вкладов независимость от параметра λ численно, можно иметь дополнительную степень уверенности в правильности программирования.

Приведем получившийся в результате вычислений результат для $\gamma\gamma$ -боксов в УРП. Скалярные интегралы и вклады в сечения будем выражать однотипно через логарифмы, содержащие фермионную массу [будем обозначать их везде заглавной буквой L , согласно (1.23)]:

$$L_\Lambda = \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \quad L_\lambda = \ln \frac{\lambda^2}{m^2}, \quad L_r = \ln \frac{|r|}{m^2}.$$

В $\gamma\gamma$ -боксах встречаются только три определенные комбинации констант связи и степеней поляризации:

$$P_3 \equiv P_1^- g_+^{\gamma\gamma c} - P_2^- f_+^{\gamma\gamma c}, \quad P_4 = P_2^+ f_-^{\gamma\gamma c}, \quad P_5 = P_2^- f_-^{\gamma\gamma c}, \quad (2.92)$$

перед которыми происходит факторизация. Кроме этого, удобно использовать сокращенные обозначения: $T_\pm = t^2 \pm u^2$, $T_0 = s^2 + u^2$.

Выражения для прямых t -канальных $\gamma\gamma$ -боксов выглядят так:

$$\mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t}D_c^*(q_t)(P_3x_1 + P_4y_1), \quad (2.93)$$

$$\mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t}D_c^*(q_s)P_3x_1, \quad (2.94)$$

$$x_1 = [L_t - L_s](T_0[L_s - L_t] - 2tu) + 2u^2\left(L_s[L_s - 2L_\lambda] - \frac{4}{3}\pi^2\right),$$

$$y_1 = 2s^2\left(L_t^2 - 2L_s[L_t - L_\lambda] + \frac{4}{3}\pi^2\right);$$

для перекрестных t -канальных $\gamma\gamma$ -боксов:

$$\mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t}D_c^*(q_t)(P_3x_2 + P_4y_2), \quad (2.95)$$

$$\mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t}D_c^*(q_s)P_3x_2, \quad (2.96)$$

$$x_2 = 2u^2\left(L_t^2 - 2L_u[L_t - L_\lambda] + \frac{4}{3}\pi^2\right),$$

$$y_2 = [L_u - L_t](T_0[L_t - L_u] + 2st) - \pi^2T_0 + 2s^2\left(L_u[L_u - 2L_\lambda] - \frac{1}{3}\pi^2\right);$$

для прямых s -канальных $\gamma\gamma$ -боксов:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s}D_c^*(q_t)P_3x_3, \quad (2.97)$$

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s}D_c^*(q_s)(P_3x_3 + P_5y_3), \quad (2.98)$$

$$x_3 = [L_t - L_s](T_+[L_s - L_t] + 2su) + 2u^2\left(L_t[L_t - 2L_\lambda] - \frac{1}{3}\pi^2\right),$$

$$y_3 = 2t^2\left(L_s^2 - 2L_t[L_s - L_\lambda] + \frac{1}{3}\pi^2\right);$$

для перекрестных s -канальных $\gamma\gamma$ -боксов:

$$\mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s}D_c^*(q_t)P_3x_4, \quad (2.99)$$

$$\mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s}D_c^*(q_s)(P_3x_4 + P_5y_4), \quad (2.100)$$

$$x_4 = 2u^2\left(L_s^2 - 2L_u[L_s - L_\lambda] + \frac{1}{3}\pi^2\right),$$

$$y_4 = [L_u - L_s](T_+[L_s - L_u] + 2st) + 2t^2\left(L_u[L_u - 2L_\lambda] - \frac{1}{3}\pi^2\right).$$

На рис. 2.11 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок к дифференциальному сечению при различных углах для вкладов $\gamma\gamma$ -боксов.

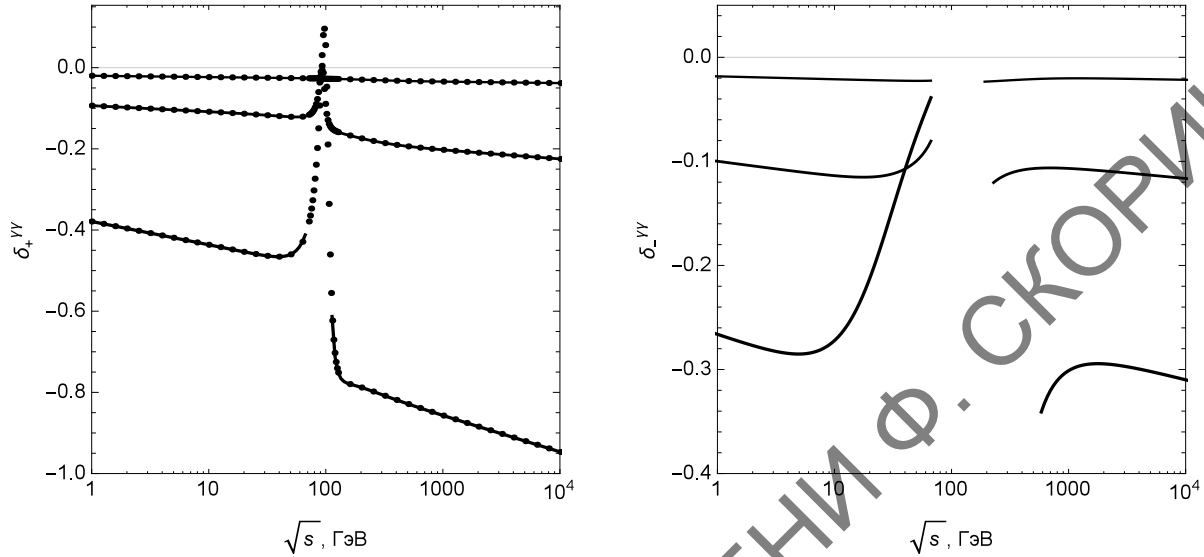


Рис. 2.11: Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок $\delta_+^{\gamma\gamma}$ (слева) и $\delta_-^{\gamma\gamma}$ (справа). Обозначения, как на рис. 2.9

2.2.6 Расчёт γZ -боксов в LE-режиме

Рассчитаем вклад боксовокой диаграммы с одним фотоном (который переносит 4-импульс k) и одним Z -бозоном (переносит 4-импульс $q_r - k$). Легко можно показать, что обратная ситуация [когда Z -бозон имеет 4-импульс k , обозначим её как $Z\gamma$ -боксы, см. (2.61)] даст совершенно такой же вклад, поэтому будем поступать так: рассчитаем первую ситуацию и в конце умножим на два.

Нетрудно убедиться, что сечение формируется только из следующих выражений: четырёхточечных ИК-расходящегося скалярного (с одной точкой расходимости: $k \rightarrow 0$) и ИК-конечных векторного и тензорного интегралов:

$$I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{\gamma Z}(p_1, p_3, q_s) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2) ((k - q_s)^2 - m_Z^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_3 k)}.$$

Скалярный интеграл $I_0^{\gamma Z}$ после тождественного преобразования разобьем на две части:

$$I_0^{\gamma Z} = (I_0^{\gamma Z} - I_0^{\gamma Z}|_{k \rightarrow 0}) + I_0^{\gamma Z}|_{k \rightarrow 0}.$$

Первая часть в LE-режиме незначительна. Чтобы это показать, применим методику предыдущего раздела, тогда расчёт сводится к произведению пропагатора и трёхточечной функции: $D_Z(q_s)H_0^Z \sim \mathcal{O}(m_Z^{-4})$. Вторая часть выражается через ИК-расходящуюся трёхточечную функцию H_0^γ , которая уже обсуждалась выше:

$$I_0^{\gamma Z}|_{k \rightarrow 0} = D_Z(q_s)H_0^\gamma.$$

Выпишем ИКР-части γZ -боксов, они получаются из исходного выражения в пределе $k \rightarrow 0$. С учётом факторизации, точно так, как это было проделано выше для случая $\gamma\gamma$ -боксов, выясняем, что вклады в сечения $\mathcal{M}^{\gamma Z} \mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow 0}$ легко получить из (2.87), (2.88) простыми заменами:

$$D_\gamma(q_r) \rightarrow D_Z(q_r), \quad S_{rr'}^{\gamma c} \rightarrow S_{rr'}^{Zc}. \quad (2.101)$$

Теперь рассчитаем ИК-конечную часть. В LE-режиме с учётом того, что основной вклад в интеграл вносят большие k , численно важен только тензорный интеграл. Используем трюк Фейнмана, основанный на формулах (6.26) из разд. 6.4. Применяя их последовательно и упрощая получившийся знаменатель, получим:

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = \int_0^1 3z^2 dz \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2kp + \Delta]^4}, \quad (2.102)$$

где

$$p = xyz \cdot (p_1 - p_3) + yz \cdot p_3 + \bar{z} \cdot q_s, \quad \Delta = \bar{z} \cdot (q_s^2 - m_Z^2). \quad (2.103)$$

Снимаем тензорный интеграл по формуле (A5) из [99]:

$$\int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2kp + \Delta]^4} = \frac{p_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta}(p^2 - \Delta)/2}{6(p^2 - \Delta)^2}. \quad (2.104)$$

С учётом того, что Δ доминирует, получим:

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta} \int_0^1 z^2 dz \int_0^1 y dy \int_0^1 dx \frac{1}{p^2 - \Delta}. \quad (2.105)$$

Выпишем выражение в знаменателе, после упрощения оно имеет точный вид:

$$p^2 - \Delta = y^2 z^2 t x(x-1) + (s\bar{y} + m^2 y^2)z^2 - (s\bar{y} + m_Z^2)z + m_Z^2.$$

Видно, что интеграл по x легко снимается, тогда, вводя новое обозначение $I_{(i)}^{\gamma Z}$ ($i = \overline{1,4}$), получим тензорный интеграл:

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = g_{\alpha\beta} I_{(3)}^{\gamma Z}, \quad I_{(3)}^{\gamma Z} = \frac{1}{a} \int_0^1 z dz \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\beta} - ayz}{\sqrt{\beta} + ayz}, \quad (2.106)$$

где

$$a = \sqrt{-t}, \quad \beta = a^2 y^2 z^2 - 4s\bar{y}z\bar{z} + 4m_Z^2 \bar{z}. \quad (2.107)$$

Поработаем с интегралом (2.106), введем обозначение

$$\delta = \frac{a}{2m_Z} \rightarrow +0$$

и опустим незначимое в LE-режиме слагаемое $4s\bar{y}z\bar{z}$ (это можно проверить численным интегрированием). Тогда выражение (2.106) приобретает вид

$$I_{(3)}^{\gamma Z} = \frac{1}{4m_Z^2 \delta} \int_0^1 z dz \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{\bar{z} + \delta^2 y^2 z^2}} \ln \frac{\sqrt{\bar{z} + \delta^2 y^2 z^2} - \delta y z}{\sqrt{\bar{z} + \delta^2 y^2 z^2} + \delta y z}. \quad (2.108)$$

Снять интеграл по y представляется возможным, после этой операции получаем

$$I_{(3)}^{\gamma Z} = -\frac{1}{4m_Z^2} \cdot \frac{1}{4\delta^2} \int_0^1 dz \ln^2 \frac{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} - \delta z}{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} + \delta z}. \quad (2.109)$$

Убедимся, что при $\delta \rightarrow +0$

$$\int_0^1 dz \ln^2 \frac{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} - \delta z}{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} + \delta z} \approx 2\delta^2 [3 - 4 \ln(2\delta)], \quad (2.110)$$

для этого предварительно рассчитаем более простой интеграл:

$$\int_0^1 dz \ln^2 \frac{\sqrt{1-z+\delta^2} - \delta}{\sqrt{1-z+\delta^2} + \delta} \approx 2\delta^2 [6 - 4 \ln(2\delta)] \quad (2.111)$$

(с ним справиться можно, интегрируя “в лоб”) и затем разницу между (2.110) и (2.111), которая даст $-6\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4)$. Наконец, получим асимптотическое выражение для LE-режима:

$$I_{(3)}^{\gamma Z} = -\frac{1}{4m_Z^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{m_Z^2}{-t} \right). \quad (2.112)$$

Выпишем ИК-конечные (обозначаем их символом “F” от “finite”) части γZ -боксов в LE-режиме, учитывая факторизацию перед борновскими комбинациями $S_{rr'}^{aac}$; получаем для t -канальных боксов:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= 16\pi\alpha^3 (4S^{\gamma Zc} + U^{\gamma Zc}) I_{(1)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t), \\ \mathcal{M}_{t,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= 16\pi\alpha^3 U^{\gamma Zc} I_{(1)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s), \\ \mathcal{M}_{t,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= -16\pi\alpha^3 (S^{\gamma Zc} + 4U^{\gamma Zc}) I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t), \\ \mathcal{M}_{t,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= -64\pi\alpha^3 U^{\gamma Zc} I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s), \end{aligned} \quad (2.113)$$

а для s -канальных боксов:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{s,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+} \Big|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= 16\pi\alpha^3 U^{\gamma Z c} I_{(3)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t), \\
 \mathcal{M}_{s,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+} \Big|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= 16\pi\alpha^3 (4T^{\gamma Z c} + U^{\gamma Z c}) I_{(3)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s), \\
 \mathcal{M}_{s,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+} \Big|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= -64\pi\alpha^3 U^{\gamma Z c} I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t), \\
 \mathcal{M}_{s,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+} \Big|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= -16\pi\alpha^3 (T^{\gamma Z c} + 4U^{\gamma Z c}) I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s).
 \end{aligned}
 \tag{2.114}$$

На рис. 2.12 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок от вкладов γZ -боксов.

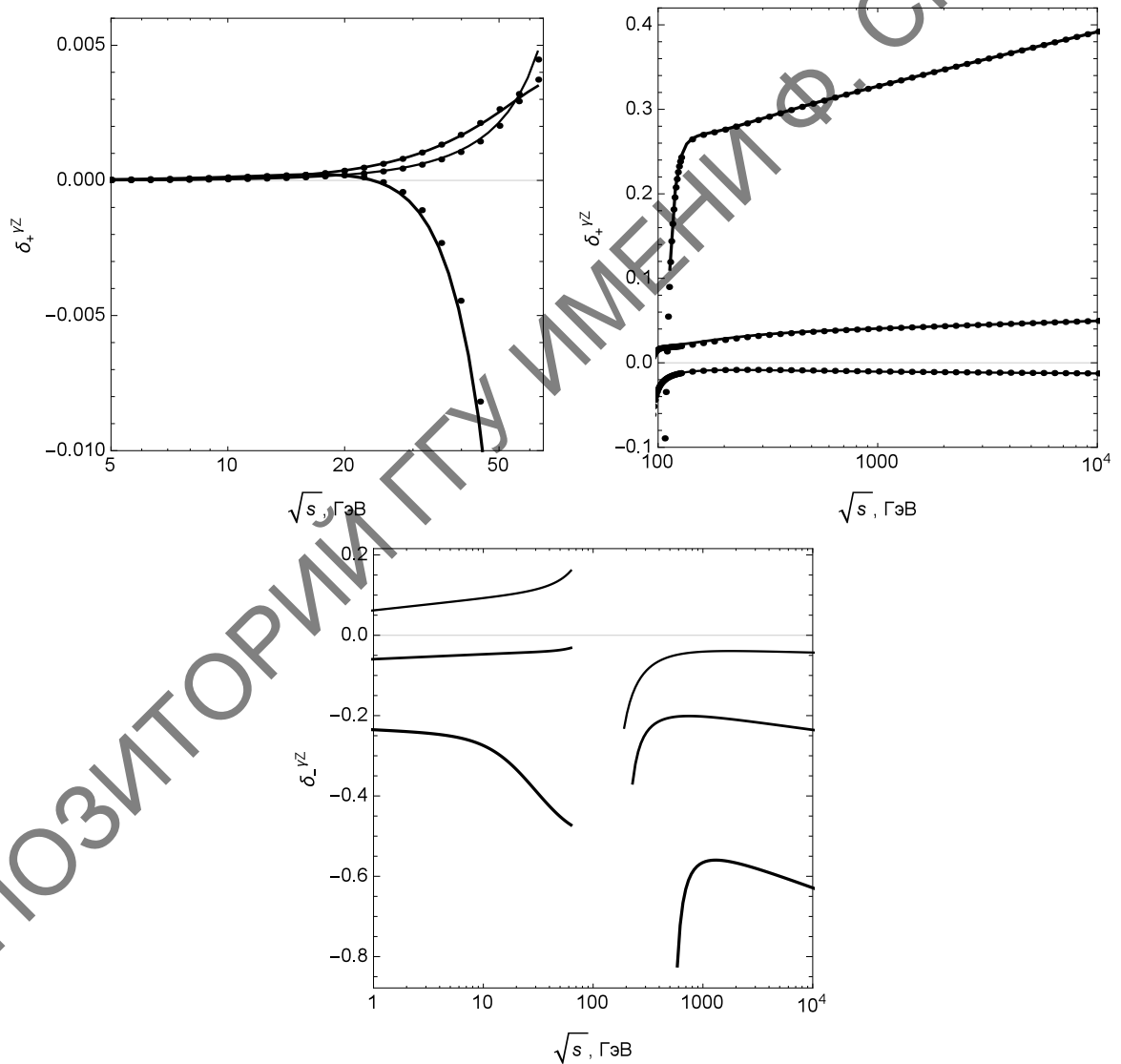


Рис. 2.12: Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок $\delta_+^{\gamma Z}$ (верхние) и $\delta_-^{\gamma Z}$ (нижний). Обозначения такие же, как на рис. 2.9

2.2.7 Расчёт ZZ - и WW -боксов в LE-режиме

В расчёте ZZ -боксов фигурируют ИК-конечные четырёхточечные скалярная, векторная и тензорная функции:

$$I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{ZZ}(p_1, p_3, q_s) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_Z^2)((k - q_s)^2 - m_Z^2)(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)}.$$

В LE-режиме можно существенно упростить задачу, замечая, что основной вклад в интеграл вносят большие k (так это было проделано и в предыдущем разделе). Внешними импульсами в подынтегральном выражении можно пренебречь, тогда

$$I_{(0,\alpha,\alpha\beta)}^{ZZ}(p_1, p_3, q_s) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2)^2 (k^2 - m_Z^2)^2}. \quad (2.115)$$

Векторный интеграл равен нулю из-за нечётности по вектору k , а скалярный интеграл даст вклады малые по сравнению с вкладами тензорного.

Теперь, используя формулу

$$\int \frac{dk}{i\pi^2} k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int \frac{dk}{i\pi^2} k^2 f(k^2)$$

(убедиться в её правильности можно, домножив обе части на $g^{\alpha\beta}$) и осуществляя поворот Вика

$$k_0 \rightarrow ik_0, \quad (2.116)$$

переходим к евклидовому 4-вектору k_E , что даёт:

$$\frac{dk}{i\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2} k_E^2 dk_E^2 d\Omega_4, \quad \int d\Omega_4 = 2\pi^2.$$

Осуществляя замену

$$k^2 = -k_E^2 = -z, \quad \frac{dk}{i\pi^2} = z dz,$$

получим

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}^{ZZ}(p_1, p_3, q_s) &\approx \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int_0^\infty z dz \frac{-z}{z^2 (z + m_Z^2)^2} = -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int_0^\infty dz \frac{1}{(z + m_Z^2)^2} = \\ &= \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \frac{1}{z + m_Z^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{4m_Z^2} g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Интегралы для прочих случаев имеют совершенно такой же вид.

Итак, выражения для ZZ -боксов в LE-режиме $\mathcal{M}^{ZZ}\mathcal{M}^{c+}|_{\text{LE}}$ получаем из (2.113), (2.114) заменами:

$$\gamma Zc \rightarrow \zeta c, \quad I_{1,2,3}^{\gamma Z} \rightarrow -\frac{1}{4m_Z^2}. \quad (2.118)$$

Индекс “ ζ ” означает здесь следующее:

$$v^\zeta = v_+^{ZZ}, \quad a^\zeta = a_+^{ZZ}. \quad (2.119)$$

Чтобы получить выражения для WW -боксов, во-первых, как уже говорилось, необходимо “выключить” перекрестные диаграммы. Далее выражения в LE-режиме $\mathcal{M}^{WW}\mathcal{M}^{c+}|_{\text{LE}}$ получаем из формул (2.113), (2.114) следующими заменами:

$$\gamma Zc \rightarrow \omega c, \quad I_{1,2,3}^{\gamma Z} \rightarrow -\frac{1}{4m_W^2}. \quad (2.120)$$

Индекс “ ω ” означает здесь следующее:

$$v^\omega = v_+^{WW}, \quad a^\omega = a_+^{WW}. \quad (2.121)$$

На рис. 2.13 и 2.14 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок от вкладов ZZ - и WW -боксов.

В заключение заметим, что асимптотические инфракрасно-конечные выражения для боксов с массивными бозонами (γZ , ZZ и WW) в обоих режимах (и LE, и HE) в УРП не содержат массы внешних фермионов. Отсюда сделаем вывод, что эти выражения годятся также для реакции в s -канале в случае, когда массы начальных и конечных фермионов различны. Этот процесс будет подробно рассмотрен в главе 4.

2.2.8 Расчёт γZ , ZZ - и WW -боксов в HE-режиме

Для того, чтобы рассчитать тяжелые боксы (боксы с по крайней мере одним массивным бозоном: γZ , ZZ , WW) в HE-режиме воспользуемся *асимптотическим подходом* [235], который был впервые разработан автором для расчёта ЭСП к процессу Дрелла – Яна при больших инвариантных массах дилептона. Перестроим общие выражения (сохраняем произвольную индексацию бозонов $a, b = \gamma, Z, W$ в комбинациях констант связи) для вкладов в сечение (2.71)–(2.78), применяя следующие правила:

1. Отнимаем и добавляем “ИКР-части” (в точках $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow q$).

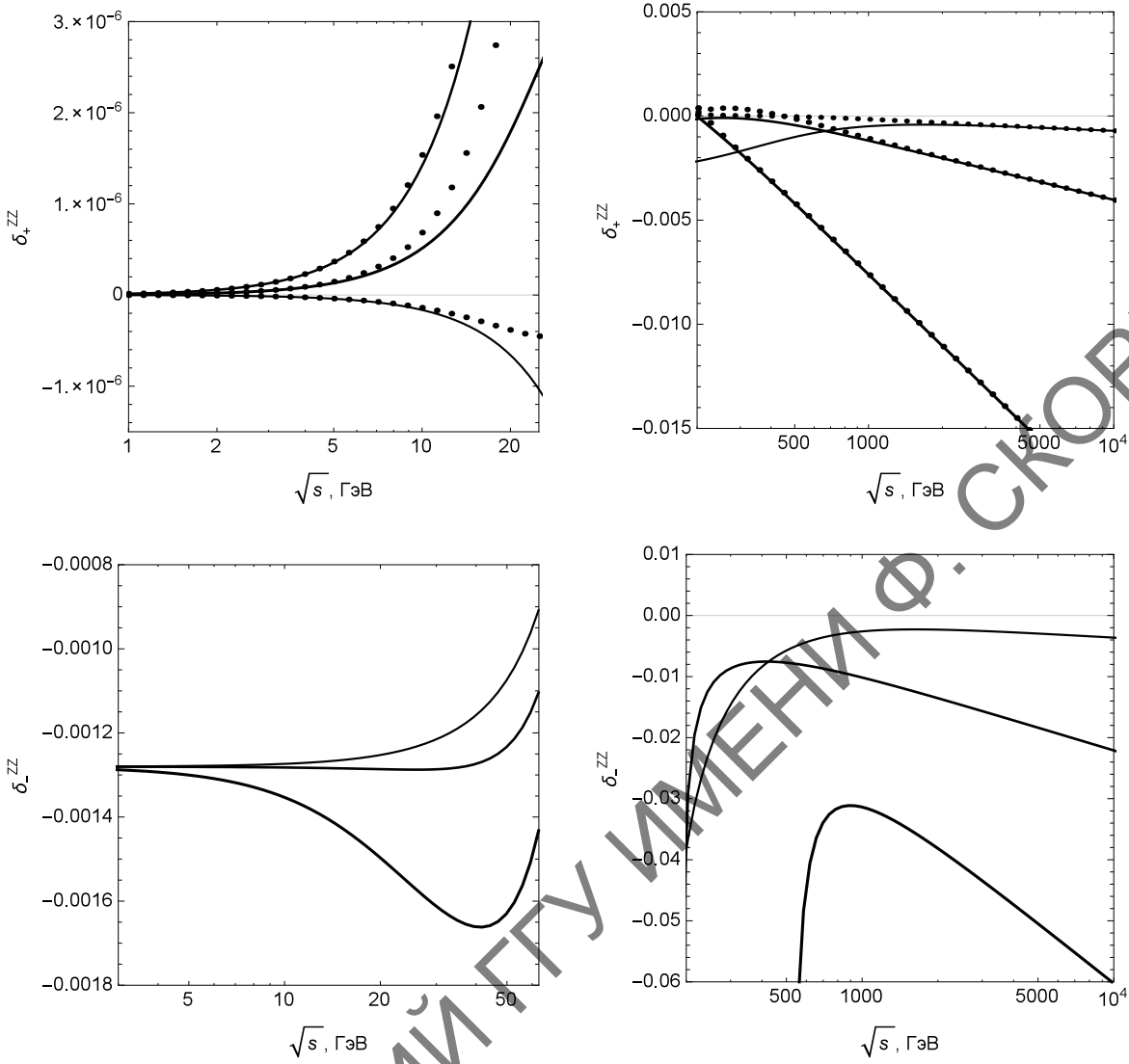


Рис. 2.13: Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок δ_{\pm}^{ZZ} (обозначения – как на рис. 2.9)

2. Пренебрегаем массами бозонов везде, кроме комбинаций $\Pi^{ab}(q_r)$ с бозонными пропагаторами и трёхточечными функциями $H_0^{\gamma,Z}$ (это возможно именно в HE-режиме).

Для прямых t -канальных боксов (случай 1) получим:

$$\mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = -\frac{2C_t}{t} \left[2C_{1+2}^{abc} l_{st} tu - C_1^{abc} l_{st}^2 (3s^2 + u^2) + C_2^{abc} l_{st}^2 (s^2 - u^2) \right] - 2C_t s \Pi_1^{ab}(q_t) H_{tt}^{abc}, \quad (2.122)$$

$$\mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = +\frac{2C_s}{t} \left[C_{1+2}^{abc} l_{st} (l_{st} [s^2 + u^2] - 2tu) \right] - 2C_s s \Pi_1^{ab}(q_t) H_{ts}^{abc};$$

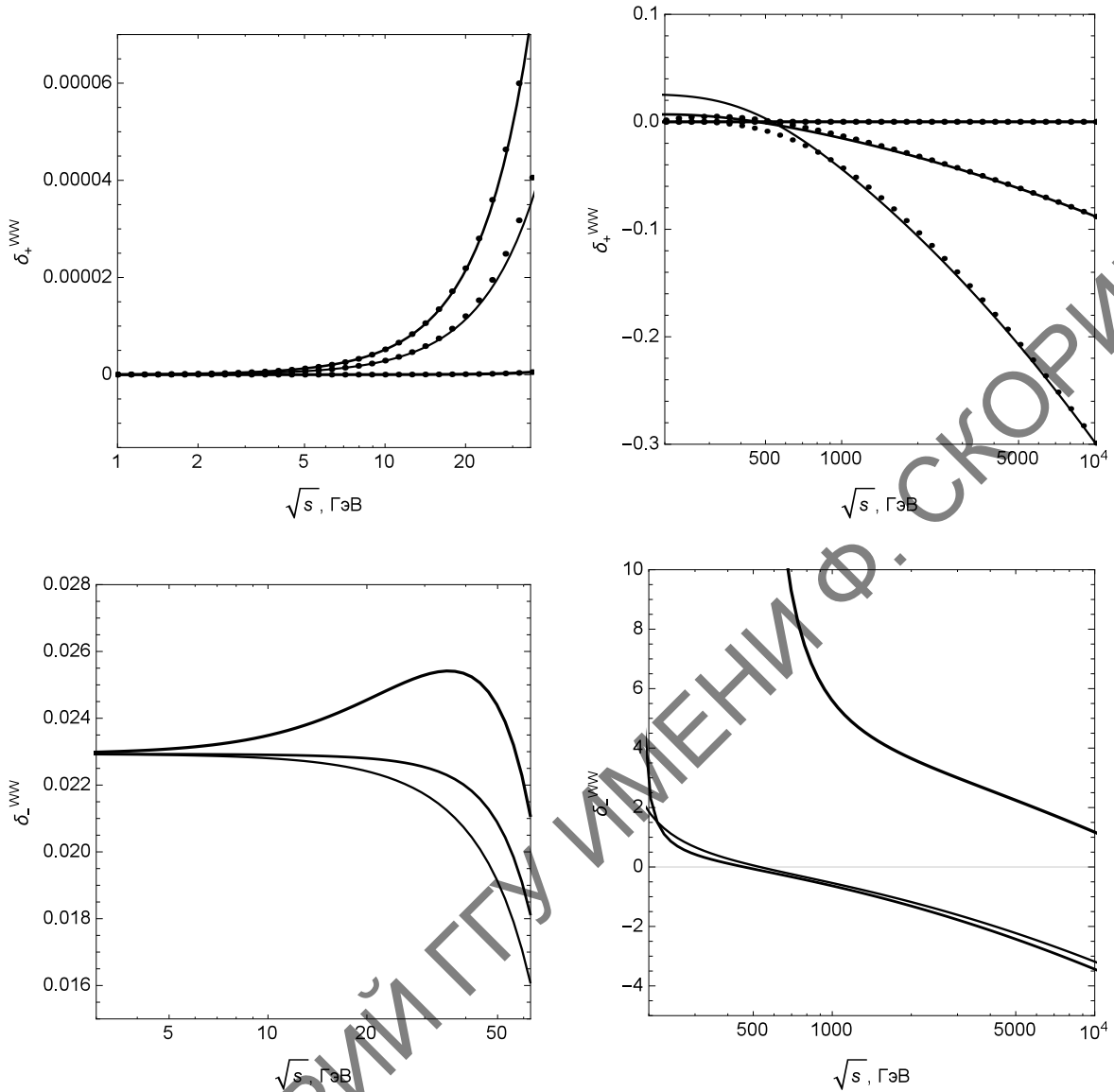


Рис. 2.14: Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок δ_{\pm}^{WW} (обозначения – как на рис. 2.9)

для перекрестных t -канальных боксов (случай 2):

$$\mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = -\frac{2C_t}{t} \left[(C_1^{abc}[s^2 + 3u^2] + C_2^{abc}[u^2 - s^2])(l_{tu}^2 + \pi^2) + 2C_{1-2}^{abc} l_{tu} s t \right] + 2C_t u \Pi_2^{ab}(q_t) H_{tt}^{abc}, \quad (2.123)$$

$$\mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = +\frac{2C_s}{t} \left[-2C_{1+2}^{abc} u^2 (l_{tu}^2 + \pi^2) \right] + 2C_s u \Pi_2^{ab}(q_t) H_{ts}^{abc};$$

для прямых s -канальных боксов (случай 3):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{s,D}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} &= -\frac{2C_t}{s}\left[-C_{1+2}^{abc}l_{st}(l_{st}[t^2+u^2]+2su)\right]-2C_t\Pi_3^{ab}(q_s)H_{st}^{abc}, \\ \mathcal{M}_{s,D}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} &= +\frac{2C_s}{s}\left[2C_{3+4}^{abc}l_{st}su+C_3^{abc}l_{st}^2(3t^2+u^2)+\right. \\ &\quad \left.+C_4^{abc}l_{st}^2(u^2-t^2)\right]-2C_s\Pi_3^{ab}(q_s)H_{ss}^{abc},\end{aligned}\quad (2.124)$$

для перекрестных s -канальных боксов (случай 4):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{s,C}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} &= +\frac{2C_t}{s}\left[-2C_{1+2}^{abc}l_{su}^2u^2\right]+2C_t\Pi_4^{ab}(q_s)H_{st}^{abc}, \\ \mathcal{M}_{s,C}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} &= -\frac{2C_s}{s}\left[C_3^{abc}l_{su}^2(t^2+3u^2)+C_4^{abc}l_{su}^2(u^2-t^2)+\right. \\ &\quad \left.+2C_{3-4}^{abc}l_{su}st\right]+2C_s\Pi_4^{ab}(q_s)H_{ss}^{abc}.\end{aligned}\quad (2.125)$$

Здесь

$$C_{i\pm j}^{abc} = C_i^{abc} \pm C_j^{abc}, \quad \Pi_i^{ab}(q_r) = H_0^a D_b(q_r) + D_a(q_r) H_0^b \quad (i - \text{номер случая}).$$

Используются следующие сокращения:

$$\begin{aligned}H_{tt}^{abc} &= 2[C_1^{abc}(u^2+s^2)+C_2^{abc}(u^2-s^2)], \\ H_{ts}^{abc} &= H_{st}^{abc} = 2u^2[C_1^{abc}+C_2^{abc}], \\ H_{ss}^{abc} &= 2[C_3^{abc}(u^2+t^2)+C_4^{abc}(u^2-t^2)].\end{aligned}$$

На этом этапе полезно будет убедиться, что вклад боксов в случае нейтральных бозонов не содержит коллинеарной сингулярности. Убедимся в этом на примере $\gamma\gamma$ -боксов в t -канале. Суммируя прямой и перекрестный вклады, получим слагаемое, содержащее фермионную массу, в виде

$$2C_t[-s\Pi_1^{\gamma\gamma}(q_t)+u\Pi_2^{\gamma\gamma}(q_t)]H_{tt}^{\gamma\gamma c}.$$

Выражение в скобках после подстановки трёхточечных интегралов пропорционально сумме логарифмов

$$-\frac{1}{2}L_s^2+L_sL_\lambda+\frac{1}{2}L_u^2-L_uL_\lambda+\dots=l_{su}\left(\ln\frac{m^2}{\sqrt{s|u|}}+L_\lambda\right)+\dots$$

и, как видно, от массы (m) не зависит.

2.3 Тормозное излучение в Баба-рассеянии

2.3.1 Кинематика

Пора позаботиться об устранении ИКР, для чего учтём тормозное излучение:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4) + \gamma(p), \quad (2.126)$$

то есть процесс, который “сопровождает” исследуемый процесс (2.1) и неотличим от него в инклюзивной постановке эксперимента (когда тормозной фотон не детектируется). Кроме того, даже без предположений о постановке эксперимента, неотличимость процессов совершенно очевидна при малых энергиях тормозного фотона; такой процесс будем называть мягким тормозным излучением. Кинематика мягкого ТИ, соответственно, неотличима от кинематики безрадиационного процесса (2.1). В сумме сечение процесса (2.1) и сечение мягкого ТИ представляют инфракрасно-конечную величину, однако эта сумма содержит дополнительный параметр (вообще говоря, нефизический) – максимальную энергию (мягкого) тормозного фотона ω .

Фейнмановские диаграммы процесса радиационного процесса (2.126) приведены на рис. 2.15 (t -канальные) и рис. 2.16 (s -канальные). Как и прежде внутренней волнистой линией обозначен бозон $a = \gamma, Z$. Первая и третья на рис. 2.15 и первые две на рис. 2.16 соответствуют излучению из начального состояния, остальные – излучению из конечного состояния.

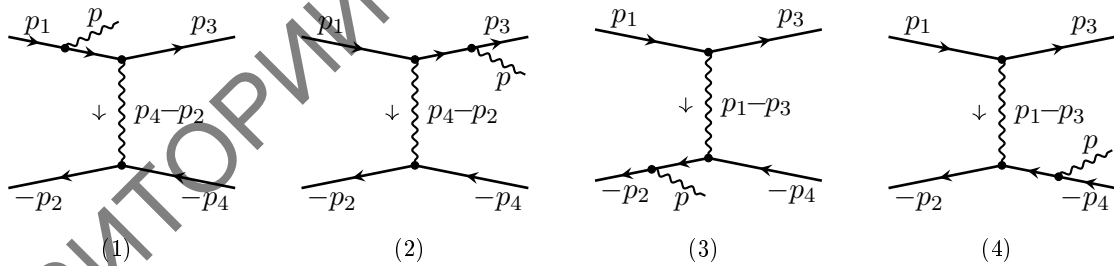
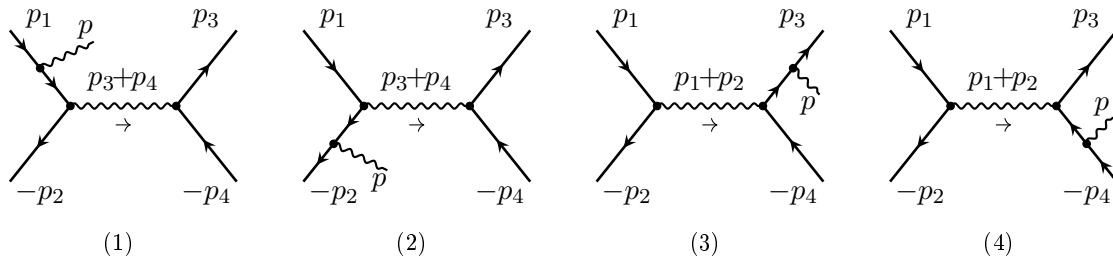


Рис. 2.15: t -канальные диаграммы процесса $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\gamma$

Введем лоренц-инварианты, описывающие радиационный процесс (часто их называют радиационными инвариантами):

$$z_1 = 2p_1p, \quad v_1 = 2p_2p, \quad z = 2p_3p, \quad v = 2p_4p, \quad (2.127)$$

которые обращаются в нуль при $p \rightarrow 0$ и не являются независимыми: так, благодаря законам сохранения они и инварианты s, t, u связаны кинемати-

Рис. 2.16: s -канальные диаграммы процесса $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\gamma$

ческими соотношениями

$$z_1 + v_1 = z + v, \quad s + t + u = v + 4m^2. \quad (2.128)$$

Далее вводятся три инварианта:

$$s_1 = q_{s_1}^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t_1 = q_{t_1}^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad u_1 = (p_1 - p_4)^2. \quad (2.129)$$

Следует сказать, что из шести инвариантов (s, t, u, s_1, t_1, u_1) только инвариант s не зависит от c ($s = 4E^2$, где E – энергия электрона (позитрона) в с.ц.м.), остальные зависят от c , причем по-разному в безрадиационном и радиационном случаях. Определения всех инвариантов и их связь с входными параметрами (ими в этой ситуации являются E и c) в ультрарелятивистской форме приведены в табл. 2.1.

Табл. 2.1: Инварианты для безрадиационного и радиационного случаев в УРП

Инвариант	Безрадиационный случай	Радиационный случай
$s = (p_1 + p_2)^2$	$4E^2$	$4E^2$
$t = (p_1 - p_3)^2$	$-s(1 - c)/2$	$(v - s)(1 - c)/2$
$u = (p_2 - p_3)^2$	$-s(1 + c)/2$	$(v - s)(1 + c)/2$
$z_1 = 2pp_1$	0	z_1
$v_1 = 2pp_2$	0	v_1
$z = 2pp_3$	0	$z_1 + v_1 - v$
$v = 2pp_4$	0	v
$s_1 = (p_3 + p_4)^2$	s	$s - z_1 - v_1$
$t_1 = (p_2 - p_4)^2$	t	$t - v + v_1$
$u_1 = (p_1 - p_4)^2$	u	$u - v + z_1$

Инвариант t в радиационном случае свяжем в с.ц.м. с углом рассеяния,

приведем точный вид этой связи:

$$t = \frac{1}{2} \left(4m^2 - s + v + c \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{(s-v)^2 - 4m^2s} \right), \quad (2.130)$$

инвариант u определяется сходной формулой, но с противоположным знаком при c .

Применяя вышеупомянутые правила Фейнмана, выпишем амплитуды радиационных процессов. Удобно группировать их попарно, суммируя диаграммы с излучением из одной фермионной линии, итого получим четыре амплитуды R_j^a , $j = \overline{1, 4}$. Амплитуда, соответствующая диаграммам 1 и 2 рис. 2.15, такая:

$$R_1^a = ie_\rho(p) D_a(q_{t_1}) \cdot \bar{u}(p_3) (\Gamma_1^a)^{\mu\rho} u(p_1) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4),$$

где

$$(\Gamma_1^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu \Gamma^a \frac{\hat{p} - \hat{p}_1 - m}{z_1} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{p}_3 + m}{z} \gamma^\mu \Gamma^a,$$

а $e_\rho(p)$ – вектор поляризации тормозного фотона с 4-импульсом p .

Поясним, как получились комбинации фермионных пропагаторов в этой амплитуде. Стартуем с правила Фейнмана, затем возводим в квадрат и упрощаем с учётом $p_1^2 = m^2$ (электрон лежит на массовой поверхности) и $p^2 = 0$ (фотон реальный, с нулевой массой):

$$S(p_1 - p) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p} + m}{(p_1 - p)^2 - m^2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p} + m}{p_1^2 - 2p_1 p + p^2 - m^2} = \frac{\hat{p} - \hat{p}_1 - m}{z_1}.$$

Амплитуда, соответствующая диаграммам 3 и 4 рис. 2.15, строится аналогично:

$$R_2^a = ie_\rho(p) D_a(q_t) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(-p_2) (\Gamma_2^a)^{\mu\rho} u(-p_4),$$

где

$$(\Gamma_2^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu \Gamma^a \frac{-\hat{p} - \hat{p}_4 + m}{v} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{-\hat{p} + \hat{p}_2 - m}{v_1} \gamma^\mu \Gamma^a.$$

Диаграммы 1 и 2 рис. 2.16 дают

$$R_3^a = -ie_\rho(p) D_a(q_{s_1}) \cdot \bar{u}(-p_2) (\Gamma_3^a)^{\mu\rho} u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4),$$

где

$$(\Gamma_3^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu \Gamma^a \frac{\hat{p} - \hat{p}_1 - m}{z_1} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{-\hat{p} + \hat{p}_2 - m}{v_1} \gamma^\mu \Gamma^a.$$

Наконец, диаграммы 3 и 4 рис. 2.16 формируют амплитуду

$$R_4^a = -ie_\rho(p)D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_2)\gamma_\mu\Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3)(\Gamma_4^a)^{\mu\rho} u(-p_4),$$

где

$$(\Gamma_4^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu\Gamma^a \frac{-\hat{p} - \hat{p}_4 + m}{v}\gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{p}_3 + m}{z}\gamma^\mu\Gamma^a.$$

Существует хорошая возможность упростить выражения Γ_j^a . Это осуществляется следующим образом: рассмотрим для примера комбинацию $\bar{u}(p_3)(\Gamma_1^a)^{\mu\rho}u(p_1)$, входящая в него конструкция упрощается с использованием коммутационных свойств матриц Дирака:

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta},$$

и уравнения Дирака (см. главу 1) так:

$$\begin{aligned} (-\hat{p}_1 - m)\gamma^\rho u(p_1) &= -(p_{1\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\rho + m\gamma^\rho)u(p_1) = \\ &= -(p_{1\alpha}[2g^{\alpha\rho} - \gamma^\rho\gamma^\alpha] + m\gamma^\rho)u(p_1) = -(2p_1^\rho - \gamma^\rho[\hat{p}_1 - m])u(p_1) = \\ &= -2p_1^\rho u(p_1). \end{aligned}$$

Тогда, протаскивая матрицу Γ^a на правую или, при необходимости, на левую сторону выражения (это возможно через чётное число гамма-матриц), получаем упрощенную форму записи:

$$(\Gamma_1^a)^{\mu\rho} = \left(\gamma^\mu \frac{\hat{p}\gamma^\rho - 2p_1^\rho}{z_1} + \frac{\gamma^\rho\hat{p} + 2p_3^\rho}{z}\gamma^\mu \right) \Gamma^a = \Gamma_1^{\mu\rho}\Gamma^a, \quad (2.131)$$

$$(\Gamma_2^a)^{\mu\rho} = \left(\gamma^\mu \frac{-\hat{p}\gamma^\rho - 2p_4^\rho}{v} + \frac{-\gamma^\rho\hat{p} + 2p_2^\rho}{v_1}\gamma^\mu \right) \Gamma^a = \Gamma_2^{\mu\rho}\Gamma^a, \quad (2.132)$$

$$(\Gamma_3^a)^{\mu\rho} = \left(\gamma^\mu \frac{\hat{p}\gamma^\rho - 2p_1^\rho}{z_1} + \frac{-\gamma^\rho\hat{p} + 2p_2^\rho}{v_1}\gamma^\mu \right) \Gamma^a = \Gamma_3^{\mu\rho}\Gamma^a, \quad (2.133)$$

$$(\Gamma_4^a)^{\mu\rho} = \left(\gamma^\mu \frac{-\hat{p}\gamma^\rho - 2p_4^\rho}{v} + \frac{\gamma^\rho\hat{p} + 2p_3^\rho}{z}\gamma^\mu \right) \Gamma^a = \Gamma_4^{\mu\rho}\Gamma^a. \quad (2.134)$$

Дифференциальное сечение процесса (2.126) имеет вид

$$d\sigma_R = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s} \sum |R|^2 d\Phi_3, \quad (2.135)$$

где фазовый объём реакции записывается так:

$$d\Phi_3 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p) \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2p_{40}} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \quad (2.136)$$

Теперь нам предстоит квадрировать амплитуду в (2.135), должным образом просуммировав и усреднив по поляризациям. Здесь не сохраняются произведения зарядов, вполне очевидно, что $Q_e^2 = (-1)^2 = 1$ во всех членах. Запишем вышесказанное таким образом:

$$\sum |R|^2 = \sum_{a,b=\gamma,Z} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 R_j^a R_k^{b+}. \quad (2.137)$$

При квадрировании используем свойство для вектора поляризации фотона:

$$e_\rho(p)e_{\rho'}(p) = -g_{\rho\rho'}. \quad (2.138)$$

Рассчитаем выражения для квадрированных амплитуд, используя для записи знакомые комбинации (2.14), (2.15). Всего будет 16 слагаемых, сначала запишем диагональные (следим за имеющейся симметрией записи):

$$\begin{aligned} R_1^a R_1^{b+} &= -D_a(q_{t_1})D_b^*(q_{t_1})\text{Sp}[\Gamma_1^{\mu\rho}U_1^{ab}\Gamma_1^{\nu\rho+}U_3]\text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab}\gamma_\nu U_2], \\ R_2^a R_2^{b+} &= -D_a(q_t)D_b^*(q_t)\text{Sp}[\Gamma_2^{\mu\rho}U_4^{ab}\Gamma_2^{\nu\rho+}U_2]\text{Sp}[\gamma_\mu U_1^{ab}\gamma_\nu U_3], \\ R_3^a R_3^{b+} &= -D_a(q_{s_1})D_b^*(q_{s_1})\text{Sp}[\Gamma_3^{\mu\rho}U_1^{ab}\Gamma_3^{\nu\rho+}U_2]\text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab}\gamma_\nu U_3], \\ R_4^a R_4^{b+} &= -D_a(q_s)D_b^*(q_s)\text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho}U_4^{ab}\Gamma_4^{\nu\rho+}U_3]\text{Sp}[\gamma_\mu U_1^{ab}\gamma_\nu U_2]. \end{aligned}$$

Теперь приведем попарно недиагональные элементы:

$$\begin{aligned} R_1^a R_2^{b+} &= -D_a(q_{t_1})D_b^*(q_t)\text{Sp}[\Gamma_1^{\mu\rho}U_1^{ab}\gamma_\nu U_3]\text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab}\Gamma_2^{\nu\rho+}U_2], \\ R_2^a R_1^{b+} &= -D_a(q_t)D_b^*(q_{t_1})\text{Sp}[\Gamma_2^{\mu\rho}U_4^{ab}\gamma_\nu U_2]\text{Sp}[\gamma_\mu U_1^{ab}\Gamma_1^{\nu\rho+}U_3], \\ R_1^a R_3^{b+} &= +D_a(q_{t_1})D_b^*(q_{s_1})\text{Sp}[\Gamma_1^{\mu\rho}U_1^{ab}\Gamma_3^{\nu\rho+}U_2\gamma_\mu U_4^{ab}\gamma_\nu U_3], \\ R_3^a R_1^{b+} &= +D_a(q_{s_1})D_b^*(q_{t_1})\text{Sp}[\Gamma_3^{\mu\rho}U_1^{ab}\Gamma_1^{\nu\rho+}U_3\gamma_\mu U_4^{ab}\gamma_\nu U_2], \\ R_1^a R_4^{b+} &= +D_a(q_{t_1})D_b^*(q_s)\text{Sp}[\Gamma_1^{\mu\rho}U_1^{ab}\gamma_\nu U_2\gamma_\mu U_4^{ab}\Gamma_4^{\nu\rho+}U_3], \\ R_4^a R_1^{b+} &= +D_a(q_s)D_b^*(q_{t_1})\text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho}U_4^{ab}\gamma_\nu U_2\gamma_\mu U_1^{ab}\Gamma_1^{\nu\rho+}U_3], \\ R_2^a R_3^{b+} &= +D_a(q_t)D_b^*(q_{s_1})\text{Sp}[\Gamma_2^{\mu\rho}U_4^{ab}\gamma_\nu U_3\gamma_\mu U_1^{ab}\Gamma_3^{\nu\rho+}U_2], \\ R_3^a R_2^{b+} &= +D_a(q_{s_1})D_b^*(q_t)\text{Sp}[\Gamma_3^{\mu\rho}U_1^{ab}\gamma_\nu U_3\gamma_\mu U_4^{ab}\Gamma_2^{\nu\rho+}U_2], \\ R_2^a R_4^{b+} &= +D_a(q_t)D_b^*(q_s)\text{Sp}[\Gamma_2^{\mu\rho}U_4^{ab}\Gamma_4^{\nu\rho+}U_3\gamma_\mu U_1^{ab}\gamma_\nu U_2], \\ R_4^a R_2^{b+} &= +D_a(q_s)D_b^*(q_t)\text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho}U_4^{ab}\Gamma_2^{\nu\rho+}U_2\gamma_\mu U_1^{ab}\gamma_\nu U_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3^a R_4^{b+} &= -D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_s) \text{Sp} [\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \gamma_\nu U_2] \text{Sp} [\gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3], \\ R_4^a R_3^{b+} &= -D_a(q_s) D_b^*(q_{s_1}) \text{Sp} [\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_3] \text{Sp} [\gamma_\mu U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2]. \end{aligned}$$

Прямое численное интегрирование (2.135) возможно с использованием техники Монте-Карло, однако на этом пути возникает ряд проблем. Как основные выделим медленную сходимость и трудность контроля точности, в то время как современные эксперименты предъявляют высочайшие требования к теоретической оценке наблюдаемых величин (в рамках СМ) в реакциях типа (2.1). Покажем, как построить “удовлетворительно” точную программу численного интегрирования.

2.3.2 Мягкие фотоны

Рассчитаем сечение процесса с излучением мягкого фотона с энергией p_0 в с.ц.м. начальных частиц:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad p_{10} = p_{20} = E = \sqrt{s}/2, \quad (2.139)$$

меньшей фиксированного значения ω , такого, что $\omega \ll E$.

Прежде всего сделаем приближение $p \rightarrow 0$ везде, кроме части фазового объёма $\frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}$ и знаменателей с p . Тогда амплитуды мягкого ТИ становятся пропорциональны борновским, что приводит к факторизации:

$$(R_1^a + R_2^a + R_3^a + R_4^a)|_{p \rightarrow 0} \sim e_\rho(p) \left(\frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} - \frac{p_3^\rho}{pp_3} + \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right) \mathcal{M}_0^a. \quad (2.140)$$

После квадрирования получим факторизацию также и перед борновским сечением:

$$\frac{d\sigma^{\text{soft}}}{dc} = \delta_{\text{soft}} \frac{d\sigma_0}{dc}, \quad (2.141)$$

где

$$\delta_{\text{soft}} = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \left(\frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} - \frac{p_3^\rho}{pp_3} + \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right)^2. \quad (2.142)$$

Для того чтобы вычислить поправку δ_{soft} , требуется уметь рассчитывать интегралы вида

$$L_{ij} = \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{pp_i} \frac{1}{pp_j}, \quad (i, j) = \overline{1, 4}, \quad (2.143)$$

что проделано (несколькими разными способами) в разд. 6.7. Финальный ответ в УРП таков:

$$\delta_{\text{soft}} = \frac{2\alpha}{\pi} \left[2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} \left(\ln \frac{st}{m^2 u} - 1 \right) + L_s - \frac{L_s^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} + \text{Li}_2 \frac{-t}{u} - \text{Li}_2 \frac{-u}{t} \right]. \quad (2.144)$$

Проверку независимости полного результата от λ можно проделать как численно, так и аналитически (все необходимые формулы в тексте уже имеются, используя их, читатель может проделать это полезное упражнение самостоятельно).

На рис. 2.17 приведены зависимости от энергии реакции \sqrt{s} полных относительных поправок δ_{\pm}^{V+S} от суммарного вклада виртуальных вкладов ($C = V$) и мягкого тормозного излучения ($C = S$) (при $\omega = 0.05\sqrt{s}$). В сумме этих вкладов отсутствует зависимость от λ .

2.3.3 Фазовый объём

Поработаем с фазовым объёмом реакции $2 \rightarrow 3$ (2.136). Простой и математически ясный способ – это приведение его к форме с зависимостью от четырех (радиационных) инвариантов (см. книгу [20]):

$$d\Phi_3 = \frac{\pi}{16s\sqrt{-\Delta_4}} dt dz_1 dv_1 dv, \quad (2.145)$$

где $\Delta_4 = \Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ – определитель Грама. Так было сделано, например, в работе [263], где рассчитан вклад жёсткого ТИ в условиях эксперимента MOLLER (см. подробнее в следующей главе). Следует признать, что, несмотря на внешнюю простоту и легкость программирования, вид фазового объёма (2.145) представляет значительную трудность при интегрировании. Чтобы добиться необходимой скорости сходимости интеграла в таком подходе (назовём его M -методом), например, в работе [263] были предприняты значительные усилия в преобразовании (факторизации) подынтегрального выражения, комбинировании результата в виде относительных поправок δ_{\pm} , предварительном разбиении результата по типам вкладов, удобных для программирования интегрирования и пр. Необходимая высокая точность результата достигается, однако остро выявляется несоответствие объёма затраченных усилий и полученной довольно слабой сходимости результата интегрирования.

Решение находится на пути последовательного и целенаправленного преобразования фазового объёма (2.136) в с.ц.м. начальных частиц (2.139).

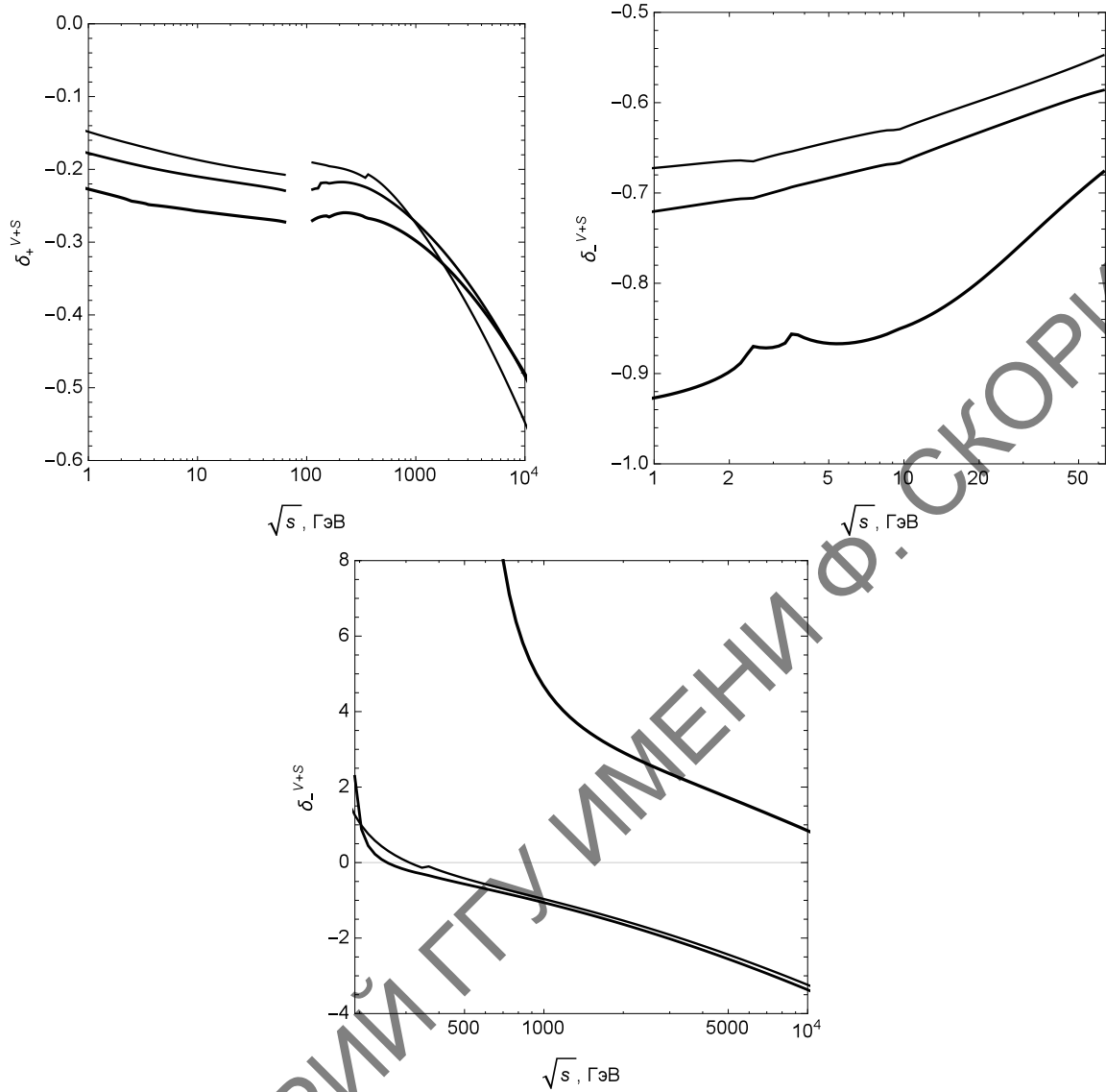


Рис. 2.17: Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок δ_{\pm}^{V+S}

Прежде всего снимем интеграл по $d^3\mathbf{p}_4$, тогда

$$d\Phi_3 = \delta(\sqrt{s} - p_{30} - p_{40} - p_0) \frac{1}{2p_{40}} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \quad (2.146)$$

Перейдем в сферическую систему координат (будем пользоваться двумя обозначениями для угла рассеяния: $\theta_3 \equiv \theta$):

$$d^3\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta_3 d\varphi_3$$

и применим соотношение $|\mathbf{p}_3| d|\mathbf{p}_3| = p_{30} dp_{30}$.

Теперь снимаем интеграл по p_{30} с помощью оставшейся δ -функции, ис-

пользуя свойство

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (2.147)$$

где x_0 – корень уравнения $f(x) = 0$. Функция $f(x)$ в данном случае – это закон сохранения энергии, заданный в неявном виде:

$$f(x) = p_{30} + p_{40} + p_0 - \sqrt{s}, \quad (2.148)$$

где \sqrt{s} – полная энергия реакции, а $x \equiv p_{30}$. Несложно найти производную $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + \frac{x(1 - |\mathbf{p}|A(x^2 - m^2)^{-1/2})}{\sqrt{x^2 - 2|\mathbf{p}|A\sqrt{x^2 - m^2} + |\mathbf{p}|^2}}. \quad (2.149)$$

Изобразим в с.ц.м. векторы конечных частиц (см. рис. 2.18), используя вспомогательный вектор $\mathbf{p}_5 = -\mathbf{p}$.

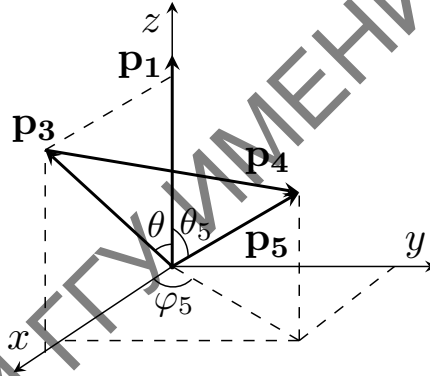


Рис. 2.18: Конфигурация 3-импульсов при интегрировании по фазовому пространству тормозного фотона в с.ц.м. начальных частиц

Возможные энергии конечного электрона найдем, решая закон сохранения энергии $f(x_0^\pm) = 0$:

$$x_0^\pm = \frac{BC \pm \sqrt{C^2 + m^2(1 - B^2)}}{1 - B^2}, \quad (2.150)$$

где коэффициенты

$$B = \frac{\sqrt{s} - p_0}{A|\mathbf{p}|}, \quad C = \frac{|\mathbf{p}|^2 - (\sqrt{s} - p_0)^2}{2A|\mathbf{p}|} \quad (2.151)$$

выражаются через фактор

$$\begin{aligned} A = \cos(\widehat{\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_3}) &= \sin \theta \sin \theta_5 \cos \varphi_5 + \cos \theta \cos \theta_5 = \\ &= -\sin \theta \sin \theta_p \cos \varphi_p - \cos \theta \cos \theta_p, \end{aligned} \quad (2.152)$$

который определяет, какой знак в (2.150) соответствует физическому значению энергии, а именно: при положительном значении A (в этой ситуации вектор вылетевшего фотона образует с вектором \mathbf{p}_3 тупой угол, то есть вылетает в противоположную полусферу) выбираем x_0^- и наоборот.

$$x_0 = \begin{cases} x_0^-, & \text{если } A > 0, \\ x_0^+, & \text{если } A < 0. \end{cases}$$

Упрощая, получаем:

$$p_{30} = \frac{\sqrt{s^3} + 2p_0^2\sqrt{s} - 3p_0s + p_0As_q}{2s - 4p_0\sqrt{s} + 2p_0^2(1 - A^2)}, \quad (2.153)$$

где

$$s_q = \sqrt{s(\sqrt{s} - 2p_0)^2 + 4m^2 [p_0^2(A^2 - 1) + 2p_0\sqrt{s} - s]}.$$

В УРП выражение для энергии приобретает компактный вид:

$$p_{30} = \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\sqrt{s} - 2p_0}{\sqrt{s} - p_0(1 + A)}.$$

С учётом вышесказанного получим фазовый объём в виде

$$d\Phi_3 = \frac{|\mathbf{p}_3|}{4p_{40}|f'(x_0)|} d\cos\theta_3 d\varphi_3 \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \quad (2.154)$$

Здесь $d\cos\theta_3 \equiv dc$, а интегрирование по азимутальному углу φ_3 даёт 2π из-за симметрии относительно поворота системы вокруг оси пучка.

Далее переходим к интегрированию по \mathbf{p} :

$$d^3\mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\cos\theta_p d\varphi_p, \quad \theta_p = \pi - \theta_5, \quad \varphi_p = \pi + \varphi_5.$$

С использованием \mathbf{p}_5 векторы конечных частиц в с.ц.м. выглядят просто:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= (|\mathbf{p}_3| \sin\theta, 0, |\mathbf{p}_3| \cos\theta), \\ \mathbf{p}_5 &= (|\mathbf{p}| \sin\theta_5 \cos\varphi_5, |\mathbf{p}| \sin\theta_5 \sin\varphi_5, |\mathbf{p}| \cos\theta_5), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_3. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Ясно, что $p_{40} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_4|^2}$ и легко вычисляется из (2.155).

Теперь выразим через энергию, азимутальный и полярный углы фотона все радиационные инварианты [263]:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2p_0p_{10} + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_1| \cos\theta_5, \\ v_1 &= 2p_0p_{20} - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_2| \cos\theta_5, \\ z &= 2p_0p_{30} + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3|A, \\ v &= 2p_0(\sqrt{s} - p_{30}) - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3|A. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Заметим, что во всех формулах различаются p_0 и $|\mathbf{p}|$, формально в них удерживается масса фотона λ (то есть $p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 = \lambda^2 \rightarrow 0$), которая в дальнейшем будет использована как инфинитезимальный параметр для регуляризации инфракрасной расходимости. По причине малости её удержание оказывается важным только в нижнем пределе интегрирования (2.157).

2.3.4 Интегрирование по фазовому объёму

Все готово для интегрирования по фазовому объёму тормозного фотона. Используя полученные выражения для фазового объёма, снимем интеграл по азимутальному углу детектируемого электрона φ_3 , тогда сечение R -вклада принимает вид

$$\frac{d\sigma^R}{dc} = -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \int_0^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} d|\mathbf{p}| \int_{-1}^1 d\cos\theta_p \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_p |\mathbf{p}_3|}{p_{40} |f'(x_0)|} \sum_{i,j=\gamma,Z} \sum |R|^2. \quad (2.157)$$

Уже в таком виде численное интегрирование (будем использовать Монте-Карло-интегратор VEGAS [264]) осуществляется без проблем, если позаботиться о сгущении точек в области малых $|\mathbf{p}|$. Однако имеется возможность представить результат в более изящном виде. Сначала перейдем к интегралу по фотонной энергии, используя равенство $|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| = p_0 dp_0$, тогда

$$\int_0^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} d|\mathbf{p}| \dots = \int_{\lambda}^{\Omega} |\mathbf{p}| dp_0 \dots, \quad (2.158)$$

где Ω – максимальная энергия тормозного фотона. Заметим, что такое преобразование даёт возможность представить сечение мягкого ГИ в виде (произведем также некоторые очевидные упрощения)

$$\frac{d\sigma^{\text{soft}}}{dc} = -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \int_{\lambda}^{\omega} |\mathbf{p}| dp_0 \int_{-1}^1 d\cos\theta_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{1}{2} \sum_{i,j=\gamma,Z} \sum |R|^2. \quad (2.159)$$

Видно, что использование преобразования (2.158) даёт дополнительные степени свободы для расчёта:

- мягкое ГИ теперь можно считать либо по предварительно упрощенной формуле (2.141), либо по формуле (2.159), используя технику Монте-Карло (а лучше и по той, и по другой, чтобы дополнительно свериться);

- имеется возможность вовсе не разделять ТИ на мягкое и жёсткое, а пользоваться формулой (2.157), в которой по смыслу содержится полностью все тормозное излучение; использование этого нового и, как показывает практический опыт, полезного свойства назовём W -методом (от “whole” – полный, цельный, без разделения).

W -метод весьма удобен для вычислений РП подобного рода, поскольку по построению не содержит нефизических параметров, кроме фиктивной массы фотона λ , которая естественным образом регуляризует ИКР. С методической точки зрения он хорош тем, что вообще не оперирует такими терминами, как “мягкий фотон”, “жёсткий фотон”, “параметр, разделяющий мягкую и жесткую области”, не требуется также отвлекающая в какой-то мере от сути дела проверка на независимость от этого параметра. Не стоит забывать также о том, что расчёт по области мягких фотонов в традиционном подходе – это приближенное вычисление, и оно *принципиально* содержит ошибку расчёта, которую, к слову сказать, довольно сложно контролировать, расчёт в рамках W -метода такой ошибки не содержит.

Наконец, применив замену переменной (похожая замена использовалась, например, в [265] для выделения зависимости сечения от минимальной энергии фотона)

$$p_0 = \lambda^{1-x} \Omega^x, \quad (2.160)$$

что дает

$$\frac{dp_0}{p_0} = \ln \frac{\Omega}{\lambda} dx,$$

получим сечение в виде

$$\frac{d\sigma^R}{dc} = -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \ln \frac{\Omega}{\lambda} \int_0^1 dx |\mathbf{p}| p_0 \int_{-1}^1 d \cos \theta_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{|\mathbf{p}_3|}{p_{40} |f'(x_0)|} \sum_{i,j=\gamma,Z} |R|^2.$$

Также представляется полезной другая возможность уяснить структуру сечения тормозного излучения. Так, в [265] предлагается использовать нетривиальную замену переменной

$$\mathcal{Z} \equiv \cos \theta_p = a \cdot \frac{\xi - 1}{\xi + 1},$$

чтобы выделить в явном виде коллинеарный логарифм в ISR. Здесь используются следующие обозначения:

$$a = 1 + \frac{m^2}{|\mathbf{p}_1|(E + |\mathbf{p}_1|)}, \quad \xi = \eta^{2y-1}, \quad \eta = \frac{a+1}{a-1},$$

где $E = \sqrt{s}/2$ – энергия электрона в с.д.м., $|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m^2}$ – модуль его 3-импульса. С использованием этой замены легко получить для типичного интерференционного интеграла ISR:

$$I = \int_{-1}^{+1} d \cos \theta_p \frac{f(\cos \theta_p)}{z_1 v_1} = \frac{1}{4p_0^2 |\mathbf{p}_1|^2} \int_{-1}^{+1} dZ \frac{f(Z)}{(a - Z)(a + Z)}.$$

Далее, используя $dZ/dy = 4a\eta^{1+2y}(\eta + \eta^{2y})^{-2} \ln \eta$, получаем явную факторизацию коллинеарного логарифма $\ln \eta$:

$$I = \frac{1}{4p_0^2 |\mathbf{p}_1|^2} \frac{\ln \eta}{a} \int_0^1 dy \cdot f(\cos \theta_p[y]).$$

Упрощая выражение под логарифмом $\eta = (2|\mathbf{p}_1|(E + |\mathbf{p}_1|) + m^2)/m^2$, нетрудно убедиться, что коллинеарная сингулярность в ISR выделена корректно ($\ln \eta$ – это типичный коллинеарный логарифм).

2.4 Численный анализ

Продемонстрируем результат работы компьютерной программы и проведем доказательство независимости его от нефизических параметров. Независимость полного результата от параметра ω (очевидная по построению) тем не менее должна проверяться численно, так как такая проверка традиционно служит хорошим тестом правильности численных расчётов. Исследуем относительные поправки δ_{\pm} к дифференциальным сечениям при различных значениях угла рассеяния электрона (кроме области, близкой к рассеянию назад) в интервале $|\cos \theta_3| \leq 0.9$, так что $25.8^\circ \leq \theta_3 \leq 154.1^\circ$ (также используется соответствующее ограничение на угол рассеяния позитрона $|\cos \theta_4| \leq 0.9$). Максимальная энергия фотона ограничена значением $\Omega = 0.45\sqrt{s}$. Тогда, выбирая для LE-режима энергию планируемого эксперимента Belle II ($\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ), а для HE-режима типичную энергию ИЛС $\sqrt{s} = 500$ ГэВ, получим и сведём в табл. 2.2 и 2.3 численные оценки относительных поправок δ_{\pm} .

Теперь проведем численный анализ полных (проинтегрированных по углу рассеяния) наблюдаемых. Сначала сверим расчёт сечения жёсткого ТИ с результатами других групп: в табл. 2.4 для энергии реакции $\sqrt{s} = 500$ ГэВ получено неплохое согласие с результатами групп SANC и WHIZARD, которые приведены в работе [266]. Для данных в этой таблице интегрируем по энергии фотона так: нижний предел выбираем 1 ГэВ, в качестве верхнего

Табл. 2.2: Относительные поправки δ_{\pm} к дифференциальным наблюдаемым в LE-режиме (при $\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ) при разных θ (масса фотона $\lambda = 10^{-7}$ ГэВ)

ω/\sqrt{s}	δ_+^V	δ_+^S	δ_+^H	δ_+^{NLO}	δ_-^V	δ_-^S	δ_-^H	δ_-^{NLO}
$\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ, $\theta = 30^\circ$								
10^{-5}	-1.8111	0.3380	1.4678	-0.0052	-2.2484	0.3380	1.4502	-0.4601
10^{-4}	-1.8111	0.6855	1.1206	-0.0050	-2.2484	0.6855	1.1029	-0.4599
10^{-3}	-1.8111	1.0330	0.7732	-0.0050	-2.2484	1.0330	0.7557	-0.4597
$\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ, $\theta = 60^\circ$								
10^{-5}	-2.0398	0.4317	1.7254	0.1173	-2.4783	0.4317	1.6388	-0.4077
10^{-4}	-2.0398	0.8121	1.3451	0.1173	-2.4783	0.8121	1.2585	-0.4077
10^{-3}	-2.0398	1.1924	0.9653	0.1179	-2.4783	1.1924	0.8784	-0.4075
$\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ, $\theta = 90^\circ$								
10^{-5}	-2.2065	0.5023	1.9006	0.1964	-2.6579	0.5023	1.7931	-0.3625
10^{-4}	-2.2065	0.9061	1.4970	0.1966	-2.6579	0.9061	1.3895	-0.3623
10^{-3}	-2.2065	1.3100	1.0936	0.1970	-2.6579	1.3100	0.9861	-0.3618
$\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ, $\theta = 120^\circ$								
10^{-5}	-2.3782	0.5729	2.0403	0.2350	-2.8585	0.5729	2.1509	-0.1347
10^{-4}	-2.3782	1.0002	1.6126	0.2346	-2.8585	1.0002	1.7228	-0.1354
10^{-3}	-2.3782	1.4276	1.1854	0.2347	-2.8585	1.4276	1.2956	-0.1354

выбирается его максимальное значение, допустимое кинематикой:

$$\Omega = \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{2m^2}{\sqrt{s}}. \quad (2.161)$$

Наконец, на рис. 2.19 приведем зависимости от \sqrt{s} относительных поправок Δ_{\pm} от однопетлевого вклада с учётом мягких фотонов с энергией меньшей ω (нижние линии), с учётом жестких фотонов с энергией большей ω (верхние линии) и их суммарный вклад (средние линии).

В качестве параметра – разделителя энергий мягкой и жёсткой области – выбирался $\omega = 10^{-3}\sqrt{s}$. При таком значении, во-первых, “мягкие” формулы неплохо работают (имеют физический смысл в плане положительности сечения) и, во-вторых, “жесткий” вклад интегрируется достаточно точно и быстро. Смещение ω к меньшим значениям делает мягкий вклад более точно описывающим процесс, но существенно усложняет интегрирование жёсткой части. Наоборот, при смещении ω к большим значениям “мягкие” формулы начинают работать неточно, хотя интегрирование жёсткой части проще.

Табл. 2.3: Относительные поправки δ_{\pm} к дифференциальным наблюдаемым в HE-режиме (при $\sqrt{s} = 500$ ГэВ) при разных θ (масса фотона $\lambda = 10^{-7}$ ГэВ)

ω/\sqrt{s}	δ_+^V	δ_+^S	δ_+^H	δ_+^{NLO}	δ_-^V	δ_-^S	δ_-^H	δ_-^{NLO}
$\sqrt{s} = 500$ ГэВ, $\theta = 30^\circ$								
10^{-5}	-3.0478	0.9305	2.1614	0.0441	-3.2444	0.9305	2.1447	-0.1692
10^{-4}	-3.0478	1.4429	1.6486	0.0437	-3.2444	1.4429	1.6328	-0.1687
10^{-3}	-3.0478	1.9554	1.1369	0.0444	-3.2444	1.9554	1.1213	-0.1677
$\sqrt{s} = 500$ ГэВ, $\theta = 60^\circ$								
10^{-5}	-3.3436	1.0792	2.4824	0.2180	-3.7905	1.0792	2.4466	-0.2647
10^{-4}	-3.3436	1.6245	1.9391	0.2199	-3.7905	1.6245	1.9021	-0.2639
10^{-3}	-3.3436	2.1698	1.3942	0.2203	-3.7905	2.1698	1.3590	-0.2617
$\sqrt{s} = 500$ ГэВ, $\theta = 90^\circ$								
10^{-5}	-3.5301	1.1891	2.7642	0.4232	-3.8617	1.1891	2.9623	0.2898
10^{-4}	-3.5301	1.7579	2.1970	0.4248	-3.8617	1.7579	2.3944	0.2907
10^{-3}	-3.5301	2.3267	1.6283	0.4249	-3.8617	2.3267	1.8262	0.2913
$\sqrt{s} = 500$ ГэВ, $\theta = 120^\circ$								
10^{-5}	-3.7318	1.2991	2.9332	0.5005	-3.1921	1.2991	6.4915	4.5985
10^{-4}	-3.7318	1.8914	2.3407	0.5003	-3.1921	1.8914	5.8935	4.5928
10^{-3}	-3.7318	2.4837	1.7486	0.5005	-3.1921	2.4837	5.2947	4.5863

Табл. 2.4: Сечение (в пб) жёсткого тормозного излучения в процессе Баба

Группа	00	LL	RR	LR	RL
SANC	15.137(2)	11.454(3)	11.455(3)	20.489(5)	17.149(4)
WHIZARD	15.138(2)	11.461(2)	11.457(2)	20.488(3)	17.147(3)
автор, 10^6	15.10 ± 0.03	11.49 ± 0.03	11.42 ± 0.03	20.46 ± 0.04	17.09 ± 0.03
автор, 10^8	15.16 ± 0.02	11.44 ± 0.02	11.44 ± 0.02	20.47 ± 0.03	17.06 ± 0.02

Естественно, что для обеспечения более высокой заданной точности требуется уменьшение ω (вплоть до λ , как объясняется выше в рамках W -метода) и, как следствие, большее время для интегрирования жёсткой части.

Следующий шаг – проведение полного анализа наблюдаемых величин для конкретной экспериментальной ситуации с определенными условиями детектирования (так называемые *fiducial cuts*). Как это сделать, будет подробно объяснено в следующей главе, посвящённой мёллеровскому рассеянию, начиная с формулы (3.87).

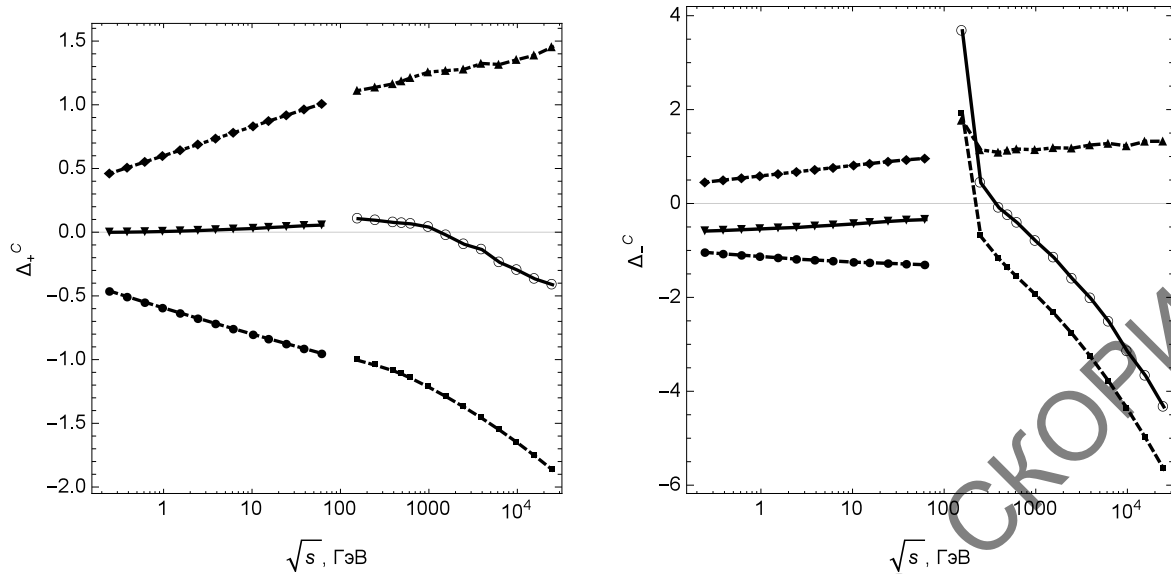


Рис. 2.19: Зависимость от \sqrt{s} поправок Δ_+ (слева) и поправок Δ_- (справа). Виртуальный и мягкий вклад ($C = VS$) описывается нижними линиями, жесткий ($C = \text{hard}$) – верхними, их сумма ($C = \text{NLO} = VS + \text{hard}$) – средними

В последующем анализе трех наблюдаемых асимметрий будет использован простой выбор: ограничение на энергию фотона не делается [то есть используется (2.161)], также накладывается простое симметричное ограничение на угол рассеяния позитрона: $|\cos \theta_4| \leq \cos 20^\circ$ (хорошо видно изменение характера асимметрий с учётом ЭСП именно в окрестности точки, соответствующей 20°). Анализ электрослабых радиационных эффектов представлен тремя рисунками: рис. 2.3 для асимметрии A_{LR} , рис. 2.5 для асимметрии $A_{LR\Sigma}$, рис. 2.6 для асимметрии A_{FB} . Он показывает, что эффекты довольно значительны, особенно этот факт проявляется для поляризационных асимметрий A_{LR} и $A_{LR\Sigma}$.

3 МЁЛЛЕРОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

В своей работе 1932 г. [173] выдающийся датский физик Кристиан Мёллер в рамках квантовой электродинамики впервые вычислил сечение упругого электрон-электронного рассеяния, которое впоследствии в его честь получило название “мёллеровское рассеяние”. МР с экспериментальной точки зрения – очень “чистый” процесс, то есть процесс с хорошо выраженной возможностью формирования начальных и детектирования конечных частиц, а также легко подавляемым фоном. Мёллеровское рассеяние поэтому представляет особый интерес: в поляриметрии, прецизионном определении параметров СМ, в поисках Новой физики и т. д.



Рис. 3.1: Кристиан Мёллер (Christian Møller; 1904–1980) – датский физик-теоретик, химик. Внёс вклад в развитие теории относительности, гравитации и квантовой механики

3.1 Борновское приближение и основные обозначения

Реакция поляризационного мёллеровского рассеяния

$$e^-(k_1) + e^-(p_1) \rightarrow e^-(k_2) + e^-(p_2) \quad (3.1)$$

в борновском приближении описывается фейнмановскими диаграммами, изображенными на рис. 3.2.

Для описания мёллеровского процесса применяются те же обозначения и вычислительные приёмы, что и в предыдущей главе. Вообще, стоит ска-

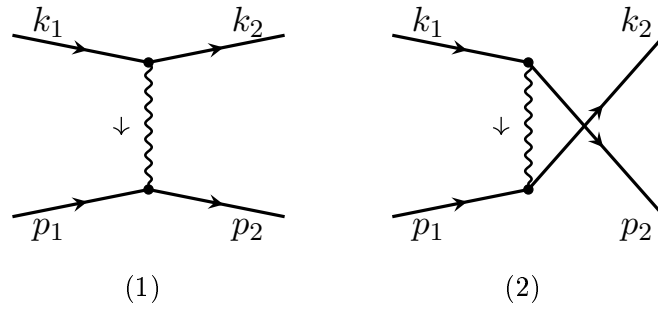


Рис. 3.2: Фейнмановские диаграммы мёллеровского процесса $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ с безрадиационной кинематикой: (1) – t -канальная, (2) – u -канальная

зять, что процессы Баба и Мёллера чрезвычайно похожи. Как говорят, их амплитуды связаны так называемым *кроссингом* – формальной заменой переменных (инвариантов Мандельштама), которые описывают данный канал. Безусловно, такие замены успешно работают и бывают весьма полезны, но их не следует применять механически, существуют определённые нюансы, которые необходимо учитывать: это касается поляризации частиц, интерференционных членов, тонкостей перехода к приближенным выражениям и т. д. Как следствие, рекомендации автора на сей счёт такие: лучше производить расчёт от начала до конца последовательно, проясняя попутно кроссинговую симметрию, где это возможно, и при необходимости ей пользоваться для упрощения программирования и анализа. В этой главе будут приведены результаты такого расчёта, а в разд. 6.9 борновское сечение процесса МР альтернативно будет рассчитано *методом спиральных амплитуд*.

С точностью до второго порядка теории возмущений сечение процесса (3.1) пропорционально квадрату амплитуды:

$$\begin{aligned} \sigma &\sim |\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \sim \\ &\sim \mathcal{M}_0\mathcal{M}_0^+ + 2\text{Re}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_0^+ + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^+ + 2\text{Re}\mathcal{M}_2\mathcal{M}_0^+. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Будем использовать в этой главе сокращённую запись

$$\sigma \equiv d\sigma/d\cos\theta,$$

где θ – угол рассеяния детектируемого электрона с 4-импульсом k_2 в с.ц.м. начальных электронов.

Опишем слагаемые в правой части (3.2): первое ($\sim \mathcal{M}_0\mathcal{M}_0^+$) определяет сечение в борновском приближении, второе ($\sim \text{Re}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_0^+$) – сечение, соответствующее однопетлевому ЭСП, третье ($\sim \mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^+$) слагаемое – это

так называемая Q -часть (quadratic, Q -part) двухпетлевых поправок, обусловленная квадратом однопетлевых амплитуд (она была изучена в работе [267]), и, наконец, четвёртое ($\sim \text{Re}\mathcal{M}_2\mathcal{M}_0^+$) – это так называемая T -часть (two-loop) двухпетлевых поправок – наиболее сложная и до сих пор не рассчитанная полностью часть.

Амплитуды борновских ($\mathcal{M}_0 \sim \mathcal{O}(\alpha)$, рис. 3.2), однопетлевых (\mathcal{M}_1) и двухпетлевых (\mathcal{M}_2) диаграмм рассчитываются по уже применявшимся правилам Фейнмана. Полная амплитуда борновского процесса представляет собой разность t -канальной и u -канальной частей:

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{0,t} - \mathcal{M}_{0,u} \quad (3.3)$$

(знак минус обусловлен тождественностью фермионов рассматриваемой реакции). Амплитуды t - и u -канала связаны простой заменой 4-импульсов

$$\mathcal{M}_{0,u} = \mathcal{M}_{0,t}|_{k_2 \leftrightarrow p_2}. \quad (3.4)$$

В простейшем случае она проявится в конечном выражении наблюдаемой величины в виде кроссинга $t \leftrightarrow u$. Ещё раз напомним, что наличие расчётных нюансов не позволяет применять кроссинговую замену механически.

Квадрированная борновская амплитуда \mathcal{M}_0 образует хорошо известное борновское сечение. В УРП оно представлено следующей формулой:

$$\sigma^0 = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{i,j=\gamma,Z} \left[\lambda_-^{i,j} (u^2 D^{it} D^{jt} + t^2 D^{iu} D^{ju}) + \lambda_+^{i,j} s^2 (D^{it} + D^{iu})(D^{jt} + D^{ju}) \right], \quad (3.5)$$

где функции

$$\lambda_{\pm}^{i,k} = \lambda_{1B}^{i,k} \lambda_{1T}^{i,k} \pm \lambda_{2B}^{i,k} \lambda_{2T}^{i,k} \quad (3.6)$$

представляют собой комбинацию векторных v^j и аксиальных a^j констант связи (введены в разд. 6.1), и $p_B(p_T)$ – степеней поляризации электронов с 4-импульсом k_1 (p_1):

$$\lambda_{1B(T)}^{i,j} = g_V^{i,j} - p_{B(T)} g_A^{i,j}, \quad \lambda_{2B(T)}^{i,j} = g_A^{i,j} - p_{B(T)} g_V^{i,j}. \quad (3.7)$$

В этой главе используется пропагаторная структура:

$$D^{ir} = \frac{1}{r - m_i^2} \quad (i = \gamma, Z; r = t, u) \quad (3.8)$$

и стандартный набор инвариантов Мандельштама:

$$s = (k_1 + p_1)^2, \quad t = (k_1 - k_2)^2, \quad u = (k_2 - p_1)^2. \quad (3.9)$$

Из (3.5) нетрудно получить УРП результат для неполяризованного МР в КЭД (для этого зануляются поляризации и выбрасываются слабые вклады):

$$\sigma_{00}^0 = \alpha^2 \pi \frac{s^4 + t^4 + u^4}{st^2 u^2}. \quad (3.10)$$

Степени поляризации электронов $p_{B(T)}$ в сечениях будут обозначаться следующим образом: нижние индексы сечений L и R означают $p_{B(T)} = -1$ и $p_{B(T)} = +1$ соответственно; первый индекс указывает степень поляризации электрона с 4-импульсом k_1 , второй – электрона с 4-импульсом p_1 . Отметим, что приведенный результат согласуется с [197].

По-разному комбинируя степени поляризации электронных пучков, можно получить четыре измеряемые сечения, причем из-за присутствия в реакции тождественных фермионов два из сечений одинаковы: $\sigma_{LR} = \sigma_{RL}$. Из оставшихся трех сечений можно построить три независимые асимметрии [268], одна из них

$$A_1 = \frac{\sigma_{LL} + \sigma_{LR} - \sigma_{RL} - \sigma_{RR}}{\sigma_{LL} + \sigma_{LR} + \sigma_{RL} + \sigma_{RR}} = \frac{\sigma_{LL} - \sigma_{RR}}{\sigma_{LL} + 2\sigma_{LR} + \sigma_{RR}} \quad (3.11)$$

– главный объект исследования. В силу пропорциональности разности сечений $\sigma_{LL} - \sigma_{RR}$ асимметрии пропорциональны комбинации $1 - 4s_W^2$ и, следовательно, чрезвычайно чувствительны к малым изменениям величины $|s_W|$. Благодаря этому факту асимметрия A_1 , которая в LE-режиме в борновском приближении выглядит как

$$A_1^0 = \frac{s}{2m_W^2 s_W^2} \frac{y(1-y)}{1+y^4+(1-y)^4} (1-4s_W^2), \quad y = -\frac{t}{s}, \quad (3.12)$$

использовалась в эксперименте E-158 как основная наблюдаемая.

Продемонстрируем (рис. 3.3, *a*) масштаб борновской асимметрии A_1^0 и её поведение в зависимости от θ при низких энергиях, выбрав $E_{\text{lab}} = 3$ ГэВ (сплошная кривая) и энергию MOLLER, $E_{\text{lab}} = 11$ ГэВ (штриховая кривая). Для всех численных оценок, если это не оговаривается отдельно, используется FORTRAN-программа автора rcAPV (Radiative Corrections to parity-violating asymmetry A_{PV}) и значения электрослабых параметров из [259].

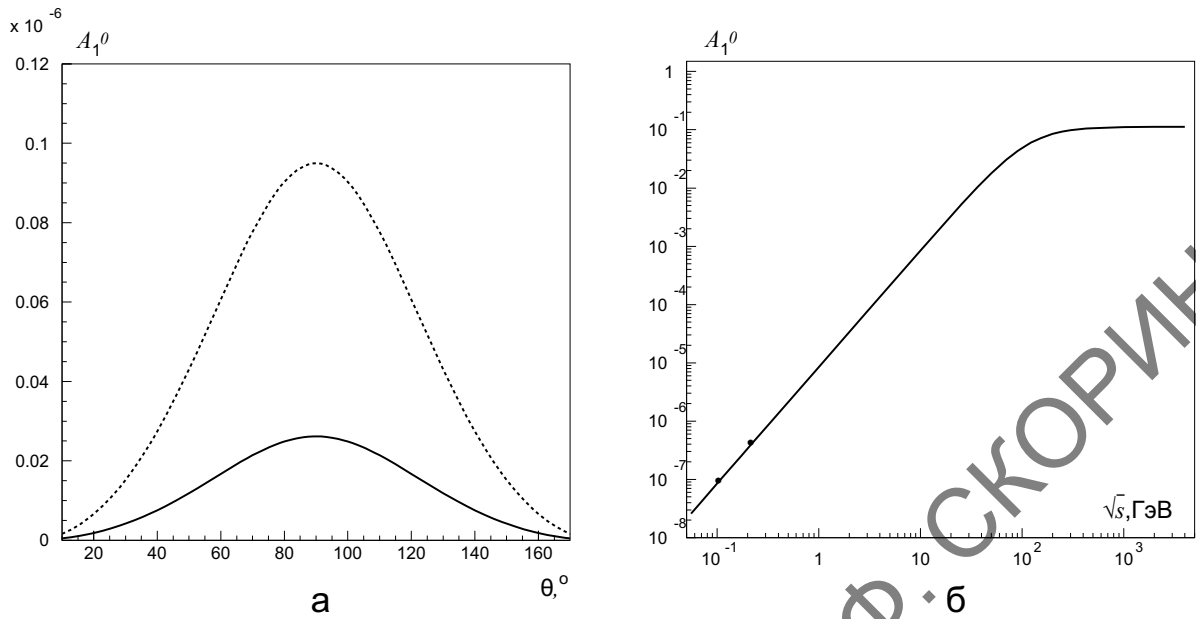


Рис. 3.3: а – борновская асимметрия A_1^0 в зависимости от θ при $E_{\text{lab}} = 3$ ГэВ (сплошная кривая) и 11 ГэВ (штриховая кривая), б – A_1^0 в зависимости от \sqrt{s} при $\theta = 90^\circ$. Кинематические точки экспериментов MOLLER и E-158 соответственно слева направо

Так как в LE-режиме A_1^0 пропорциональна $s = 2mE_{\text{lab}}$, то отношение асимметрий при разных энергиях: $A_1^0(11 \text{ ГэВ})/A_1^0(3 \text{ ГэВ}) \approx 11/3$ для всех значений θ . Пропорциональное энергии поведение асимметрии наблюдается (рис. 3.3, б) и с дальнейшим увеличением значений \sqrt{s} , до $\sqrt{s} \sim m_Z$; далее линейный рост резко замедляется и в HE-режиме асимметрия асимптотически стремится к значению $(1 - 16s_W^4)/(1 + 17s_W^4) \approx 0.1123$ (см., например, формулу (25) из [269]).

Асимметрия A_1 имеет замечательное качество, основанное на её структуре: поскольку она состоит только из комбинаций $\sigma_{\text{LL}} + \sigma_{\text{LR}}$ и $\sigma_{\text{RL}} + \sigma_{\text{RR}}$, которые можно интерпретировать как сечения рассеяния электрона с поляризацией $p_B = -1$ и $p_B = +1$ на неполяризованном электроне, то её часто рассматривают как асимметрию с одиночной поляризацией (singly-polarized) [она уже рассматривалась, см. формулу (2.28)], в отличие от асимметрии:

$$A_2 = \frac{\sigma_{\text{LR}} - \sigma_{\text{LL}}}{\sigma_{\text{LR}} + \sigma_{\text{LL}}}, \quad (3.13)$$

состоящей из сечений рассеяния электронов с различными поляризациями (doubly-polarized). Эта асимметрия сохраняет чётность и является важной наблюдаемой величиной при определении поляризации электронного пучка с помощью мёллеровского поляриметра (см. ссылки выше, а также [126], [127]). В ультррелятивистском приближении в рамках КЭД борновская

асимметрия A_2^0 не зависит от энергий и выглядит довольно просто:

$$A_2^0 = \frac{y(1-y)(y^2-y+2)}{(1-y+y^2)^2} = \frac{\sin^2 \theta (7 + \cos^2 \theta)}{(3 + \cos^2 \theta)^2}. \quad (3.14)$$

В предыдущей главе были введены аддитивные относительные поправки (2.39), которые оказываются полезными и в случае изучения эффектов радиационных поправок для поляризационной асимметрии в мёллеровском рассеянии. Физический эффект определяется, как и раньше, формулой (2.42).

Подробно рассмотрим центральную кинематическую точку (ЦКТ) эксперимента MOLLER JLab:

$$E_{\text{lab}} = 11 \text{ ГэВ}, \quad \theta = 90^\circ. \quad (3.15)$$

Для ЦКТ выполняется:

$$t = u = t_0 = -s/2 \approx -0.00562 \text{ ГэВ}^2, \quad D^{Zt_0}/D^{\gamma t_0} \approx -t_0/m_Z^2 \approx 6.8 \cdot 10^{-7}.$$

Область, которой она принадлежит, соответствует LE-режиму.

Знаменатели (2.39) рассчитываются непосредственно из (3.5), (3.10), например:

$$\begin{aligned} \sigma^0|_- &= 16\pi\alpha^2 v^Z a^Z s (D^{\gamma t} + D^{\gamma u})(D^{Zt} + D^{Zu}) \approx \\ &\approx -32\pi\alpha^2 v^Z a^Z \frac{s}{m_Z^2} (D^{\gamma t} + D^{\gamma u}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

В ЦКТ (3.15) они выглядят особенно просто:

$$\sigma_{00}^0 \approx 18\pi\alpha^2 s^{-1}, \quad \sigma^0|_- \approx 128\pi\alpha^2 v^Z a^Z m_Z^{-2}. \quad (3.17)$$

Нижний индекс 00 обозначает сечение рассеяния неполяризованных частиц, а операция $|_-$ означает разность: $E_{L0} - E_{R0}$, заметим также, что в случае МР выполняется соотношение: $E_{L0} - E_{R0} = E_{LL} - E_{RR}$.

3.2 Вклад дополнительных виртуальных частиц

Вклад дополнительных виртуальных частиц, как и в процессе Баба, представлен тремя классами диаграмм: собственными энергиями бозонов, вершинными функциями и боксами. Соответствующее сечение выглядит как сумма всех вкладов:

$$\sigma^V = \sigma^{\text{BSE}} + \sigma^{\text{Ver}} + \sigma^{\text{Box}}. \quad (3.18)$$

Фейнмановские диаграммы, соответствующие виртуальным однопетлевым вкладам, изображены на рис. 3.4 (t - и u -канальные диаграммы BSE), рис. 3.5 (t -канальные вершинные диаграммы), рис. 3.6 (t -канальные боксовские диаграммы); u -канальные диаграммы получаются из t -канальных с помощью перестановки конечных фермионных линий или, как говорят, ног (от англ. “leg”), что означает замену: $k_2 \leftrightarrow p_2$.

3.2.1 Бозонные собственные энергии

Диаграммы, соответствующие вкладам бозонных собственных энергий в мёллеровское рассеяние, представлены на рис. 3.4. Как и выше, кружком на них обозначены все варианты, возможные в рамках СМ. Обозначения 4-импульсов те же, что на борновских диаграммах рис. 3.2.

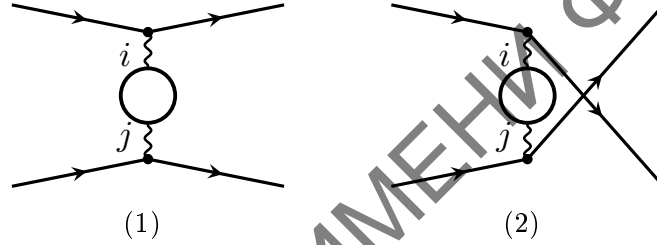


Рис. 3.4: Фейнмановские диаграммы вкладов BSE в процесс мёллеровского рассеяния: (1) – t -канальная, (2) – u -канальная

Сечение, соответствующее BSE-вкладам, не содержит ИКР и имеет следующий вид (тут явно виден кроссинг):

$$\sigma^{\text{BSE}} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{l=1}^8 M_l^S + (t \leftrightarrow u), \quad (3.19)$$

где M_l^S выражаются через пропагаторные структуры (3.8) и функции $M_{\text{ev,od}}$:

$$\begin{aligned} M_{\text{ev}}^{ijkl} &= 2(s^2 + u^2)\lambda_{1B}^{ij}\lambda_{1T}^{kl} + 2(s^2 - u^2)\lambda_{2B}^{ij}\lambda_{2T}^{kl}, \\ M_{\text{od}}^{ijkl} &= -2s^2(\lambda_{1B}^{ij}\lambda_{1T}^{kl} + \lambda_{2B}^{ij}\lambda_{2T}^{kl}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1^S &= D^{\gamma t} D_S^{\gamma Z t} (M_{\text{ev}}^{\gamma\gamma Z\gamma} + M_{\text{ev}}^{Z\gamma\gamma\gamma}), & M_2^S &= -M_1^S |_{\gamma t \rightarrow \gamma u, \text{ev} \rightarrow \text{od}}, \\ M_3^S &= D^{Zt} D_S^{\gamma Z t} (M_{\text{ev}}^{\gamma Z Z Z} + M_{\text{ev}}^{Z Z \gamma Z}), & M_4^S &= -M_3^S |_{Zt \rightarrow Zu, \text{ev} \rightarrow \text{od}}, \\ M_5^S &= D^{\gamma t} (D_S^{\gamma\gamma t} M_{\text{ev}}^{\gamma\gamma\gamma\gamma} + D_S^{Z Z t} M_{\text{ev}}^{Z\gamma Z\gamma}), & M_6^S &= -M_5^S |_{\gamma t \rightarrow \gamma u, \text{ev} \rightarrow \text{od}}, \\ M_7^S &= D^{Zt} (D_S^{\gamma\gamma t} M_{\text{ev}}^{\gamma Z \gamma Z} + D_S^{Z Z t} M_{\text{ev}}^{Z Z Z Z}), & M_8^S &= -M_7^S |_{Zt \rightarrow Zu, \text{ev} \rightarrow \text{od}}. \end{aligned}$$

Здесь комбинации

$$D_S^{ijl} = -D^{il} \hat{\Sigma}_T^{ij}(r) D^{jl} \quad (3.21)$$

связаны с выражениями $\hat{\Sigma}_T^{ij}(r)$, которые представляют собой поперечные части перенормированных $\gamma\gamma$, ZZ и γZ -собственных энергий (они были введены выше).

3.2.2 Ренормализационные условия

В рамках РМП (как и в предыдущей главе, в этой используется именно эта схема перенормировки) продемонстрируем результат применения различных ренормализационных условий: РУХ [65] (см. также [66]) и РУД [67]. В обоих подходах используются мультипликативные константы перенормировки и, как результат, электрослабый лагранжиан, изначально записанный в терминах “голых” параметров, разделяется на основной лагранжиан и лагранжиан контрчленов (counterterm Lagrangian). Основной лагранжиан имеет в точности такую же форму, что и “голый”, но зависит от перенормированных параметров и полей. Перенормированные константы масс, зарядов и полей в контрчленах фиксируются условиями перенормировки, которые разделяются на два класса:

1. перенормировку параметров, которая определяет физические наблюдаемые в заданном порядке теории возмущений;
2. перенормировку полей, которая определяет функции Грина и не отражается на расчёте элементов S -матрицы.

Ренормализационные условия для фиксации параметров СМ в подходах ([65] и [67]) вводятся однотипно:

$$\begin{aligned} \text{Re} \hat{\Sigma}_T^{WW}(m_W^2) = \text{Re} \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(m_Z^2) = \text{Re} \hat{\Sigma}^f(m_f^2) = 0, \\ \hat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(k^2 = 0, p^2 = m^2) = ie\gamma_\mu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Первое условие фиксирует перенормировку масс W -бозонов, Z -бозонов и фермионов без перемешивания кварков. Второе фиксирует перенормировку электрического заряда и извлекается из томсоновского предела для $k^2 = 0$ и электронов на массовой поверхности.

Что касается перенормировки полей, то к этой проблеме авторы [65] и [67] подходят совершенно по-разному. Ренормализационные условия Холлика задаются так, что перенормировочные константы поля определяются

из выражений:

$$\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial k^2} \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(0) = 0, \quad (3.23)$$

в то время как в случае ренормусловий Деннера (РУД) перенормировка полей осуществляется на массовой поверхности, как это было сделано для параметров СМ. Это требует в добавление к (3.22) и (3.23) выполнения следующих условий:

$$\text{Re} \hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(m_Z^2) = 0, \quad \text{Re} \frac{\partial}{\partial k^2} \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(m_Z^2) = 0, \quad \text{Re} \frac{\partial}{\partial k^2} \hat{\Sigma}_T^{WW}(m_W^2) = 0. \quad (3.24)$$

В результате для РУД перенормировочные константы полей векторных бозонов рассчитываются сравнительно несложно, без участия констант перенормировки масс:

$$\begin{aligned} \delta Z_\gamma^D &= -\frac{\partial}{\partial k^2} \Sigma_T^{\gamma\gamma}(0), \quad \delta Z_Z^D = -\text{Re} \frac{\partial}{\partial k^2} \Sigma_T^{ZZ}(m_Z^2), \\ \delta Z_W^D &= -\text{Re} \frac{\partial}{\partial k^2} \Sigma_T^{WW}(m_W^2), \\ \delta Z_{Z\gamma}^D &= \frac{2}{m_Z^2} \Sigma_T^{\gamma Z}(0), \quad \delta Z_{\gamma Z}^D = -\frac{2}{m_Z^2} \text{Re} \Sigma_T^{\gamma Z}(m_Z^2), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где они представлены через неперенормированные собственные энергии. По сравнению с РУХ, где перенормировочные условия (3.24) не вводятся, в РУД полевые константы перенормировки определяются немного по-другому и зависят от констант перенормировки массы:

$$\begin{aligned} \delta Z_\gamma^H &= -\frac{\partial}{\partial k^2} \Sigma_T^{\gamma\gamma}(0), \quad \delta Z_{Z\gamma}^H = \frac{c_W s_W}{c_W^2 - s_W^2} (\delta Z_Z^H - \delta Z_\gamma^H), \\ \delta Z_Z^H &= \frac{\partial}{\partial k^2} \Sigma_T^{\gamma\gamma}(0) - 2 \frac{c_W^2 - s_W^2}{s_W c_W} \frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2} + 2 \frac{c_W^2 - s_W^2}{s_W^2} \left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2} \right), \\ \delta Z_W^H &= \frac{\partial}{\partial k^2} \Sigma_T^{\gamma\gamma}(0) - 2 \frac{c_W}{s_W} \frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2} + \frac{c_W^2}{s_W^2} \left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Присутствие констант перенормировки массы в перенормировке полей (3.26) увеличивает значение перенормированных “усечённых” BSE и, как следствие, вкладов от этого типа диаграмм в наблюдаемые величины. В РУД константы перенормировки массы появляются, наоборот, в перенормированных электрослабых вершинах. Только в сумме собственные энергии и вершинные функции дают калибровочно-инвариантный набор, и, конечно,

разделение радиационных вкладов (от дополнительных виртуальных частиц) в наблюдаемые величины на части, по отдельности не наблюдаемые, не имеет физического смысла.

Покажем связь перенормированных “усечённых” собственных энергий для обоих подходов: для $\gamma\gamma$ -BSE они не отличаются, $\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma,D}(r) = \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma,H}(r)$, а для γZ -BSE и ZZ -BSE эта связь имеет вид

$$\frac{\hat{\Sigma}_T^{ZZ,D}(r)}{r - m_Z^2} = \frac{\hat{\Sigma}_T^{ZZ,H}(r)}{r - m_Z^2} + c^{ZZ}, \quad \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z,D}(r)}{r} = \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z,H}(r)}{r} + c^{\gamma Z}. \quad (3.27)$$

Константы c^{ij} зависят от выбора параметров СМ. При значениях, которые выбираются в монографии (2.46)–(2.48): $c^{ZZ} \approx 0.041$, $c^{\gamma Z} \approx 0.0205$.

3.2.3 Относительная поправка к асимметрии от BSE

Как и ранее, вводится индекс $C = \text{BSE, Ver, Vox, ...}$, который обозначает конкретный вклад. Пусть индексы γSE , $\gamma Z\text{SE}$ и $Z\text{SE}$ обозначают $\gamma\gamma$ -, γZ - и ZZ - вклады BSE, соответственно. После некоторых упрощений числитель поправки δ_- при $C = Z\text{SE}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma^{Z\text{SE}}|_- &\approx \frac{\pi\alpha^2}{s} D_S^{ZZt} (D^{\gamma t} M_{\text{ev}}^{Z\gamma Z\gamma} - D^{\gamma u} M_{\text{od}}^{Z\gamma Z\gamma})|_- + (t \leftrightarrow u) \approx \\ &\approx -16\pi\alpha^2 v^Z a^Z \frac{s}{m_Z^4} (D^{\gamma t} + D^{\gamma u}) [\hat{\Sigma}_T^{ZZ}(t) + \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(u)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Отсюда находим простое выражение для относительной поправки к асимметрии от вклада $C = Z\text{SE}$:

$$\delta_-^{Z\text{SE}} \approx \frac{\hat{\Sigma}_T^{ZZ}(t) + \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(u)}{2m_Z^2}. \quad (3.29)$$

Численные значения для относительной поправки к асимметрии напрямую зависят от значения функции $\hat{\Sigma}_T^{ZZ}$, которая различна в разных ренормализационных условиях. Так, в ЦКТ (3.15) эксперимента MOLLER получены следующие значения:

$$\delta_-^{Z\text{SE}} = \begin{cases} 0.0309 & \text{для РУХ,} \\ -0.0105 & \text{для РУД.} \end{cases}$$

Полезно проверить, что эти числа находятся в строгом соответствии с полученным ранее соотношением между $\hat{\Sigma}_T^{ZZ}$ в разных ренормализационных условиях (3.27), так

$$\delta_-^{Z\text{SE}}(\text{РУД}) - \delta_A^{Z\text{SE}}(\text{РУХ}) \approx m_Z^{-2} [\hat{\Sigma}_T^{ZZ,D}(t_0) - \hat{\Sigma}_T^{ZZ,H}(t_0)] \approx -c^{ZZ}. \quad (3.30)$$

Действуя по схожему сценарию, получим γZSE -вклад:

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma ZSE}|_- \approx & \frac{\pi\alpha^2}{s} D_S^{\gamma Zt} [D^{\gamma t} (M_{ev}^{\gamma\gamma Z\gamma} + M_{ev}^{Z\gamma\gamma\gamma}) - D^{\gamma u} (M_{od}^{\gamma\gamma Z\gamma} + M_{od}^{Z\gamma\gamma\gamma})] |_- + \\ & + (t \leftrightarrow u) \approx 16\pi\alpha^2 a^Z \frac{s}{m_Z^2} (D^{\gamma t} + D^{\gamma u}) \left[\frac{1}{t} \hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(t) + \frac{1}{u} \hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(u) \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

тогда

$$\delta_-^{\gamma ZSE} \approx -\frac{1}{2v^Z} \left[\frac{1}{t} \hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(t) + \frac{1}{u} \hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(u) \right]. \quad (3.32)$$

Численная оценка для ЦКТ (3.15) эксперимента MOLLER дает

$$\delta_-^{\gamma ZSE} = \begin{cases} -0.6028 & \text{для РУХ,} \\ -0.2909 & \text{для РУД.} \end{cases}$$

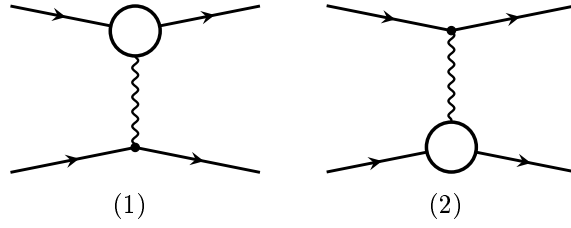
Видно, что относительная поправка к асимметрии напрямую зависит от вкладов перенормированных BSE и чрезвычайно чувствительна к выбору ренормализационных условий. Несмотря на значительный численный масштаб этого вклада, он, как уже отмечалось выше, не может рассматриваться как “основной”. Только в сумме всех вкладов, образующих калибровочно-инвариантный набор, получается результат, имеющий физический смысл (и не зависящий от выбора ренормализационных условий).

Кроме подтверждения вышеприведенных теоретических предсказаний, проверка независимости ЭСП от ренормализационных условий, описанная в этой главе, существенно помогает отладить программу численного анализа как для точного расчёта, так и для приближенного. Заключаем, что подобная проверка может быть весьма полезным элементом расчёта ЭСП, претендующего на точность и надёжность.

3.2.4 Электронные вершинные функции

t -канальные диаграммы, соответствующие вкладам вершинных диаграмм в МР, представлены на рис. 3.5. Для того чтобы рассчитать вклад в сечение МР от электронных вершинных функций, используются формакторные обозначения в духе работы [66], как это было сделано и в предыдущей главе. Заменяя константы связи v^j , a^j на вершинные формфакторы v^{F_j} , a^{F_j} согласно (2.51) в соответствующих местах борновских функций $M_{ev,od}$, получим вершинную часть сечения в виде

$$\sigma^{\text{Ver}} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{l=1}^4 M_l^V + (t \leftrightarrow u), \quad (3.33)$$

Рис. 3.5: Фейнмановские t -канальные диаграммы вершинных вкладов в процесс МР

где

$$M_1^V = D^{\gamma t} [D^{\gamma t} (M_{\text{ev}}^{F\gamma\gamma\gamma} + M_{\text{ev}}^{\gamma\gamma F\gamma}) - D^{\gamma u} (M_{\text{od}}^{F\gamma\gamma\gamma} + M_{\text{od}}^{\gamma\gamma F\gamma})], \quad (3.34)$$

$$M_2^V = D^{\gamma t} [D^{Zt} (M_{\text{ev}}^{F\gamma Z\gamma Z} + M_{\text{ev}}^{\gamma Z F\gamma Z}) - D^{Zu} (M_{\text{od}}^{F\gamma Z\gamma Z} + M_{\text{od}}^{\gamma Z F\gamma Z})],$$

$$M_3^V = D^{Zt} [D^{\gamma t} (M_{\text{ev}}^{F^Z\gamma Z\gamma} + M_{\text{ev}}^{Z\gamma F^Z\gamma}) - D^{\gamma u} (M_{\text{od}}^{F^Z\gamma Z\gamma} + M_{\text{od}}^{Z\gamma F^Z\gamma})],$$

$$M_4^V = D^{Zt} [D^{Zt} (M_{\text{ev}}^{F^Z Z Z Z} + M_{\text{ev}}^{Z Z F^Z Z}) - D^{Zu} (M_{\text{od}}^{F^Z Z Z Z} + M_{\text{od}}^{Z Z F^Z Z})],$$

функции $M_{\text{ev,od}}$ определены выше, а

$$g_V^{F_i,j} = v^{F_i} v^j + a^{F_i} a^j, \quad g_A^{F_i,j} = v^{F_i} a^j + a^{F_i} v^j. \quad (3.35)$$

Представим вершинный вклад как сумму слагаемого, содержащего ИКР в форме с λ – фотонной массой, её регуляризующей, и конечной части, используя тождественное преобразование

$$\sigma^{\text{Ver}} = [\sigma^{\text{Ver}} - \sigma^{\text{Ver}}(\lambda^2 \rightarrow s)] + \sigma^{\text{Ver}}(\lambda^2 \rightarrow s) = \sigma_{\text{IR}}^{\text{Ver}} + \sigma^{\text{Ver}}(\lambda^2 \rightarrow s). \quad (3.36)$$

Конечная часть сечения выглядит как

$$\sigma_{\text{IR}}^{\text{Ver}} = \frac{\alpha^3}{2s} \Lambda_1^{\text{IR}} \sum_{l=1}^4 M_l^0 + (t \leftrightarrow u), \quad (3.37)$$

где

$$\Lambda_1^{\text{IR}} = \Lambda_1 - \Lambda_1(\lambda^2 \rightarrow s) = -2 \ln \frac{s}{\lambda^2} \left[\ln \frac{-t}{m^2} - 1 \right], \quad (3.38)$$

выражения Λ_i соответствуют вкладам треугольных диаграмм с дополнительными частицами и приведены в предыдущей главе, а

$$\begin{aligned} M_1^0 &= D^{\gamma t} (D^{\gamma t} M_{\text{ev}}^{\gamma\gamma\gamma\gamma} - D^{\gamma u} M_{\text{od}}^{\gamma\gamma\gamma\gamma}), \\ M_2^0 &= D^{\gamma t} (D^{Zt} M_{\text{ev}}^{\gamma Z\gamma Z} - D^{Zu} M_{\text{od}}^{\gamma Z\gamma Z}), \\ M_3^0 &= D^{Zt} (D^{\gamma t} M_{\text{ev}}^{Z\gamma Z\gamma} - D^{\gamma u} M_{\text{od}}^{Z\gamma Z\gamma}), \\ M_4^0 &= D^{Zt} (D^{Zt} M_{\text{ev}}^{Z Z Z Z} - D^{Zu} M_{\text{od}}^{Z Z Z Z}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Заметим, что борновское сечение с использованием M_i^0 может быть представлено так:

$$\sigma^0 = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \sum_{l=1}^4 M_l^0 + (t \leftrightarrow u), \quad (3.40)$$

откуда видно, что в инфракрасно-конечной части вершинного сечения борновская структура факторизуется отдельно в t - и u -канальных структурах.

Определим вклад диаграмм Λ_2 -типа как относительную поправку:

$$\delta_-^{\Lambda_2} \approx \frac{\sigma^{\Lambda_2}|_-}{\sigma^0|_-}. \quad (3.41)$$

После уже описанных упрощений числитель имеет вид

$$\sigma^{\Lambda_2}|_- \approx 8\alpha^3 v^Z a^Z s (D^{\gamma t} + D^{\gamma u}) \left[\frac{1}{t} \Lambda_2(t, m_Z) + \frac{1}{u} \Lambda_2(u, m_Z) \right], \quad (3.42)$$

тогда относительная поправка пропорциональна Λ_2 :

$$\delta_-^{\Lambda_2} \approx -\frac{\alpha m_Z^2}{4\pi} \left[\frac{1}{t} \Lambda_2(t, m_Z) + \frac{1}{u} \Lambda_2(u, m_Z) \right]. \quad (3.43)$$

Полученная формула показывает, что в LE-режиме исчезает зависимость от функций $\Lambda_2(r, m_W)$, они подавлены пропагаторной структурой D^{Zr} .

Рассчитаем функцию Λ_2 в LE-режиме в ультрарелятивистском приближении. Следовательно, нас интересует асимптотика при $\omega \rightarrow -\infty$, что соответствует $k^2 < 0$, $-k^2 \ll M^2$. Напомним, что для ЦКТ MOLLER (3.15) отношение параметров Λ_2 такое:

$$-k^2/M^2 = -t_0/m_Z^2 \approx 6.8 \cdot 10^{-7}.$$

Стартуем с формулы из обзора [66] (стр. 747):

$$\Lambda_2(k^2, M) = -\frac{5}{2} + \ln \omega + 2(1 + \omega)^2 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{J(\omega)}{1 + \omega} \right),$$

$$J(\omega) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \ln[\omega(1 - y) - y^2 x(1 - x) - i\epsilon],$$

где $\omega = M^2/k^2$, M – масса дополнительного бозона (Z или W) в треугольной диаграмме, а k – 4-импульс промежуточного бозона, выходящего из вершины.

Вычисление проводим по оригинальной схеме. Сначала введём замену $\alpha = -\frac{1}{\omega}$, которая удобна тем, что $\alpha \rightarrow +0$. Предварительно заметим, что интегралы

$$J_1(\alpha) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \ln[1 - y + \alpha y^2 x(1 - x)],$$

$$I(\alpha) = \int_0^1 dx x(1 - x) \int_0^1 dy \frac{y^3}{1 - y + \alpha y^2 x(1 - x)},$$

связаны дифференциальным соотношением

$$\frac{dJ_1(\alpha)}{d\alpha} = I(\alpha). \quad (3.44)$$

Вычислим $I(\alpha)$, для этого сначала снимем интеграл по y , вводя замену

$$\gamma = 1/\beta, \quad \beta = \alpha x(1 - x).$$

Заметим, что $\beta \rightarrow +0$ в каждой точке области интегрирования: и при $x \rightarrow 0$, и при $x \rightarrow 1$. Сначала вычисляем интеграл по переменной y :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{y^3}{1 - y + \alpha y^2 x(1 - x)} dy = \\ & = \gamma \left(\frac{1}{2} + \gamma + \frac{\gamma}{2s_\beta} [(\gamma - 3) \ln \frac{1 + s_\beta}{1 - s_\beta} + s_\beta(\gamma - 1) \ln \beta] \right) = \\ & = -\frac{11}{6} - \ln \beta - \left(\frac{1}{12} + \ln \beta \right) \beta + \mathcal{O}(\beta^2), \end{aligned}$$

где $s_\beta = \sqrt{1 - 4\beta}$. В последней формуле было использовано разложение в ряд, его лидирующие слагаемые интегрируются без проблем. В результате получим

$$I(\alpha) \approx -\frac{1}{6} \left(\ln \alpha + \frac{1}{6} \right).$$

Решая дифференциальное уравнение (3.44), получим асимптотическое выражение для J_1 в LE-режиме:

$$J_1(\alpha) \approx -\frac{\alpha}{6} \left(\ln \alpha - \frac{5}{6} \right) - \frac{3}{4}.$$

Далее без труда находим

$$J(\omega) = \ln \sqrt{-\omega} + J_1(\alpha).$$

Наконец, при малых k^2/M^2 результат для Λ_2 выглядит так [ср. с формулой (2.56)]:

$$\Lambda_2(k^2, M) = \frac{1}{3\omega} \left(2 \ln(-\omega) + \frac{11}{3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \quad (3.45)$$

Используя его, получим

$$\delta_-^{\Lambda_2} \approx \frac{\alpha}{6\pi} \left(\ln \frac{tu}{m_Z^4} - \frac{11}{3} \right). \quad (3.46)$$

Численное значение $\delta_-^{\Lambda_2}(\text{РУХ, LE}) \approx -0.0125$ находится в точном соответствии с непосредственным расчётом без упрощений.

Λ_3 -вклад рассчитывается сходным образом; результат для соответствующей относительной поправки выглядит так:

$$\delta_-^{\Lambda_3} \approx -\frac{3\alpha m_Z^2}{32\pi s_W^2 v^2 a^2} \left[\frac{1}{t} \Lambda_3(t, m_W) + \frac{1}{u} \Lambda_3(u, m_W) \right]. \quad (3.47)$$

При РУХ и после упрощений функция Λ_3 имеет вид [ср. с формулой (2.57)]:

$$\Lambda_3(t, m_W) = -\frac{5t}{27m_W^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t}{m_W^2}\right), \quad (3.48)$$

что приводит к выражению для относительной поправки

$$\delta_-^{\Lambda_3} \approx \frac{\alpha}{\pi} \frac{5}{9(1-4s_W^2)}, \quad (3.49)$$

которое в ЦКТ MOLLER дает $\delta_-^{\Lambda_3}(\text{РУХ, LE}) \approx 0.0118$.

3.2.5 Двухбозонный обмен

t -канальные диаграммы прямого и перекрестного бокса для МР изображены на рис. 3.6.

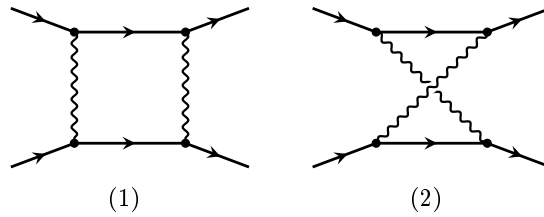


Рис. 3.6: t -канальные диаграммы боксов в МР. Волнистой линией обозначены фотон, Z - или W -бозон, в зависимости от конфигурации амплитуды

Используя тождественное преобразование, разобьем сечение двухбозонного обмена на две части:

$$\sigma^{\text{Box}} = [\sigma^{\text{Box}} - \sigma^{\text{Box}}(\lambda^2 \rightarrow s)] + \sigma^{\text{Box}}(\lambda^2 \rightarrow s) = \sigma_{\text{IR}}^{\text{Box}} + \sigma_{\text{F}}^{\text{Box}}. \quad (3.50)$$

Первое слагаемое сечения, содержащее ИКР, $\sigma_{\text{IR}}^{\text{Box}}$, выглядит как сумма двух членов:

$$\sigma_{\text{IR}}^{\gamma\gamma\text{-box}} = \frac{\alpha^3}{s} l_{su} \ln \frac{s}{\lambda^2} \sum_{l=1}^2 M_l^0 + (t \leftrightarrow u), \quad (3.51)$$

$$\sigma_{\text{IR}}^{\gamma Z\text{-box}} = \frac{\alpha^3}{s} l_{su} \ln \frac{s}{\lambda^2} \sum_{l=3}^4 M_l^0 + (t \leftrightarrow u). \quad (3.52)$$

Суммируя все инфракрасно расходящиеся слагаемые V -вклада, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{IR}}^{\text{Ver}} + \sigma_{\text{IR}}^{\text{Box}} &= \frac{\alpha^3}{2s} (\Lambda_1^{\text{IR}} + 2l_{su} \ln \frac{s}{\lambda^2}) \sum_{l=1}^4 M_l^0 + (t \leftrightarrow u) = \\ &= -\frac{\alpha^3}{s} \ln \frac{s}{\lambda^2} \left[\ln \frac{tu}{m^2 s} - 1 \right] \sum_{l=1}^4 M_l^0 + (t \leftrightarrow u) = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{s}{\lambda^2} \left[\ln \frac{tu}{m^2 s} - 1 \right] \sigma^0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Подробный расчёт инфракрасно-конечной части двухбозонного обмена для t -канала ($\gamma\gamma$ -бокс в УРП без предположений о масштабе энергии, а остальные в режимах LE [148] и HE [147]) приведен в предыдущей главе. Выпишем ИР-конечный результат для “боксовского” вклада в сечение МР:

$$\sigma_{\text{F}}^{\text{Box}} = -\frac{\alpha^3}{s} \left(\frac{l_{su}^2 + \pi^2}{2} \sum_{l=1}^4 M_l^0 + \sum_{(ij)=1}^4 \sum_{k=\gamma, Z} B_{(ij)}^k \right) + (t \leftrightarrow u), \quad (3.54)$$

где двойной индекс (ij) принимает значения:

$$(ij) = \{1, 2, 3, 4\} = \{\gamma\gamma, \gamma Z, ZZ, WW\}, \quad (3.55)$$

а величины $B_{(ij)}^k$ в LE-режиме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
B_{(\gamma\gamma)}^k &= D^{kt} \lambda_-^{\gamma k} \delta_{\gamma\gamma}^{(1)} + (D^{kt} + D^{ku}) \lambda_+^{\gamma k} \delta_{\gamma\gamma}^{(2)}, \\
B_{(\gamma Z)}^k &= D^{kt} \lambda_-^{Zk} \delta_{\gamma Z}^{(1)} + (D^{kt} + D^{ku}) \lambda_+^{Zk} \delta_{\gamma Z}^{(2)}, \\
B_{(ZZ)}^k &= D^{kt} \lambda_-^{ZZ,k} \delta_{ZZ}^{(1)} + (D^{kt} + D^{ku}) \lambda_+^{ZZ,k} \delta_{ZZ}^{(2)}, \\
B_{(WW)}^k &= D^{kt} \lambda_-^{WW,k} \delta_{WW}^{(1)} + (D^{kt} + D^{ku}) \lambda_+^{WW,k} \delta_{WW}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Здесь применяется сокращение для λ_{\pm}^{ij} (3.6). Комбинации константы связи в выражениях для двух массивных бозонов уже встречались [см. (2.26)]:

$$v^{ZZ} = (v^Z)^2 + (a^Z)^2, \quad a^{ZZ} = 2v^Z a^Z, \quad v^{WW} = a^{WW} = \frac{1}{4s_W^2}.$$

Приведем явный вид величин $\delta_{ij}^{(1),(2)}$ из (3.56). Чисто электромагнитная часть рассчитывается стандартным образом, см., например, работу [99]. Естественно, t -канальные выражения из этой части в точности совпадают с полученными ранее (см., например, [118]):

$$\begin{aligned}
\delta_{\gamma\gamma}^{(1)} &= l_{st}^2 \frac{s^2 + u^2}{2t} - l_{st} u - (l_{tu}^2 + \pi^2) \frac{u^2}{t}, \\
\delta_{\gamma\gamma}^{(2)} &= l_{st}^2 \frac{s^2}{t} + l_{ut} s - (l_{tu}^2 + \pi^2) \frac{s^2 + u^2}{2t}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Компактные выражения для остальных боксов в LE-режиме были получены с применением описанной в предыдущей главе техники. γZ -боксы выглядят так:

$$\delta_{\gamma Z}^{(1)} = 8u^2(4I^{\gamma Z} - \hat{I}^{\gamma Z}), \quad \delta_{\gamma Z}^{(2)} = 8s^2(I^{\gamma Z} - 4\hat{I}^{\gamma Z}), \tag{3.58}$$

интеграл $I^{\gamma Z}$ соответствует формуле (2.108), а “шляпка” означает кроссинговую замену $t \leftrightarrow u$. Наконец, асимптотические выражения для “тяжелых” боксов имеют вид

$$\delta_{ZZ}^{(1)} = \frac{3u^2}{2m_Z^2}, \quad \delta_{ZZ}^{(2)} = -\frac{3s^2}{2m_Z^2}, \quad \delta_{WW}^{(1)} = \frac{2u^2}{m_W^2}, \quad \delta_{WW}^{(2)} = \frac{s^2}{2m_W^2}.$$

Сравнивая численно результат для полной поправки, приведенный здесь, с результатом работ [197], [269], получаем неплохое согласие: 3.5% в этом

расчёте против 4%, которые приводятся в работе [197] (были взяты одинаковые электрослабые параметры, соответствующие [197]). Численный расчёт показывает, что полученные приближенные выражения обеспечивают хорошую точность ЭСП к асимметрии во всей области $\sqrt{s} < 50$ ГэВ, причем точность приближенного расчёта улучшается с уменьшением энергии. Напротив, расчёт боксов с применением систем компьютерной алгебры FeynArts и FormCalc [206] в области $\sqrt{s} < 1$ ГэВ затруднен в связи с численной нестабильностью. В ЦКТ эксперимента MOLLER результаты обоих расчётов (ЕС и АС) хорошо согласованы с расхождением меньше $\sim 0.01\%$.

Техника интегрирования, которая была приведена в предыдущем разделе, бывает весьма полезна и в других ситуациях, например, для расчёта вклада в мёллеровское сечение от ZZ' -боксов [203], как простейшего проявления Новой физики. Предположим, что существует дополнительный нейтральный бозон (или Z' -бозон) с обычной $V - A$ структурой взаимодействия с фермионами, векторной (аксиальной) константами связи $v^{Z'}(a^{Z'})$ и массой $m_{Z'}$. Также предположим, что его масса гораздо больше массы Z -бозона: $m_{Z'} \gg m_Z$. Сечение от такого вклада в LE-режиме имеет вид

$$\sigma^{ZZ'-\text{box}} = \frac{3\alpha^3}{sm_Z^2} \ln \frac{m_Z^2}{m_{Z'}^2} \sum_{k=\gamma, Z} \left[\lambda_-^{Bk} (D^{kt}u^2 + D^{ku}t^2) - 2\lambda_+^{Bk} s^2 (D^{kt} + D^{ku}) \right],$$

где комбинации констант связи выглядят так:

$$v^B = v^Z v^{Z'} + a^Z a^{Z'}, \quad a^B = v^Z a^{Z'} + v^{Z'} a^Z.$$

Перейдем к получению асимптотической оценки инфракрасно конечного вклада двухбозонного обмена в HE-режиме [235], [147] (IR-часть будет та же, что в LE-режиме). Как и ранее, этот вклад – сумма четырех слагаемых, смысл которых легко понять по верхним индексам. Каждое из них, в свою очередь, представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\sigma_F^{(ij)} = \sigma_1^{(ij)} + \sigma_2^{(ij)}. \quad (3.59)$$

Проводя разбиение с помощью тождественного преобразования в рамках асимптотического подхода (изложен в предыдущей главе), получим первое слагаемое в (3.59) для ZZ -боксов в виде

$$\sigma_1^{ZZ} = \frac{\alpha^3}{s} D^{Zt} \Delta L \sum_{k=\gamma, Z} \left[D^{kt} (s^2 \lambda_+^{ZZ,k} + u^2 \lambda_-^{ZZ,k}) + D^{ku} s^2 \lambda_+^{ZZ,k} \right] + (t \leftrightarrow u). \quad (3.60)$$

Сечение, описываемое формулой (3.60), пропорционально фактору разности вкладов прямой и перекрестной диаграммы $\Delta L = L_Z(s) - L_Z(u)$, где

$$L_Z(r) = -2 \operatorname{Li}_2 \left(1 + \frac{r}{m_Z^2} \right) + \frac{\pi^2}{3}. \quad (3.61)$$

Заметим, что форма записи через дилогарифм Спенса предпочтительна (она же была использована и в предыдущей главе), поскольку в ней сохраняется симметрия, позволяющая легко контролировать правильность расчёта (существенным является то, что аргументы дилогарифма Спенса в (3.60) имеют разный знак: $u < 0, s > 0$). Упростим разность $L_Z(s) - L_Z(u)$, используя соотношения (6.2) и пренебрегая, где это возможно, массой Z -бозона (в режиме HE $m_Z^2 \ll |r|$), в результате получим:

$$L_Z(s) - L_Z(u) \approx \ln^2 \frac{s}{m_Z^2} - \ln^2 \frac{-u}{m_Z^2} - \pi^2 = \ln \frac{s}{-u} \ln \frac{-su}{m_Z^4} - \pi^2. \quad (3.62)$$

В такой записи хорошо видно, что разность двойных SL [136] даёт всего первую степень логарифма отношения $|r|/m_Z^2$. Понятно, что из-за этого сокращения в HE-режиме и при не очень малых углах вклад двухбозонных диаграмм с нейтральными бозонами будет невелик по сравнению с вкладом боксов с двумя (заряженными) W -бозонами. Для последних одна из диаграмм (прямая) запрещена законом сохранения электрического заряда, следовательно, разность (3.62) отсутствует и двойные SL “выживают”. Соответствующая часть сечения для WW -боксов имеет вид:

$$\sigma_1^{WW} = -\frac{\alpha^3}{s} D^{Wt} L_W(u) \times \sum_{k=\gamma, Z} \left[D^{kt} \left(s^2 \lambda_+^{WW,k} + u^2 \lambda_-^{WW,k} \right) + D^{ku} s^2 \lambda_+^{WW,k} \right] + (t \leftrightarrow u). \quad (3.63)$$

Анализируя формулу (3.63), можно определить знак этого вклада в сечение (он будет отрицательный в интересующей нас кинематической области, так как $L_W(u) > 0, s > -u, -t$) и его поведение (будет существенное падение с ростом энергии \sqrt{s}), в этом точно убедимся ниже в разделе, посвящённом численному анализу.

Оценим примерно, во сколько раз вклад WW -боксов больше, чем ZZ . Как выяснилось, существуют по крайней мере две причины, по которым WW -боксы доминируют. О первой было уже сказано – это разные логарифмические факторы в сечениях: так, отношение их в точке $\sqrt{s} = 1$ ТэВ и

$\theta = 90^\circ$ равно примерно -3.07 , при $\sqrt{s} = 2$ ТэВ это число уже -4.07 . Другая причина состоит в том, что ZZ -боксы сильно подавлены своими константами связи. Так, например для $\theta = 90^\circ$ и $p_B = p_T = 0$ отношение сечений интерференции боксовских WW - и ZZ -диаграмм с борновской диаграммой фотонного обмена равно

$$\frac{\sigma_1^{WW \times \gamma}}{\sigma_1^{ZZ \times \gamma}} \approx \frac{9\lambda_{1B}^{WW, \gamma} \lambda_{1T}^{WW, \gamma} + 7\lambda_{2B}^{WW, \gamma} \lambda_{2T}^{WW, \gamma}}{9\lambda_{1B}^{ZZ, \gamma} \lambda_{1T}^{ZZ, \gamma} + 7\lambda_{2B}^{ZZ, \gamma} \lambda_{2T}^{ZZ, \gamma}} = \frac{9v^{WW^2} + 7a^{WW^2}}{9v^{ZZ^2} + 7a^{ZZ^2}} \approx 16.19.$$

Часть сечений, соответствующую γZ - (и $Z\gamma$ -) боксам и содержащую одиночные SL, получим из формулы (3.60) заменой $ZZ \rightarrow \gamma Z$.

Теперь приведем части сечений, отмеченные индексами "2" (они также получены в рамках асимптотического подхода [235]). Общая формула для сечений выглядит единообразно для всех двухбозонных диаграмм:

$$\sigma_2^{(ij)} = -\frac{\alpha^3}{s} \sum_{k=\gamma, Z} \left[D^{kt} \lambda_{-ij, k}^{(1)} \delta_{ij}^{(1)} + (D^{kt} + D^{kt}) \lambda_{+ij, k}^{(2)} \delta_{ij}^{(2)} \right] + (t \leftrightarrow u), \quad (3.64)$$

а функции $\delta_{ij}^{(1),(2)}$, независимые от бозонных масс, имеют вид:

$$\delta_{\gamma Z}^{(1),(2)} = \delta_{Z\gamma}^{(1),(2)} = \delta_{ZZ}^{(1),(2)} = \delta_{\gamma\gamma}^{(1),(2)}, \quad (3.65)$$

$$\delta_{WW}^{(1)} = -(l_{ut}^2 + \pi^2) \frac{u^2}{t}, \quad \delta_{WW}^{(2)} = -(l_{ut}^2 + \pi^2) \frac{s^2 + u^2}{2t} + l_{ut}s.$$

Выражения $\delta_{\gamma\gamma}^{(1),(2)}$ совпадают с приведенными выше (3.58).

3.3 Тормозное излучение в мёллеровском рассеянии

Рассмотрим диаграммы с излучением реального фотона (рис. 3.7).

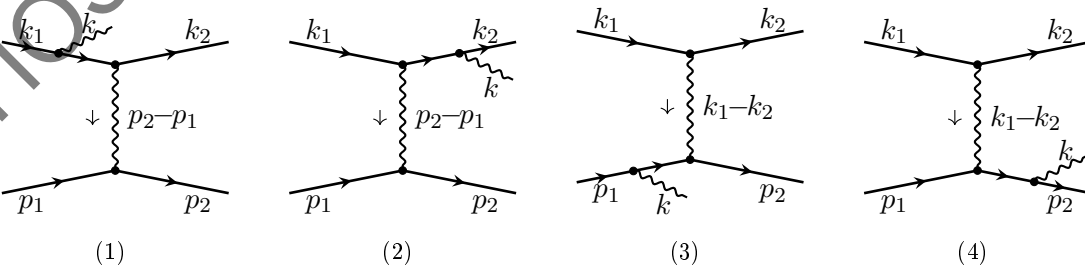


Рис. 3.7: t -канальные фейнмановские диаграммы процесса МР с излучением тормозного фотона с 4-импульсом k . Внутренней волнистой линией обозначен бозон γ или Z

Сечение строится так же, как в предыдущей главе, по формуле (2.135) с фазовым объёмом трёхчастичного конечного состояния (2.136). В МР автором применялись три формы преобразованного фазового объёма, в зависимости от цели, которая преследовалась.

В работе [146] (в рамках ковариантного метода сокращения ИКР [107]–[110]) применялась запись

$$\sigma^R = \frac{\alpha^3}{4s} \int_0^{v^{\text{cut}}} \frac{s-v}{2s} dv \sum_{i,j=\gamma,Z} I[M_R^{ij}], \quad (3.66)$$

где v^{cut} – граница области на диаграмме Чу – Лоу (рис. 3.8, см. оригинальную работу [270] и учебник [20]), а интеграл по фазовому пространству тормозного фотона с 4-импульсом k задаётся выражением:

$$I[M_R^{ij}] = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^3k}{k_0} \delta((k_1 + p_1 - k_2 - k)^2 - m^2) M_R^{ij}. \quad (3.67)$$

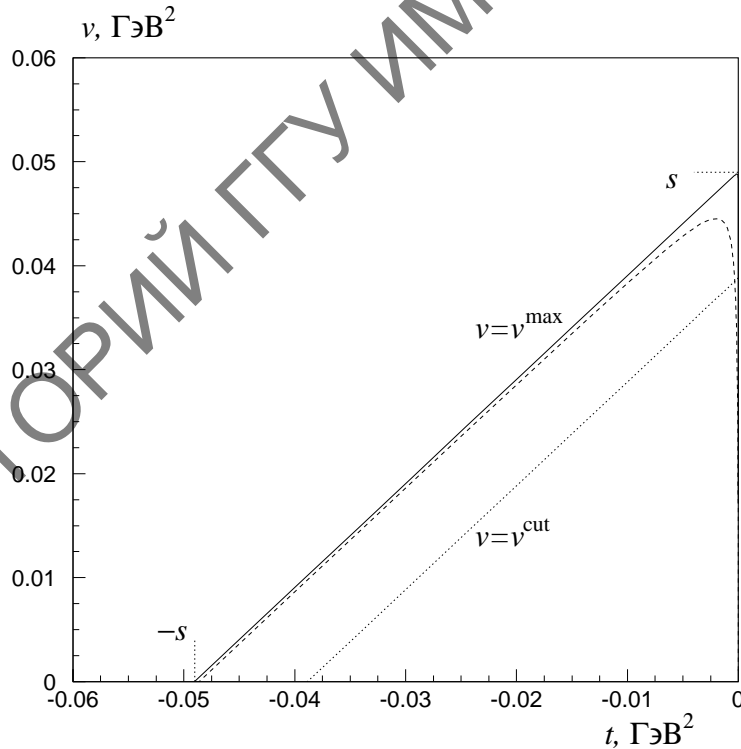


Рис. 3.8: Диаграмма Чу–Лоу при $s \approx 0.05 \text{ ГэВ}^2$. Масса электрона реальная (сплошная линия) и искусственно (в целях иллюстрации) завышенная в 20 раз (штриховая линия). Точечная линия соответствует v^{max} в условиях E-158

Методом (3.66) было удобно учитывать вклад жёсткого ГИ в эксперименте E-158, где точно определялось значение v^{cut} (через минимально возможную энергию детектирования электрона – 4 ГэВ в лабораторной системе). Расчёт, проведенный в работе [146], обеспечивает хорошую скорость счёта, но связан с громоздкими вычислениями разнообразных по структуре интегралов (в [146] были сделаны некоторые упрощения, работающие в кинематике E-158, так что финальный результат не подходит для произвольных энергий и требований к детектированию конечных электронов). Этой же формой фазового объёма автор пользовался для оценки ЭСП при энергиях ИЛС в [147] и оценки ЭСП в лидирующем логарифмическом приближении [148] для энергий MOLLER (но без детального учёта характеристик его детектора).

Второй вариант (M -метод, он использовался в работе [263] для учёта ЭСП в условиях точного соответствия детектору MOLLER) выглядит так:

$$\sigma^R = \frac{\alpha^3}{8s} \sum_{i,j=\gamma,Z} \int dv dz_1 dv_1 \frac{1}{\pi \sqrt{-\Delta_4}} \frac{s-v}{s} M_R^{ij} \theta_R, \quad (3.68)$$

где интегрирование осуществляется по трём радиационным инвариантам, а Δ_4 – определитель Грама [20], составленный из скалярных произведений 4-импульсов частиц в исследуемой реакции $2 \rightarrow 3$. Как уже говорилось в предыдущей главе, несмотря на простоту для записи и программирования интегралы с этим видом фазового объёма [см. также (2.145)] медленно сходятся и требуются значительные усилия в упрощении. Требуется факторизация пропагаторных структур вида:

$$\begin{aligned} D_1^{ij} &= D^{it_1} D^{jt_1}, & D_2^{ij} &= D^{it_1} D^{jt} + D^{it} D^{jt_1}, \\ D_3^{ij} &= D^{it} D^{jt}, & D_4^{ij} &= D^{it_1} D^{ju} + D^{iu} D^{jt_1}, \\ D_5^{ij} &= D^{it_1} D^{ju_1} + D^{iu_1} D^{jt_1}, & D_6^{ij} &= D^{it} D^{ju} + D^{iu} D^{jt}, \\ D_7^{ij} &= D^{it} D^{ju_1} + D^{iu_1} D^{jt}, & D_8^{ij} &= D^{iu} D^{ju}, \\ D_9^{ij} &= D^{iu} D^{ju_1} + D^{iu_1} D^{ju}, & D_{10}^{ij} &= D^{iu_1} D^{ju_1} \end{aligned} \quad (3.69)$$

и выделение комбинаций констант связи

$$\sum_{i,j=\gamma,Z} \lambda_{\pm}^{i,j} D_k^{ij}, \quad k = \overline{1,10}. \quad (3.70)$$

Кроме этого крайне продуктивно использование относительных поправок δ_{\pm}^C (2.39): так, ясно, что для того, чтобы определить δ_{+}^C , нужно знать фак-

тор x_k^\pm при нулевых поляризациях. Для этого достаточно предварительно вычислить:

$$\lambda_\pm^{i,j}(p_B = p_T = 0) = (g_V^{i,j})^2 \pm (g_A^{i,j})^2. \quad (3.71)$$

Аналогично, для определения относительной поправки δ_-^C вычисляем для фактора x_k^\pm разность $LL - RR$:

$$\begin{aligned} \lambda_+^{i,j}(p_B = p_T = -1) - \lambda_+^{i,j}(p_B = p_T = 1) &= 8g_V^{i,j}g_A^{i,j}, \\ \lambda_-^{i,j}(p_B = p_T = -1) - \lambda_-^{i,j}(p_B = p_T = 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Третьим и, как автор полагает, наиболее продуктивным является метод, который приводит к форме сечения (2.157), он подробно разобран в предыдущей главе. Для МР в условиях детектора MOLLER этот метод был разработан и описан автором в работе [271].

Квадраты матричных элементов, t -канальных, соответствующих диаграммам рис. 3.7, и u -канальных (которые можно получить заменой $k_2 \leftrightarrow p_2$), выглядят так:

$$M_R^{ij} = (M_R^{it} - M_R^{iu})(M_R^{jt} - M_R^{ju})^+, \quad (3.73)$$

где знак минус обусловлен идентичностью конечных электронов, а индексы $t(u)$ обозначают $t(u)$ -канальные диаграммы. Упрощая (3.73), получим

$$M_R^{it}M_R^{jt+} = \sum_{k=1,4} V_k^{ij}, \quad M_R^{it}M_R^{ju+} = \sum_{k=5,8} V_k^{ij}, \quad (3.74)$$

$$M_R^{iu}M_R^{ju+} = M_R^{it}M_R^{jt+}|_{k_2 \leftrightarrow p_2}, \quad M_R^{iu}M_R^{jt+} = M_R^{it}M_R^{ju+}|_{k_2 \leftrightarrow p_2}. \quad (3.75)$$

Наконец, выражения V_k^{ij} , через которые записываются квадраты амплитуд, выглядят так:

$$\begin{aligned} V_1^{ij} &= -\text{Sp}[G_1^{\mu\alpha} \rho^{ij}(k_1) G_1^{\nu\alpha T} \Lambda(k_2)] \text{Sp}[\gamma_\mu \rho^{ij}(p_1) \gamma_\nu \Lambda(p_2)] D^{it_1} D^{jt_1}, \\ V_2^{ij} &= -\text{Sp}[G_1^{\mu\alpha} \rho^{ij}(k_1) \gamma_\nu \Lambda(k_2)] \text{Sp}[\gamma_\mu \rho^{ij}(p_1) G_2^{\nu\alpha T} \Lambda(p_2)] D^{it_1} D^{jt}, \\ V_3^{ij} &= -\text{Sp}[G_2^{\mu\alpha} \rho^{ij}(p_1) \gamma_\nu \Lambda(p_2)] \text{Sp}[\gamma_\mu \rho^{ij}(k_1) G_1^{\nu\alpha T} \Lambda(k_2)] D^{it} D^{jt_1}, \\ V_4^{ij} &= -\text{Sp}[G_2^{\mu\alpha} \rho^{ij}(p_1) G_2^{\nu\alpha T} \Lambda(p_2)] \text{Sp}[\gamma_\mu \rho^{ij}(k_1) \gamma_\nu \Lambda(k_2)] D^{it} D^{jt}, \\ V_5^{ij} &= -\text{Sp}[G_1^{\mu\alpha} \rho^{ij}(k_1) G_3^{\nu\alpha} \Lambda(p_2) \gamma_\mu \rho^{ij}(p_1) \gamma_\nu \Lambda(k_2)] D^{it_1} D^{ju}, \\ V_6^{ij} &= -\text{Sp}[G_1^{\mu\alpha} \rho^{ij}(k_1) \gamma_\nu \Lambda(p_2) \gamma_\mu \rho^{ij}(p_1) G_4^{\nu\alpha} \Lambda(k_2)] D^{it_1} D^{ju_1}, \\ V_7^{ij} &= -\text{Sp}[\gamma_\mu \rho^{ij}(k_1) G_3^{\nu\alpha} \Lambda(p_2) G_2^{\mu\alpha} \rho^{ij}(p_1) \gamma_\nu \Lambda(k_2)] D^{it} D^{ju}, \\ V_8^{ij} &= -\text{Sp}[\gamma_\mu \rho^{ij}(k_1) \gamma_\nu \Lambda(p_2) G_2^{\mu\alpha} \rho^{ij}(p_1) G_4^{\nu\alpha} \Lambda(k_2)] D^{it} D^{ju_1}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Традиционно использовались радиационные инварианты (все они обращаются в нуль при $k \rightarrow 0$):

$$z_1 = 2kk_1, \quad z = 2kk_2, \quad v_1 = 2kp_1, \quad v = 2kp_2 = s + u + t - 4m^2, \quad (3.77)$$

и инварианты для описания пропагаторных структур:

$$s_1 = (k_2 + p_2)^2, \quad t_1 = (p_1 - p_2)^2, \quad u_1 = (k_1 - p_2)^2. \quad (3.78)$$

Также применялось введенное выше обозначение для комбинации гамма-матриц и матрицы плотности $\rho(p)$: $\rho^{ij}(p) = \Gamma^i \rho(p) \Gamma^j$, проекционный оператор $\Lambda(p) = \hat{p} + m$, и матрицы

$$G_1^{\mu\alpha} = \gamma^\mu \frac{2k_1^\alpha - \hat{k}\gamma^\alpha}{-z_1} + \frac{2k_2^\alpha + \gamma^\alpha \hat{k}}{z} \gamma^\mu, \quad G_2^{\mu\alpha} = \gamma^\mu \frac{2p_1^\alpha - \hat{k}\gamma^\alpha}{-v_1} + \frac{2p_2^\alpha + \gamma^\alpha \hat{k}}{v} \gamma^\mu, \\ G_3^{\nu\alpha} = \frac{2k_1^\alpha - \gamma^\alpha \hat{k}}{-z_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{2p_2^\alpha + \hat{k}\gamma^\alpha}{v}, \quad G_4^{\nu\alpha} = \frac{2p_1^\alpha - \gamma^\alpha \hat{k}}{-v_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{2k_2^\alpha + \hat{k}\gamma^\alpha}{z}.$$

3.3.1 Мягкие фотоны и сокращение ИКР

Применяем уже известный приём – разбиваем сечение ТИ на две части (мягкую и жесткую):

$$\sigma^R = \sigma_{\text{IR}}^R + \sigma_H^R, \quad (3.79)$$

посредством разделения области интегрирования на две: $k_0 < \omega$ и $k_0 > \omega$, где k_0 – энергия тормозного фотона в с.ц.м. начальных электронов, а ω – параметр, разделяющий области мягких и жестких фотонов (в этой же системе). Следуя методу работы [272], получаем хорошо известный результат (см. также [145], [199]) для сечения процесса с мягкими фотонами:

$$\sigma_{\text{IR}}^R = \frac{\alpha}{\pi} \left(4 \ln \frac{2\omega}{\lambda} \left[\ln \frac{tu}{m^2 s} - 1 \right] - \left[\ln \frac{s}{m^2} - 1 \right]^2 + 1 - \frac{\pi^2}{3} + l_{ut}^2 \right) \sigma^0. \quad (3.80)$$

Далее, суммируя ИКР-члены V - и R -вкладов [см. формулы (3.53) и (3.80) соответственно], получим результат, свободный от ИКР, но логарифмически зависящий от ω и содержащий двойные СЛ:

$$\sigma^{VS} = \sigma_{\text{IR}}^V + \sigma_{\text{IR}}^R = \frac{\alpha}{\pi} \left(4 \ln \frac{2\omega}{\sqrt{s}} \left[\ln \frac{tu}{m^2 s} - 1 \right] - \left[\ln \frac{s}{m^2} - 1 \right]^2 + 1 - \frac{\pi^2}{3} + l_{ut}^2 \right) \sigma^0.$$

В сумме с Λ_1 -членами из вершинного вклада СЛ сводятся до первой степени. Произойдет это по следующему сценарию:

$$\frac{\alpha}{\pi} \left(\Lambda_1(\lambda^2 \rightarrow s) - \ln^2 \frac{s}{m^2} \right) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln^2 \frac{-t}{m^2} - \ln^2 \frac{s}{m^2} \right) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{-t}{s} \ln \frac{-ts}{m^4}.$$

Расчёт части сечения с излучением жестких фотонов наиболее сложен, систематическое изложение теории его учёта дано в предыдущей главе для процесса Баба, а применение для конкретных условий эксперимента объяснено в конце этой главы.

3.3.2 Ведущее логарифмическое приближение

В этом разделе представим результат для условий детектирования при заданной области энергии тормозного фотона и произвольной энергии начальных электронов, в приближении, представляющем из себя вариант *ведущего логарифмического приближения* (см., например, обзор в работе [273]). Метод ведущего логарифмического приближения позволяет получать быструю оценку ЭСП и делать это с хорошей точностью. Установление согласия численного результата с точным расчётом было проделано в [146] и [147].

Рассмотрим коллинеарную кинематику процесса, вводя переменную η , связанную с радиационными переменными, как это показано в таблице 3.1.

Табл. 3.1: Кинематические соотношения для коллинеарного излучения фотонов в ультрарелятивистском приближении

	z_1 -пик	z -пик	v_1 -пик	v -пик
k	$(1 - \eta)k_1$	$\frac{1-\eta}{\eta}k_2$	$(1 - \eta)p_1$	$\frac{1-\eta}{\eta}p_2$
z_1	$2(1 - \eta)m^2 \rightarrow 0$	$-\frac{1-\eta}{\eta}t$	$(1 - \eta)s$	$(1 - \eta)(s + t)$
z	$-(1 - \eta)t$	$2\frac{1-\eta}{\eta}m^2 \rightarrow 0$	$\frac{1-\eta}{\eta}(\eta s + t)$	$(1 - \eta)s$
v_1	$(1 - \eta)s$	$\frac{1-\eta}{\eta}(\eta s + t)$	$2(1 - \eta)m^2 \rightarrow 0$	$-(1 - \eta)t$
v	$(1 - \eta)(s + t)$	$(1 - \eta)s$	$-\frac{1-\eta}{\eta}t$	$2\frac{1-\eta}{\eta}m^2 \rightarrow 0$
u	$-\eta(s + t)$	$-\eta s - t$	$-s - \frac{t}{\eta}$	$-s - t$
s_1	$\eta \cdot s$	$\eta \cdot s$	$\eta \cdot s$	$\eta \cdot s$
t_1	$\eta \cdot t$	t/η	$\frac{1}{\eta} \cdot t$	$\eta \cdot t$
u_1	u/η	u/η	$\eta \cdot u$	$\eta \cdot u$

Из таблицы можно видеть, что для всех пиков выполняется условие $z + v \approx (1 - \eta)s$. Тогда, с учётом соотношения $k_0 = (v + z)/2\sqrt{s}$ и, в предположении, что в с.ц.м. k_0 изменяется в пределах $k_0 \in [\omega, \Omega]$, имеется возможность заменить переменные интегрирования: $v \rightarrow \eta$. В результате замены область интегрирования по η будет выглядеть так:

$$1 - \frac{2\Omega}{\sqrt{s}} < \eta < 1 - \frac{2\omega}{\sqrt{s}}. \quad (3.81)$$

Интегрируя по фазовому пространству тормозного фотона с учётом соотношений, приведенных в таблице 3.1 (все необходимые для расчёта интегралы имеются в работе [146]), получим жесткую часть сечения ТИ в виде

$$\sigma_H^R = \frac{\alpha^3}{4s} \int_{1-2\Omega/\sqrt{s}}^{1-2\omega/\sqrt{s}} \frac{d\eta}{1-\eta} \frac{s-v}{s} [h_{\text{eve,t}}(\eta) - h_{\text{odd,t}}(\eta)] + (k_2 \leftrightarrow p_2),$$

где

$$\begin{aligned} h_{\text{odd,t}}(\eta) = & \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{od}}^{ijij} \left((\eta(\eta^2 - \eta + 1)\hat{l}_a + \eta^2 L_t - 2\eta^2) D^{it_1} D^{ju}|z_1 + \right. \\ & + (L_t - l_a) D^{it_1} D^{ju}|z + \eta^2 (L_t - 2L_s) D^{it_1} D^{ju_1}|z_1 + \\ & + (2L_u + L_t + \frac{(1-\eta)^2}{\eta} l_a - 2) D^{it_1} D^{ju_1}|z + \\ & + \eta^2 (\hat{l}_a - 2L_s) D^{it} D^{ju}|z_1 + (l_u - 2/\eta) D^{it} D^{ju}|v + \\ & \left. + ((\eta^2 - \eta + 1)l_u - 2\eta) D^{it} D^{ju_1}|v_1 + (2L_u - l_a) D^{it} D^{ju_1}|z \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\text{eve,t}}(\eta) = & (2L_t - 2 + \frac{(1-\eta)^2}{\eta} l_a) \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{ev}}^{ijij}(\eta s, u) D^{it_1} D^{jt_1}|z_1 + \\ & + (2L_t - 2 + \frac{(1-\eta)^2}{\eta} l_a) \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{ev}}^{ijij}(s, u/\eta) D^{it_1} D^{jt_1}|z + \\ & + (\hat{l}_a - 2L_s) \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{ev}}^{ijij}(\eta s, u) (D^{it_1} D^{jt} + D^{it} D^{jt_1})|z_1 + \\ & + (2L_u - l_a) \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{ev}}^{ijij}(s, u/\eta) (D^{it_1} D^{jt} + D^{it} D^{jt_1})|z + \\ & + ((1-\eta)^2 l_u - 2\eta) \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{ev}}^{ijij}(s, u) D^{it} D^{jt}|v_1 + \\ & + 2 \left(\frac{(1-\eta)^2 - \eta}{2-\eta} + \eta l_u \right) \sum_{i,j=\gamma,Z} M_{\text{ev}}^{ijij}(s, u) D^{it} D^{jt}|v. \end{aligned}$$

Присутствующие в этих формулах ранее не встречавшиеся СЛ выглядят так:

$$l_a = \ln \frac{(s-v)^2}{m^2(v+m^2)}, \quad \hat{l}_a = \ln \frac{(s+t)^2}{m^2(v+m^2)}, \quad l_u = \ln \frac{(s+u)^2}{m^2(v+m^2)}. \quad (3.82)$$

Операция $E|_x$ означает расчёт выражения E в приближении x -пика согласно табл. 3.1.

Как видно из вышеприведенных формул, при коллинеарных логарифмах факторизуются так называемые *функции расщепления* (splitting functions), физический смысл (и метод получения) которых прояснён в работах [274]. Покажем это на примере первого слагаемого в $h_{\text{eve,t}}(\eta)$. Так, при $\eta \rightarrow 1$ получаем:

$$2L_t + \frac{(1-\eta)^2}{\eta} \hat{l}_a \rightarrow 2 \ln \frac{-t}{m^2} + \frac{(1-\eta)^2}{\eta} \ln \frac{s}{m^2} \rightarrow \frac{1+\eta^2}{\eta} \ln \frac{-t}{m^2}.$$

Докажем теперь аналитически независимость от ω . Используя сокращённое обозначение (ср. с популярным обозначением Альтарелли и Паризи [50]):

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{(1-x)_+} f(x) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{1-x} [f(x) - f(1)], \quad (3.83)$$

представим жесткую часть сечения в виде

$$\sigma_H^R = \sigma_H^{R,\Omega} + \sigma_H^{R,\omega} = \frac{\alpha^3}{4s} \int_{1-2\frac{\Omega}{\sqrt{s}}}^{1-2\frac{\omega}{\sqrt{s}}} \frac{d\eta}{(1-\eta)_+} h(\eta) + \frac{\alpha^3}{4s} \int_{1-2\frac{\Omega}{\sqrt{s}}}^{1-2\frac{\omega}{\sqrt{s}}} \frac{d\eta}{1-\eta} h(1). \quad (3.84)$$

Очевидно, что первое слагаемое в правой части (3.84) при достаточно малых ω зависит только от Ω (но не от ω), а второе легко рассчитать:

$$\sigma_H^{R,\omega} = \frac{\alpha^3}{4s} h(1) \int_{1-2\frac{\Omega}{\sqrt{s}}}^{1-2\frac{\omega}{\sqrt{s}}} \frac{d\eta}{1-\eta} = \frac{4\alpha}{\pi} \ln \frac{\Omega}{\omega} \left[\ln \frac{tu}{m^2 s} - 1 \right] \sigma^0. \quad (3.85)$$

В результате получаем результат, к которому стремились:

$$\sigma^{VS} + \sigma_H^{R,\omega} = \sigma^{VS}(\omega \rightarrow \Omega), \quad (3.86)$$

то есть доказана независимость от ω суммы всех вкладов ЭСП.

3.4 Численные оценки

Относительная поправка к поляризационной асимметрии определяется, как и раньше, формулой (2.42). Для удобства определим термином “слабая” (используем индекс “weak”) поправку, относящуюся к одному из классов: BSE (включая $\gamma\gamma$ -SE [то есть поляризацию вакуума фотонами], это оправдано, поскольку в $\gamma\gamma$ -SE включаются также W -бозонные петли), вершинный вклад, соответствующий $\Lambda_{2,3}$ (обозначим его индексом HV – heavy vertices), ZZ - и WW -боксы: $\text{weak} = \text{BSE} + \text{HV} + \text{ZZ} + \text{WW}$.

3.4.1 LE-режим

Представим слабую и полную относительные поправки к сечению неполяризованных частиц для $E_{\text{lab}} = 11$ ГэВ и различных углах θ . Под полной поправкой понимается вклад, обусловленный как слабыми, так и КЭД-вкладами; в электромагнитную поправку включаются также мягкие и жесткие реальные фотоны. Для анализа используем возможность варьировать ограничение на максимальную энергию излучаемого фотона $\gamma_1 = E_\gamma/\sqrt{s}$. Исследуем два варианта учёта ТИ:

1. вариант “S” – учитываем только мягкие фотоны, тогда $E_\gamma = \omega$;
2. вариант “S+H” – учитываем как мягкие фотоны, так и жесткие, тогда $E_\gamma = \Omega$, а ω/\sqrt{s} выбирается как малый параметр; впрочем, как показано в (3.86), суммарный результат при разумно малых ω/\sqrt{s} от этого выбора не зависит.

Табл. 3.2: Неполяризованное борновское сечение и относительные слабая и полная поправки к нему при $E_{\text{lab}} = 11$ ГэВ при различных γ_1 ($\gamma_1 = 0.005, 0.01, 0.05$) и θ

$\theta, ^\circ$	$\sigma^0, \text{мбн}$	Weak	S, 0.005	S+H, 0.005	S, 0.01	S+H, 0.01	S, 0.05	S+H, 0.05
40	0.8734	0.0111	-0.2595	-0.2591	-0.2118	-0.2124	-0.1012	-0.1067
50	0.3920	0.0119	-0.2721	-0.2716	-0.2222	-0.2227	-0.1063	-0.1136
60	0.2176	0.0126	-0.2810	-0.2805	-0.2295	-0.2303	-0.1099	-0.1183
70	0.1444	0.0131	-0.2870	-0.2867	-0.2344	-0.2356	-0.1124	-0.1219
80	0.1131	0.0135	-0.2905	-0.2904	-0.2373	-0.2389	-0.1139	-0.1241
90	0.1043	0.0136	-0.2916	-0.2916	-0.2383	-0.2400	-0.1144	-0.1249

Из табл. 3.2 видно, что слабая поправка довольно мала (в основном это вклад от $\gamma\gamma$ -SE). Разница между вкладами “S” и “S+H” невелика, но,

как и следует, растет с увеличением ограничения на фотонную энергию, то есть с расширением области интегрирования. Также из табл. 3.2 можно заключить, что неполяризационное сечение падает с уменьшением γ_1 .

Приступим к исследованию вкладов ЭСП в наблюдаемую асимметрию, начнем со слабой поправки. Результаты расчёта разными методами приведены в табл. 3.3.

Табл. 3.3: Борновская асимметрия A_1^0 и структура относительной слабой поправки к ней при $E_{\text{lab}} = 11$ ГэВ и различных θ

$\theta, ^\circ$	20	30	40	50	60	70	80	90
$A_1^0 \times 10^9$	6.63	15.19	27.45	43.05	60.69	77.68	90.28	94.97
$\gamma\gamma$ -SE, РУД	-0.0043	-0.0049	-0.0054	-0.0058	-0.0062	-0.0064	-0.0066	-0.0067
$\gamma\gamma$ -SE, РУХ	-0.0043	-0.0049	-0.0054	-0.0058	-0.0062	-0.0064	-0.0066	-0.0067
γZ -SE, РУД	-0.2919	-0.2916	-0.2914	-0.2912	-0.2911	-0.2910	-0.2909	-0.2909
γZ -SE, РУХ	-0.6051	-0.6043	-0.6042	-0.6038	-0.6034	-0.6031	-0.6028	-0.6028
ZZ -SE, РУД	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105
ZZ -SE, РУХ	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309	0.0309
HV, РУД	-0.2946	-0.2633	-0.2727	-0.2703	-0.2714	-0.2712	-0.2711	-0.2710
HV, РУХ	-0.0015	-0.0012	-0.0010	-0.0009	-0.0008	-0.0007	-0.0007	-0.0007
ZZ -бокс, ЕС	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013
ZZ -бокс, АС	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013	-0.0013
WW -бокс, ЕС	0.0239	0.0238	0.0238	0.0239	0.0239	0.0238	0.0238	0.0238
WW -бокс, АС	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238
Weak, РУД, ЕС	-0.5643	-0.5480	-0.5508	-0.5489	-0.5500	-0.5495	-0.5493	-0.5493
Weak, РУХ, АС	-0.5526	-0.5514	-0.5511	-0.5505	-0.5500	-0.5496	-0.5493	-0.5493

Таблица демонстрирует следующие эффекты. Вклад $\gamma\gamma$ -SE мал, расчёт в РУХ и РУД даёт одинаковый результат. Вклады γZ -SE, ZZ -SE, HV большие, в РУХ и РУД различны. $\gamma\gamma$ -бокс отдельно не рассматриваем, так он инфраскрасно расходится. Боксовские вклады ZZ и WW довольно значительны, расчёты в разных подходах (ЕС и АС) дают хорошо согласованный результат. Полная слабая поправка (от вкладов, образующих калибровочно инвариантный набор) значительна и даёт замечательно согласованный результат в разных подходах к расчёту и с применением различных ренормализационных условий. Контролируемая точность между разными подходами к расчёту ~ 0.0001 при $\theta = 90^\circ$, но становится немного хуже с уменьшением угла θ из-за начинающей проявлять себя на краю кинематической области численной нестабильности кода для ЕС.

Наконец, табл. 3.4 демонстрирует масштаб и поведение КЭД-поправки к асимметрии в зависимости от параметра γ_1 .

Табл. 3.4: Борновская асимметрия и КЭД-поправки к ней при $E_{\text{lab}} = 11$ ГэВ, различных γ_1 ($\gamma_1 = 0.005, 0.01, 0.05$) и θ

$\theta, ^\circ$	$A_1^0 \times 10^9$	S, 0.005	S+H, 0.005	S, 0.01	S+H, 0.01	S, 0.05	S+H, 0.05
40	27.45	-0.0792	-0.0790	-0.0744	-0.0744	-0.0651	-0.0567
50	43.05	-0.0817	-0.0826	-0.0763	-0.0778	-0.0663	-0.0660
60	60.69	-0.0833	-0.0848	-0.0777	-0.0797	-0.0671	-0.0691
70	77.68	-0.0844	-0.0859	-0.0785	-0.0805	-0.0675	-0.0701
80	90.28	-0.0849	-0.0863	-0.0789	-0.0806	-0.0677	-0.0702
90	94.97	-0.0850	-0.0863	-0.0790	-0.0806	-0.0678	-0.0702

3.4.2 HE-режим

Подходы к расчёту ЭСП при низких энергиях оказываются весьма продуктивными и для расчёта ЭСП в области сверхвысоких энергий, представляющей интерес для исследования эффектов НФ в программе планируемых экспериментов на ILC/CLIC/FCC/CEPC в мёллеровском режиме.

На рис. 3.9 изображена относительная слабая (сплошная кривая) и КЭД (штриховая кривая, при $\gamma_1 = 0.05$) поправки к борновской асимметрии A_1^0 в зависимости от \sqrt{s} при $\theta = 90^\circ$. Рисунок захватывает область LE-режима (выделены точки, соответствующие экспериментам MOLLER и E-158), так и HE-режим.

В области энергий $\sqrt{s} \geq 50$ ГэВ для ЭСП имеются результаты работы Деннера и Поцпорини [145]. Результаты сравнения с ней приведены в табл. 3.5. Чтобы надёжно сравниться, были выбраны значения параметров из [145]. Как видно, получено хорошее согласие.

Табл. 3.5: Сравнение относительной слабой поправки с результатами работы [145]

\sqrt{s} , ГэВ	результат [145]	результат [148], [149]
100	-0.2787	-0.2790
500	-0.3407	-0.3406
2000	-0.9056	-0.9066

Значения δ_A^{weak} при современных параметрах несколько другие, например, при $\sqrt{s} = 500$ ГэВ результат $\delta_A^{\text{weak}} = -0.3614$ [148]. Следует заме-

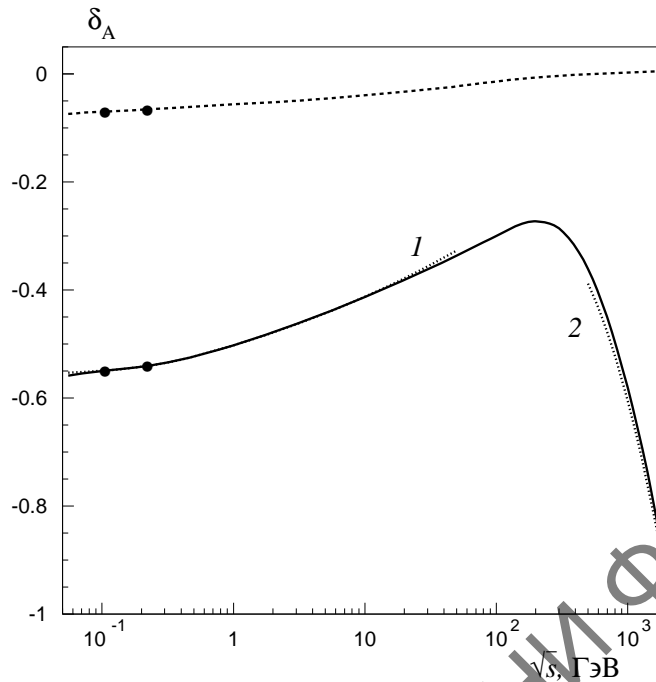


Рис. 3.9: Относительная слабая (сплошная и точечные кривые) и КЭД (штриховая кривая) поправки к A_1^0 в зависимости от \sqrt{s} при $\theta = 90^\circ$. Показаны точки, соответствующие энергии экспериментов MOLLER и E-158

титель, что в работе [145] были использованы РУД, в то время как результат [148] протестирован на независимость от выбранной схемы: так, на рис. 3.9 сплошная кривая соответствует слабой поправке в РУД и ЕС, а точечная кривая, обозначенная цифрой 1, – РУХ и АС (незначительное расхождение на краях обусловлено: слева – численной нестабильностью ЕС, справа – тем, что АС перестает работать в области $\sqrt{s} \geq m_W$). Кроме этого, в области сверхвысоких энергий результат [148] для слабой поправки к асимметрии совпадает с асимптотическим результатом, полученным в работе [147] (соответствует точечной кривой, обозначенной цифрой 2) и изложенным выше. Видно хорошее согласие результатов, которое ухудшается с уменьшением энергии из-за того, что асимптотический результат, полученный в [147], не работает в области $\sqrt{s} \rightarrow m_Z + 0$. Что касается КЭД-поправки, то было также получено полное согласие с результатом [145].

Дадим более подробный численный анализ ЭСП к сечениям и асимметрии при сверхвысоких энергиях. Далее везде используются РУД и точный расчёт ЕС. Как видно из табл. 3.6, полные ЭСП к сечению весьма значительны и резко зависят от экспериментальных ограничений на энергию

тормозного фотона.

Табл. 3.6: Неполяризованное борновское сечение и относительные слабая и полная поправки к нему при $\sqrt{s} = 1$ ТэВ при различных γ_1 и θ

$\theta, ^\circ$	σ^0 , пбн	Weak	S, 0.005	S, 0.01	S, 0.05
20	161.7637	0.0947	-0.7845	-0.6271	-0.2616
30	35.3627	0.0889	-0.8184	-0.6561	-0.2793
40	12.7069	0.0863	-0.8399	-0.6744	-0.2900
50	6.1449	0.0859	-0.8538	-0.6860	-0.2964
60	3.6703	0.0866	-0.8626	-0.6932	-0.2999
70	2.5946	0.0878	-0.8679	-0.6975	-0.3018
80	2.1226	0.0887	-0.8707	-0.6997	-0.3026
90	1.9874	0.0890	-0.8716	-0.7004	-0.3028

Табл. 3.7: Борновская асимметрия A_1^0 , относительные слабая и КЭД-поправки (при трех разных γ_1) к ней при $\sqrt{s} = 1$ ТэВ и различных θ

$\theta, ^\circ$	20	30	40	50	60	70	80	90
A_1^0	0.0758	0.0887	0.0959	0.1012	0.1053	0.1083	0.1102	0.1108
$\gamma\gamma$ -SE	-0.0603	-0.0605	-0.0596	-0.0581	-0.0564	-0.0549	-0.0538	-0.0535
γZ -SE	-0.0122	-0.0131	-0.0178	-0.0230	-0.0274	-0.0307	-0.0327	-0.0334
ZZ -SE	-0.0063	-0.0019	0.0006	0.0022	0.0031	0.0036	0.0039	0.0040
HV	-0.1375	-0.0713	-0.0168	0.0257	0.0572	0.0788	0.0914	0.0955
ZZ -бокс	0.0001	0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0012	0.0013
WW -бокс	-0.3936	-0.5191	-0.6012	-0.6505	-0.6782	-0.6926	-0.6992	-0.7011
Weak	-0.5534	-0.5962	-0.6129	-0.6121	-0.6027	-0.5917	-0.5835	-0.5805
КЭД, 0.005	-0.0001	0.0022	0.0067	0.0134	0.0217	0.0303	0.0370	0.0395
КЭД, 0.01	-0.00004	0.0008	0.0021	0.0035	0.0050	0.0063	0.0071	0.0074
КЭД, 0.05	-0.00001	0.0003	0.0008	0.0013	0.0018	0.0022	0.0025	0.0026

Что касается поправок к асимметрии (табл. 3.7), то роли вкладов в области сверхвысоких энергий меняются по сравнению с областью низких энергий. Так, в рамках РУД, значительными становятся $\gamma\gamma$ -SE и, особенно, WW -бокс, а γZ -SE и ZZ -SE, наоборот, становятся малыми. Вершинный вклад HV остается довольно существенным. Подробный анализ поведения слабых вкладов в асимметрию при энергиях ILC, например, выделение SL от WW -боксов, можно найти в работе [147]. Вклад КЭД-составляющей в асимметрию при высоких энергиях значителен только при очень малых γ_1 .

3.4.3 Реальные условия эксперимента MOLLER

Численные оценки радиационных эффектов в условиях детектора эксперимента MOLLER впервые проделаны в работе [271]. Пользуемся в этом разделе выбором $\gamma_1 = \Omega/\sqrt{s}$, очевидно, что тогда значение γ_1 будет находиться в интервале: $0 < \gamma_1 < \frac{1}{2}$. Прежде всего произведем сравнение результатов трёх расчётов: в мягкофотонном приближении, M -методом и W -методом для относительных поправок δ_{\pm}^C при разных значениях γ_1 . Результаты сравнения приведены в табл. 3.8 для угла $\theta = 70^\circ$.

Табл. 3.8: Сравнение результатов расчётов в мягкофотонном приближении (S), M -методом, W -методом для относительных поправок при $\theta=70^\circ$ и различных ограничениях на максимальную энергию фотона γ_1

γ_1	δ_+			δ_-		
	S	M	W	S	M	W
0.001	-0.4090	-0.4050	-0.4093	-1.0271	-1.0200	-1.0276
0.01	-0.2344	-0.2388	-0.2354	-0.8526	-0.8434	-0.8544
0.05	-0.1124	-0.1073	-0.1166	-0.7305	-0.7317	-0.7387
0.10	-0.0599	-0.0384	-0.0674	-0.6780	-0.7057	-0.6935
0.30	0.0234	0.0565	0.0137	-0.5947	-0.6326	-0.6354
0.40	0.0452	0.3468	0.0597	-0.5729	-0.5903	-0.6239

Из таблицы видно, что разница между оценками всех трёх методов незначительна при небольших γ_1 (вплоть до значения $\gamma_1 = 0.05$, которое использовалось в [148], следуя работе [145], где для учёта R -вклада использовалось исключительно приближение мягких фотонов). Абсолютное значение разницы между методами составляет при $\gamma_1 = 0.05$ величину менее ≤ 0.01 для обеих поправок. С ростом γ_1 разница, как и следует, увеличивается и на краю области становится весьма существенна. Т. к. мягкофотонное приближение здесь не работает, обсудим разницу между M - и W -методами. Для получения данных табл. 3.8 для M -метода использовалось 5×10^5 точек интегрирования, для W -метода в пять раз меньше: 10^4 . Неточность расчёта из-за недостаточно быстрой сходимости интегралов при применении M -метода приводит к существенной разнице в оценке между методами: при $\gamma_1 = 0.4$ она составляет ~ 0.29 для δ_+ и ~ 0.03 для δ_- . Обсуждаемый край области в основном обрывается наложением условий, связанных с учётом возможностей детектора, сейчас переходим к анализу этих условий.

Учтем условия, накладываемые возможностями детектора, в экспериментальной физике частиц они называются “*fiducial cuts*”. Нам необходимо “вы-

резать” из области интегрирования в (2.157) точки, соответствующие событиям, которые детектор зафиксировать не может. Для этого, во-первых, подынтегральное выражение в (2.157) домножается на Θ -функцию, ответственную за допустимый интервал по энергиям детектируемого электрона:

$$\Theta(k_{20}^L - E_{\min}^L)\Theta(E_{\max}^L - k_{20}^L). \quad (3.87)$$

В лабораторной системе энергия первого электрона $k_{20}^L = (2m^2 - u)/2m$, а минимальная и максимальная энергия в эксперименте MOLLER принимают следующие значения: $E_{\min}^L = 1.8$ ГэВ, $E_{\max}^L = 8.8$ ГэВ. Для второго электрона энергия $p_{20}^L = (2m^2 - t_1)/2m$, а Θ -фактор строится аналогично.

Во-вторых, в эксперименте MOLLER электрон будет фиксироваться в лабораторной системе в области $5 \text{ мрад} \leq \theta_L \leq 19 \text{ мрад}$, что в с.ц.м. примерно соответствует интервалу $55^\circ \leq \theta \leq 125^\circ$ (здесь взята центральная часть). ЦКТ MOLLER $\theta = 90^\circ$ дает значение в лабораторной системе ~ 9.64 мрад. Полярные углы для первого и второго электронов в лабораторной системе могут быть вычислены по формулам:

$$\cos \theta_L = (t - 2m^2 + 2k_{10}k_{20})/2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|, \quad (3.88)$$

$$\cos \beta_L = (u_1 - 2m^2 + 2k_{10}p_{20})/2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|. \quad (3.89)$$

Θ -фактор, ответственный за допустимый интервал по углам, имеет вид:

$$\Theta(\theta_L - \theta_L^{\min})\Theta(\theta_L^{\max} - \theta_L). \quad (3.90)$$

Аналогично для второго электрона:

$$\Theta(\beta_L - \beta_L^{\min})\Theta(\beta_L^{\max} - \beta_L). \quad (3.91)$$

Используя рассмотренный выше набор физических ограничений детектора MOLLER, приступим к численным оценкам. В табл. 3.9 показана независимость результатов от параметра λ – инфинитезимальной массы фотона в ЦКТ MOLLER, зависимостей от других нефизических параметров, в частности от ω нет, так как используется W -метод.

Независимость суммы V - и R -вкладов как для относительных поправок δ_{\pm} , так и для поправки к асимметрии δ_A , демонстрируется в весьма широком интервале изменения λ (показанные 5 порядков далеко не являются пределом возможностей кода), что характеризует высокое качество разработанной программы численного учёта вклада ТИ на основе W -метода. Метод начинает стабильно работать при достаточно малом значении “фотонной

Табл. 3.9: Независимость результата расчёта W -методом для относительных поправок при $\theta = 90^\circ$ и наложении условий детектора MOLLER

$\lg \frac{\lambda}{\sqrt{s}}$	δ_+^V	δ_+^R	δ_+^{V+R}	δ_-^V	δ_-^R	δ_-^{V+R}	δ_A^{V+R}
-9	-1.3097	1.3142	0.0045	-1.9280	1.2901	-0.6379	-0.6395
-8	-1.1325	1.1370	0.0045	-1.7508	1.1128	-0.6380	-0.6396
-7	-0.9552	0.9598	0.0046	-1.5735	0.9357	-0.6379	-0.6395
-6	-0.7780	0.7827	0.0046	-1.3963	0.7585	-0.6378	-0.6395
-5	-0.6008	0.6056	0.0048	-1.2191	0.5814	-0.6377	-0.6394
-4	-0.4236	0.4285	0.0050	-1.0419	0.4046	-0.6373	-0.6391
-3	-0.2463	0.2529	0.0066	-0.8646	0.2305	-0.6342	-0.6366
-2	-0.0691	0.0934	0.0243	-0.6874	0.0798	-0.6077	-0.6169

массы” начиная с $\lambda < 10^{-4}\sqrt{s}$. Объясняется это тем, что инфинитезимальный параметр λ должен быть гораздо меньше каждой из размерных величин в реакции. В случае эксперимента MOLLER это условие будет выглядеть так: $\lambda \ll m$. Напомним, что для MOLLER $\sqrt{s} \sim 0.1$ ГэВ, так что верхняя граница параметра λ вполне объяснима. Что же касается нижней границы, то нужно сказать, что слишком малым (меньше $10^{-15}\sqrt{s}$) этот параметр выбирать не следует, так как это усложняет работу интегратора. При дальнейших оценках будет использовано значение $\lambda = 10^{-7}\sqrt{s}$.

Наконец, на рис. 3.10 показана зависимость относительных поправок δ_\pm и δ_A от угла рассеяния в области эксперимента MOLLER с учётом возможностей детектора. Хорошо видно, что основной вклад в относительную поправку к поляризационной асимметрии даёт именно вклад от δ_- . Поведение всех поправок близкое с симметричному относительно ЦКТ MOLLER из-за неполной соответствующей симметрии налагаемых кинематических ограничений. В районе ЦКТ относительные поправки принимают значения: $\delta_+ = 0.0048$, $\delta_- = -0.6378$, $\delta_A = -0.6395$. Абсолютная ошибка приведенных чисел, обусловленная, в том числе, точностью метода Монте-Карло, имеет значение порядка ± 0.0002 .

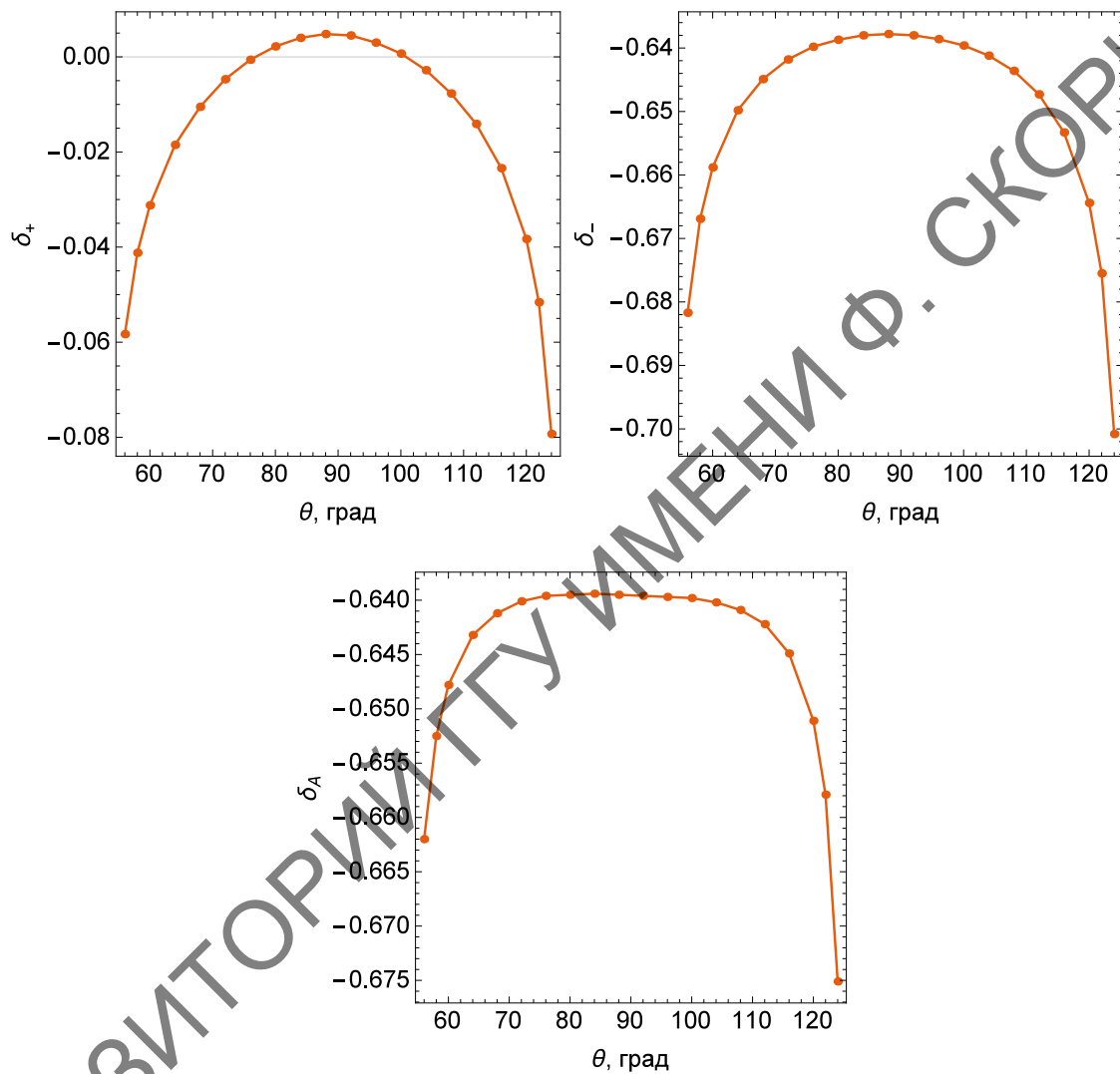


Рис. 3.10: Зависимость относительных поправок δ_{\pm} и δ_A (реальный физический эффект) с учётом возможностей детектора MOLLER от угла рассеяния θ

4 ЧЕТЫРЁХФЕРМИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Изучение процессов аннигиляции пары электрона и позитрона в пару фермионов другого сорта изначально послужив одним из основных средств становления КЭД, впоследствии дало прецизионную информацию об электрослабой структуре Природы (эксперименты на коллайдерах LEP и SLC). К настоящему моменту потенциал этого процесса (будем называть его четырёхфермионным процессом) далеко не исчерпан (точное определение параметров СМ, мезонная физика, физика тяжелых кварков, НФ и т. д.). Четырёхфермионный процесс предъявляет высочайшие требования как к технической оснастке эксперимента, так и к теоретической оценке наблюдаемых величин. С ростом энергий и с развитием экспериментальных методик эти требования будут только усиливаться.

В настоящей главе представлен детальный расчёт однопетлевых ЭСП к наблюдаемым величинам четырёхфермионной реакции $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+(\gamma)$ с поляризованным электроном при заданных условиях детектирования с особым акцентом на прецизионном учёте жёсткого ТИ. Читатель может проследить сходства и различия между содержанием и формой изложения в этой главе и главе 2, посвящённой процессу Баба, который сложнее для расчёта с той точки зрения, что в нём кроме s -канальных есть и t -канальные диаграммы и, как следствие, дополнительные слагаемые в сечении. Если выключить t -канальные диаграммы из процесса Баба, то в УРП (где массами конечных фермионов можно пренебречь) часть формул будет иметь



Рис. 4.1: Вольфганг Холлик (Wolfgang Hollik; род. 1951) – немецкий физик. Автор высококлассных работ по пертурбативным расчётам

одинаковый вид. Это полезное упражнение можно проделать без особого труда, так как в главе 2 все вклады выписаны явно, с разделением по каналам. Далее, в этой главе начальный позитрон полагается неполяризованным (в процессе Баба была учтена поляризация обеих начальных частиц), поэтому для сравнения результатов требуется ещё одно упражнение – усреднение по поляризациям, после выполнения которого и с применением УРП можно убедиться в совпадении результатов.

4.1 Безрадиационный четырёхфермионный процесс

Рассмотрим процесс рассеяния продольно поляризованного электрона на неполяризованном позитроне в s -канале:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \gamma, Z \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4). \quad (4.1)$$

Фейнмановская диаграмма, соответствующая процессу (4.1) в приближении Борна (древесном), приведена на рис. 2.2 (2). Однопетлевые диаграммы, вклад которых экспериментально неотличим от борновского вклада, приведены на рис. 2.7 (2) (бозонные собственные энергии), на рис. 2.8 (3,4) (вершины), на рис. 2.10 (3,4) (боксы).

Строим дифференциальное сечение по углу рассеяния. Используя сокращенную запись $\sigma \equiv d\sigma/dc$ (где $c = \cos\theta$ – косинус угла между электроном и детектируемым мюоном в с.ц.м.), получим:

$$\sigma = \frac{\pi^3}{2s} |M_0 + M_1|^2 \approx \frac{\pi^3}{2s} (M_0 M_0^* + 2\text{Re} M_1 M_0^*). \quad (4.2)$$

4-импульсы частиц образуют стандартный набор (2.2) лоренц-инвариантных переменных Мандельштама (используем обозначение: $r = s, t, u$).

Выпишем выражения для борновской (M_0) и однопетлевой (M_1) амплитуд. Заметим, что амплитуды этого раздела не в точности совпадают с теми, что приведены в главе 2, как говорят, они равны с точностью до множителя. Такой приём является обычной практикой при подобных расчётах: в главе 2 амплитуды записаны в общепринятом виде, а в этой главе они приведены в форме, принятой, например, в серии работ по лептон-нуклонному ГНР (см. [211] и цитирование там). Естественно, на уровне сечения, являющегося физически наблюдаемой величиной, разницы нет.

Борновская амплитуда представляет собой сумму фотонной и Z -бозон-

ной [см. рис. 2.2 (2)], имеет порядок малости $\mathcal{O}(\alpha)$ и выглядит так:

$$M_0 = \sum_{j=\gamma, Z} M^j, \quad M^j = i \frac{\alpha}{\pi} I_\nu^j D^j J^{\nu, j}. \quad (4.3)$$

Она построена из электронного и мюонного токов:

$$I_\nu^j = \bar{u}(-p_2) \gamma_\nu (v_e^j - a_e^j \gamma_5) u(p_1), \quad J_\nu^j = \bar{u}(p_3) \gamma_\nu (v_\mu^j - a_\mu^j \gamma_5) u(-p_4), \quad (4.4)$$

и пропагаторных структур:

$$D^j = \frac{1}{s - m_j^2 + i m_j \Gamma_j} \quad (j = \gamma, Z). \quad (4.5)$$

Ультрарелятивистские результаты этой главы соответствуют приближению $m_g^2 \ll |r|$, где $g = (e, \mu)$, m_e – масса электрона, m_μ – масса мюона (массы начальных и конечных частиц теперь необходимо различать).

Квадрированная борновская амплитуда M_0 формирует борновское сечение

$$\sigma_0 = \frac{\pi^3}{2s} M_0 M_0^+ = \frac{\pi \alpha^2}{s} \sum_{i, k=\gamma, Z} D^i D^{k*} \mu^{ikik}, \quad (4.6)$$

где

$$\mu^{ikjl} = T_+ \lambda_+^{ikjl} - T_- \lambda_-^{ikjl}, \quad \lambda_+^{ikjl} = \lambda_1^{ik} \lambda_{\mu V}^{jl}, \quad \lambda_-^{ikjl} = \lambda_2^{ik} \lambda_{\mu A}^{jl}, \quad (4.7)$$

$$\lambda_1^{ik} = \lambda_{eV}^{ik} - p_B \lambda_{eA}^{ik}, \quad \lambda_2^{ik} = \lambda_{eA}^{ik} - p_B \lambda_{eV}^{ik}, \quad (4.8)$$

комбинации инвариантов $T_\pm = t^2 \pm u^2$, а p_B – это степень поляризации электрона. Снова используются полезные комбинации:

$$\lambda_{gV}^{ij} = v_g^i v_g^j + a_g^i a_g^j, \quad \lambda_{gA}^{ij} = v_g^i a_g^j + a_g^i v_g^j. \quad (4.9)$$

Возможно и другое представление:

$$\mu^{ikjl} = t^2 b_-^{ikjl} + u^2 b_+^{ikjl}, \quad (4.10)$$

где комбинации b_- и b_+ выглядят так:

$$b_\pm^{ikjl} = \lambda_+^{ikjl} \pm \lambda_-^{ikjl}. \quad (4.11)$$

Также пригодятся симметричные формы констант связи:

$$g_g^\mp \equiv g_g^{L,R} = v_g^Z \pm a_g^Z, \quad (4.12)$$

соответствующие выражениям g_f^\mp из работы Деннера [67]. Здесь опускаем нижний индекс, так как он не важен для рассматриваемой реакции: $g_e^\mp = g_\mu^\mp$. В новых обозначениях комбинации констант связи симметричны, так что появляется возможность использовать следующие сокращения:

$$c_0 = 1 + g^- g^+, \quad c_i^\pm = (g^-)^i \pm (g^+)^i \quad \text{для } i \geq 1. \quad (4.13)$$

Также везде в тексте будем использовать в случае повторяющихся индексов обозначение: $b_{\mp}^{ikik} \equiv b_{\mp}^{ik}$.

В табл. 4.1 приведены численные значения для комбинаций b_{\mp}^{ik} при различных поляризациях, где индексы L и R соответствуют степеням поляризации $p_B = -1$ и $p_B = +1$. Комбинация $(L + R)/2$ означает неполяризованное сечение, для его обозначения используем индекс u (unpolarized). Формально это соответствует значению $p_B = 0$. Двойной индекс в константах связи, приведенный в табл. 4.1, нужен для записи боксов (для ясности он разделен запятой).

Табл. 4.1: Численные значения величин b_{\mp}^{ik} при различных поляризациях

b_{\mp}^{ik}	L	R	u	$L - R$
$b_{\mp}^{\gamma\gamma}$	1	1	1	0
$b_{-}^{\gamma Z}$	-0.3568	-0.3568	-0.3568	0
$b_{+}^{\gamma Z}$	+0.4445	+0.2864	+0.3654	+0.1580
b_{-}^{ZZ}	+0.1273	+0.1273	+0.1273	0
b_{+}^{ZZ}	+0.1975	+0.0820	+0.1398	+0.1155
$b_{-}^{ZZ,Z}$	-0.0454	-0.0454	-0.0454	0
$b_{+}^{ZZ,Z}$	+0.0878	+0.0235	+0.0556	+0.0643
$b_{-}^{WW,k}$	0	0	0	0
$b_{+}^{WW,\gamma}$	+5.0433	0	+2.5216	+5.0433
$b_{+}^{WW,Z}$	+2.2415	0	+1.1208	+2.2415

Приведем некоторые полезные соотношения: $b_{\mp}^{ik} = b_{\mp}^{ki}$, $b_{\mp}^{\gamma Z,k} = b_{\mp}^{Zk}$ и $b_{\mp}^{ZZ,\gamma} = b_{\mp}^{ZZ}$. Также заметим, что $b_{+}^{WW,k}|_{L-R} = 2b_{+}^{WW,k}|_u$. Последнее соотношение объясняется тем, что векторные и аксиальные константы связи фермионов с W -бозонами одинаковы (по-другому: $g_W^R = 0$).

4.1.1 Однопетлевые амплитуды и сечения

Однопетлевая амплитуда M_1 имеет порядок $\mathcal{O}(\alpha^2)$ и складывается из собственных энергий бозонов, вершин и боксов:

$$M_1 = M_{\text{BSE}} + M_{\text{Ver}} + M_{\text{Box}}. \quad (4.14)$$

Как и ранее, используется схема перенормировки на массовой поверхности [66], [67] с ренормализационными условиями Холлика [66], так что в амплитуде отсутствуют вклады электронных собственных энергий.

Амплитуда BSE [см. рис. 2.7 (2)] инфракрасно конечна и выражается через уже знакомые структуры:

$$M_{\text{BSE}} = i \frac{\alpha}{\pi} \sum_{i,j=\gamma,Z} I_\nu^i D_S^{ij} J^{\nu,j}, \quad (4.15)$$

где

$$D_S^{ij} = -D^i \hat{\Sigma}_T^{ij}(s) D^j, \quad (4.16)$$

а $\hat{\Sigma}_T^{ij}(s)$ – это уже введенная выше поперечная часть перенормированных собственных энергий фотона, Z -бозона и γZ -смешивания.

Чтобы получить вершинную амплитуду [см. рис. 2.8 (3,4)], снова поступаем как в [66], используя перенормированные формфакторы, заменяя ими константы связи [см. (2.51)]. Полученная вершинная амплитуда имеет вид:

$$M_{\text{Ver}} = i \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=\gamma,Z} (I_\nu^{F_j} D^{js} J^{\nu,j} + I_\nu^j D^{js} J^{\nu,F_j}). \quad (4.17)$$

ИКР регуляризуется в ней с помощью λ следующим образом:

$$M_{\text{Ver}}^\lambda = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{s}{m_e m_\mu} - 1 \right) \ln \frac{s}{\lambda^2} M_0. \quad (4.18)$$

Оставшаяся (IR-конечная) часть выглядит просто:

$$M_{\text{Ver}}^f = M_{\text{Ver}} - M_{\text{Ver}}^\lambda = M_{\text{Ver}}(\lambda^2 \rightarrow s). \quad (4.19)$$

Боксовская амплитуда (см. рис. 2.10 (3,4)) представляется в виде суммы:

$$M_{\text{Box}} = M_{\gamma\gamma} + M_{\gamma Z} + M_{ZZ} + M_{WW}, \quad (4.20)$$

где $\gamma\gamma$, γZ и ZZ -боксы содержат как прямую, так и перекрестную части:

$$M_{ij} = M_{ij}^D + M_{ij}^C \quad (i, j = \gamma, Z), \quad (4.21)$$

в то время как для WW -боксов имеется только прямая диаграмма.

IR-части $\gamma\gamma$ - и γZ -боксов записываются сходным образом (ср. с формулами главы 2):

$$M_{\gamma\gamma(\gamma Z)}^\lambda = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{u}{t} \ln \frac{tu}{\lambda^4} M^{\gamma(Z)}. \quad (4.22)$$

Конечная часть $\gamma\gamma$ -боксов в s -канале рассчитывается в авторских работах [234], [235] и подробно изложена в главе 2.

Применяя метод [148] (подробно описан в главе 2), получим для прямого бокса:

$$M_{ii}^D = \frac{-i}{16m_i^2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \bar{u}(-p_2) \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu (v_e^B - a_e^B \gamma_5) u(p_1) \times \\ \times \bar{u}(p_3) \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu (v_\mu^B - a_\mu^B \gamma_5) u(-p_4). \quad (4.23)$$

Перекрестную часть легко получить заменой $\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu$. Константы связи для ZZ - и WW -боксов индексируем символом B ($B = ZZ, WW$), они были приведены выше [см. формулы (2.26)].

Представляем однопетлевую амплитуду как сумму IR-части (индекс λ) и конечной части (индекс f):

$$M_1 = M_1^\lambda + M_1^f,$$

где IR-часть приобретает факторизованный вид:

$$M_1^\lambda = \frac{\alpha}{2\pi} \delta_1^\lambda M_0, \quad \delta_1^\lambda = 4B \ln \frac{\lambda}{\sqrt{s}}, \quad B = \ln \frac{st}{m_e m_\mu u} - 1. \quad (4.24)$$

Теперь нетрудно сконструировать однопетлевое сечение:

$$\sigma_1 = \frac{\pi^3}{s} \text{Re} M_1 M_0^+ = \sigma_1^\lambda + \sigma_1^f. \quad (4.25)$$

Инфракрасно-расходящаяся часть стандартно представляется в виде произведения факторизованной относительной поправки и борновского сечения:

$$\sigma_1^\lambda = \frac{\alpha}{\pi} \delta_1^\lambda \sigma_0. \quad (4.26)$$

Инфракрасно-конечную часть запишем в виде суммы вкладов:

$$\sigma_1^f = \sigma_{\text{BSE}}^f + \sigma_{\text{Ver}}^f + \sigma_{\text{Box}}^f. \quad (4.27)$$

Явный вид сечений будет приведён ниже.

4.2 Аналитические выражения для относительных поправок

Введем индекс C для обозначения типа вклада в наблюдаемое сечение: для поляризационных сечений используем $\sigma_{L,R}^C$, их комбинация

$$\sigma_u^C = \frac{\sigma_L^C + \sigma_R^C}{2} \quad (4.28)$$

имеет смысл неполяризованного сечения, а поляризационная асимметрия

$$A_{LR}^C = \frac{\sigma_L^C - \sigma_R^C}{\sigma_L^C + \sigma_R^C} \quad (4.29)$$

определена стандартно и по смыслу полностью совпадает с (2.28). Индекс C пробегает следующие значения (несколько другие по сравнению с главой 2):

$$C = \{0, G, \gamma\gamma, \gamma Z, ZZ, WW, 1, 0+1\},$$

где “0” соответствует приближению Борна; “G = BSE + Ver + IRD” – калибровочно-инвариантному вкладу BSE, вершин и части сечения мягких фотонов с энергией ниже ω ; $\gamma\gamma, \gamma Z, ZZ, WW$ соответствуют инфракрасно-конечным частям боксов; “1” – полному однопетлевому вкладу; “0+1” соответствует расчёту с точностью до однопетлевого вклада.

Используем относительные поправки δ_{\pm}^C (2.39) к комбинациям дифференциального сечения, обладающие свойством *аддитивности* (2.40), что делает их удобными для анализа. Используя δ_+^C и δ_-^C , можно построить относительную поправку к поляризационной асимметрии (2.42) [275].

Запишем их в сокращенной форме:

$$\delta_+^C = \frac{\sigma_u^C}{\sigma_u^0}, \quad \delta_-^C = \frac{\sigma_{L-R}^C}{\sigma_{L-R}^0} \quad (4.30)$$

и рассчитаем знаменатели этих поправок. В LE-режиме имеем:

$$\sigma_{u,LE}^0 = \frac{\pi\alpha^2}{s^3} \mu^{\gamma\gamma} |_{u} = \frac{\pi\alpha^2}{s^3} (t^2 + u^2), \quad (4.31)$$

$$\sigma_{L-R,LE}^0 = -\frac{2\pi\alpha^2}{s^2 m_Z^2} \mu^{\gamma Z} |_{L-R} = -\frac{2\pi\alpha^2}{s^2 m_Z^2} c_2^- \cdot u^2. \quad (4.32)$$

Эти простые выражения являются результатом нескольких приближений: в LE-режиме вклады от амплитуды с Z -бозонным обменом подавлены в неполяризованном случае, в то время как вклад интерференции Z -бозонной и фотонной диаграммы выживает в $L - R$ числителе асимметрии.

В HE-режиме, с учётом, что в нем $s \gg m_Z^2$, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{u, \text{HE}}^0 &= \frac{\pi\alpha^2}{s^3} d_0, \quad d_0 = \sum_{i,j} \mu^{ik}|_u = c_0^2 \cdot t^2 + (1 + c_2^+ + c_4^+/2) \cdot u^2, \\ \sigma_{L-R, \text{HE}}^0 &= \frac{\pi\alpha^2}{s^3} \sum_{i,j} \mu^{ij}|_{L-R} = \frac{\pi\alpha^2}{s^3} c_2^- (2 + c_2^+) \cdot u^2.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Замечаем, что $c_2^- = (g_g^-)^2 - (g_g^+)^2 \sim a$, где $a = 1 - 4s_W^2$ – малая величина.

4.2.1 Собственные энергии бозонов

Цель этого и последующих двух разделов – получить асимптотические выражения для всех вкладов в ЭСП. Начнем с G -части, которая в обозначениях, принятых здесь, была описана в [276], её калибровочная инвариантность протестирована в работе [203]. В частности, там продемонстрировано, что при использовании различных ренормализационных условий – Холлика [65] или Деннера [67] – численные результаты совпадают. Все соотношения выводятся с учётом УРП и применимы везде, кроме области резонанса, где играют роль слагаемые $\sim m_g/\Gamma_Z$.

Начнем с BSE, сечение этой части IR-конечно и приведено выше. Введем поправки, соответствующие BSE-части в ренормусловиях [66]:

$$\delta_{\text{BSE}}^{\gamma\gamma} = \text{Re}\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(s)D^{\gamma s}, \quad \delta_{\text{BSE}}^{\gamma Z} = \text{Re}\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(s)D^{\gamma s}, \quad \delta_{\text{BSE}}^{ZZ} = \text{Re}\hat{\Sigma}_T^{ZZ}(s)D^{Zs}. \quad (4.34)$$

Рис. 4.2 иллюстрирует их зависимость от \sqrt{s} . Для кинематики Belle II (то есть при $\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ), эти поправки имеют близкие значения:

$$\delta_{\text{BSE}}^{\gamma\gamma} = -0.0361, \quad \delta_{\text{BSE}}^{\gamma Z} = -0.0301, \quad \delta_{\text{BSE}}^{ZZ} = -0.0317.$$

Рассчитаем относительные поправки BSE-части. Сечения в LE-режиме имеют форму:

$$\sigma_{u, \text{LE}}^{\text{BSE}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \text{Re} D_S^{\gamma\gamma} D^{\gamma} \mu^{\gamma\gamma}, \quad \sigma_{L-R, \text{LE}}^{\text{BSE}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \text{Re} \sum_{i,j} D_S^{ij} D^{k*} \mu^{ikjk}. \quad (4.35)$$

Подставляя эти значения в (4.30), получим:

$$\delta_{+, \text{LE}}^{\text{BSE}} = -2\delta_{\text{BSE}}^{\gamma\gamma}, \quad \delta_{-, \text{LE}}^{\text{BSE}} = -\delta_{\text{BSE}}^{\gamma\gamma} - \frac{2}{c_1^+} \delta_{\text{BSE}}^{\gamma Z} - \delta_{\text{BSE}}^{ZZ}. \quad (4.36)$$

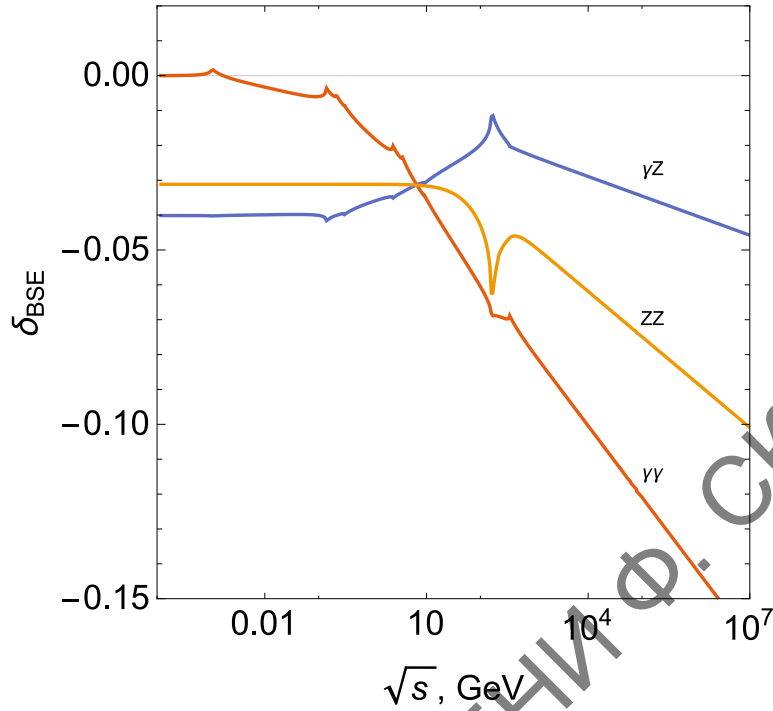


Рис. 4.2: Зависимость относительных поправок BSE-части от \sqrt{s} . Пики на кривых обусловлены “включением” нового типа частицы в петле (фермион, W -бозон)

Остальные относительные поправки получим тем же способом: рассчитываем сечение, упрощаем и делим на борновский вклад. В HE-режиме BSE-часть имеет немного более сложную форму:

$$\delta_{+, \text{HE}}^{\text{BSE}} = -\frac{1}{d_0} \left([2c_0 t^2 + (2 + c_2^+) u^2] \delta_{\text{BSE}}^{\gamma\gamma} + 2c_1^+ [c_0 t^2 + (1 - g^+ g^- + c_2^+) u^2] \delta_{\text{BSE}}^{\gamma Z} + [2g^+ g^- c_0 t^2 + (c_2^+ + c_4^+) u^2] \delta_{\text{BSE}}^{ZZ} \right), \quad (4.37)$$

$$\delta_{-, \text{HE}}^{\text{BSE}} = \frac{2}{c_1^+ (2 + c_2^+)} \left(c_1^+ \delta_{\text{BSE}}^{\gamma\gamma} + 2(c_0^+ + c_2^+) \delta_{\text{BSE}}^{\gamma Z} + (c_0 c_1^+ + c_3^+) \delta_{\text{BSE}}^{ZZ} \right).$$

4.2.2 Вершинный вклад

Сечение, соответствующее вершинному вкладу, запишем в виде:

$$\sigma^{\text{Ver}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \text{Re} \sum_{i,k=\gamma,Z} D^i D^{k*} [\mu^{F_i k i k} + \mu^{i k F_i k}], \quad (4.38)$$

где снова следуем работе [66] и используем перенормированные формфакторы $v_g^{\gamma(Z)} \rightarrow v_g^{F_{\gamma(Z)}}$, $a_g^{\gamma(Z)} \rightarrow a_g^{F_{\gamma(Z)}}$, которые выражаются через три треугольные функции $\Lambda_{1,2,3}$ и приведены в главе 2.

Рассчитаем относительные поправки от вершинной части. Начнём с IR-части, для этого, как показано в [276]), сделаем в формфакторе Λ_1 замену: $\lambda \rightarrow \sqrt{s}$. Тогда, в LE-режиме:

$$\begin{aligned}\delta_{+,LE}^{\text{Ver}} &= \frac{\alpha}{2\pi} \left((\Lambda_{1,e}^\gamma + \Lambda_{1,\mu}^\gamma)|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} + c_2^+ \Lambda_2^Z + \frac{3}{2s_W^2} \Lambda_3^W \right), \\ \delta_{-,LE}^{\text{Ver}} &= \frac{\alpha}{2\pi} \left((\Lambda_{1,e}^\gamma + \Lambda_{1,\mu}^\gamma)|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} - \Delta_1 \right),\end{aligned}\quad (4.39)$$

где доминирующий вклад происходит из фотонных вершин с дополнительным тяжелым бозоном, который имеет следующий вид:

$$\Delta_1 = \frac{m_Z^2}{s} \left(\Lambda_2^Z + \frac{3}{2c_2^- s_W^2} \Lambda_3^W \right) = \frac{2}{3} \ln \frac{m_Z^2}{s} + \frac{11}{9} - \frac{10}{9a} \quad (4.40)$$

Вклад важен, поскольку содержит логарифм, который возрастает с уменьшением s , а также из-за значительного вклада слагаемого $1/a$.

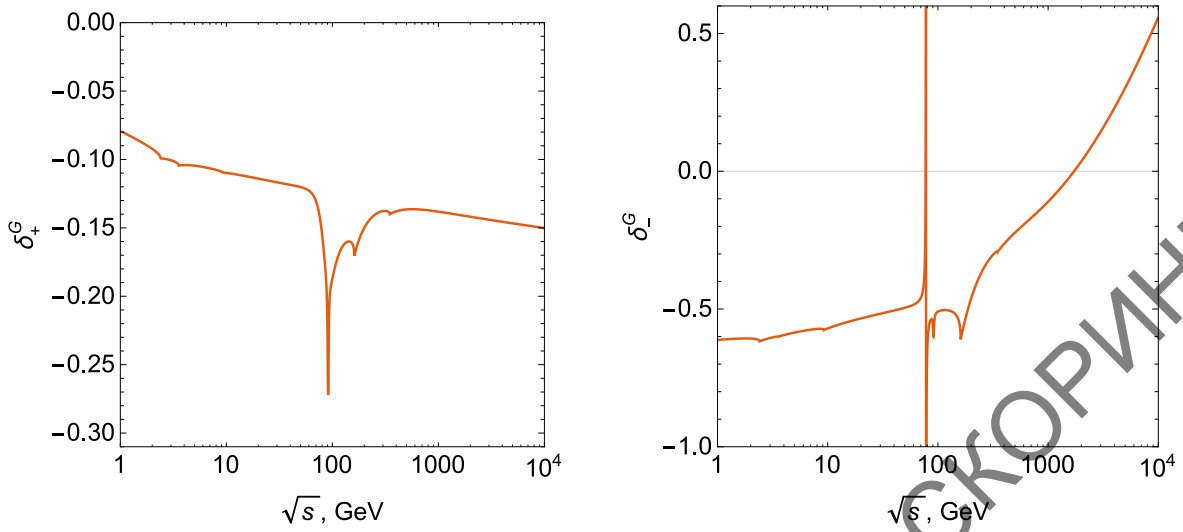
В HE-режиме получим:

$$\begin{aligned}\delta_{+,HE}^{\text{Ver}} &= \frac{\alpha}{2\pi} (\Lambda_{1,e}^\gamma + \Lambda_{1,\mu}^\gamma)|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} + \\ &+ \frac{\alpha}{16\pi s_W^2 c_W^2 d_0} \left(\left[\frac{1}{c_W^2} \Lambda_2^W + \frac{8s_W^4 - 4s_W^2 + 1}{2c_W^4} \Lambda_2^Z \right] t^2 + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{-1 + 2s_W^2}{4s_W^4 c_W^2} \Lambda_2^W + \frac{3}{2s_W^4} \Lambda_3^W + \frac{64s_W^8 + 4s_W^4 - 4s_W^2 + 1}{8s_W^4 c_W^4} \Lambda_2^Z \right] u^2 \right), \\ \delta_{-,HE}^{\text{Ver}} &= \frac{\alpha}{2\pi} (\Lambda_{1,e}^\gamma + \Lambda_{1,\mu}^\gamma)|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} + \frac{\alpha}{2\pi s_W^2 a (1 + 4s_W^2)} \times \\ &\times \left((2s_W^2 - 1) \Lambda_2^W + 6c_W^2 \Lambda_3^W + \frac{-64s_W^8 + 4s_W^4 - 4s_W^2 + 1}{2c_W^2} \Lambda_2^Z \right).\end{aligned}\quad (4.41)$$

Заметим, что в сумме G и вершинной части отсутствует квадрат коллинеарного логарифма. На рис. 4.3 показаны относительные поправки для калибровочно-инвариантного набора G при $\theta = 90^\circ$.

4.2.3 Двухбозонный вклад

Повторим здесь выражения для боксовских сечений в другой, более удобной, форме. Поведение относительных поправок в зависимости от полной

Рис. 4.3: Относительные поправки для калибровочно-инвариантного набора G при $\theta = 90^\circ$

энергии реакции при фиксированном угле $\theta = 90^\circ$ будут иллюстрироваться рис. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7.

Инфракрасно-конечная часть $\gamma\gamma$ -бокса:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^D = -\frac{\alpha^3}{s} \sum_{k=\gamma,Z} D^{k*} f^{\gamma,k}, \quad (4.42)$$

$$f^{i,k} = b_-^{i,k} \left(\frac{t^2 + u^2}{2s} l_{su}^2 + t l_{su} \right) + b_+^{i,k} \frac{u^2}{s} l_{su}^2.$$

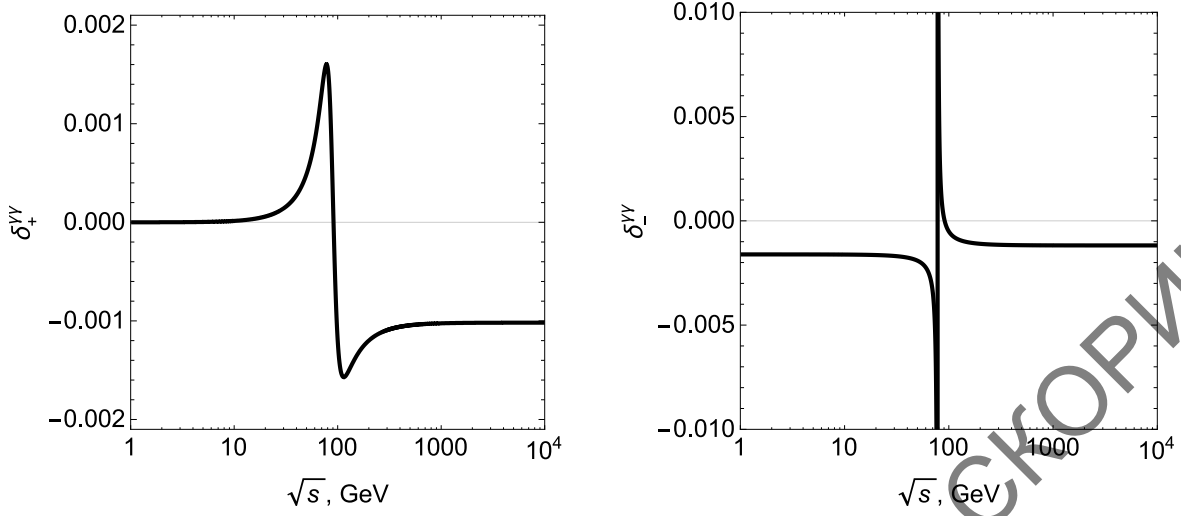
Эта формула работает при произвольных энергиях и дает следующие выражения для относительных поправок:

$$\begin{aligned} \delta_+^{\gamma\gamma\text{-box}} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{t^2 + u^2} \left((t^2 + 3u^2) l_{su}^2 + 2st l_{su} - (t \leftrightarrow u) \right), \\ \delta_-^{\gamma\gamma\text{-box}} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \left(l_{su} - \frac{t^2 + u^2}{2u^2} l_{st}^2 - \frac{s}{u} l_{st}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

В LE-режиме, применяя технологию, объясненную выше (см. также [148]), получим:

$$\sigma_{\gamma Z, \text{LE}}^D = -\frac{\alpha^3}{s} \left(\ln \frac{-t}{m_Z^2} - 1 \right) D^Z \sum_{k=\gamma,Z} D^{k*} (b_-^{Z,k} 4t^2 + b_+^{Z,k} u^2), \quad (4.44)$$

$$\sigma_{ZZ, \text{LE}}^D = -\frac{\alpha^3}{2sm_Z^2} \sum_{k=\gamma,Z} D^{k*} (b_-^{ZZ,k} 4t^2 + b_+^{ZZ,k} u^2). \quad (4.45)$$

Рис. 4.4: Относительные поправки для $\gamma\gamma$ -бокса при $\theta = 90^\circ$

В HE-режиме, применяя асимптотический метод [235], получим:

$$\sigma_{\gamma Z, \text{HE}}^D = -2 \frac{\alpha^3}{s} \sum_{k=\gamma, Z} D^{k*} \left(D^\gamma \mu^{Z,k} L_2(-m_Z^2/t) + f^{Z,k} \right), \quad (4.46)$$

$$\sigma_{ZZ, \text{HE}}^D = -\frac{\alpha^3}{s} \sum_{k=\gamma, Z} D^{k*} \left(2D^Z \mu^{ZZ,k} L_2(-m_Z^2/t) + f^{ZZ,k} \right), \quad (4.47)$$

где

$$L_2(\epsilon) = \int_0^1 dx \frac{1}{1-x-\epsilon} \ln \frac{1-x}{\epsilon} \approx \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.48)$$

Чтобы получить WW -боксы, сделаем очевидную замену в (4.45) и (4.47): $Z \rightarrow W$, $ZZ \rightarrow WW$. Теперь всё готово к тому, чтобы выписать относительные поправки.

В LE-режиме для γZ -бокса:

$$\begin{aligned} \delta_{+, \text{LE}}^{\gamma Z\text{-box}} &= \frac{\alpha}{8\pi s_W^2 c_W^2} \frac{s}{m_Z^2} \frac{1}{t^2 + u^2} \times \\ &\times \left[4s_W^2 (2s_W^2 - 1) \left(4 \ln \frac{-t}{m_Z^2} - \ln \frac{-u}{m_Z^2} - 3 \right) t^2 + \right. \\ &\quad \left. + (8s_W^4 - 4s_W^2 + 1) \left(\ln \frac{-t}{m_Z^2} - 4 \ln \frac{-u}{m_Z^2} + 3 \right) u^2 \right], \\ \delta_{-, \text{LE}}^{\gamma Z\text{-box}} &= \frac{\alpha}{2\pi} \left(4 \ln \frac{-u}{m_Z^2} - \ln \frac{-t}{m_Z^2} - 3 \right), \end{aligned} \quad (4.49)$$

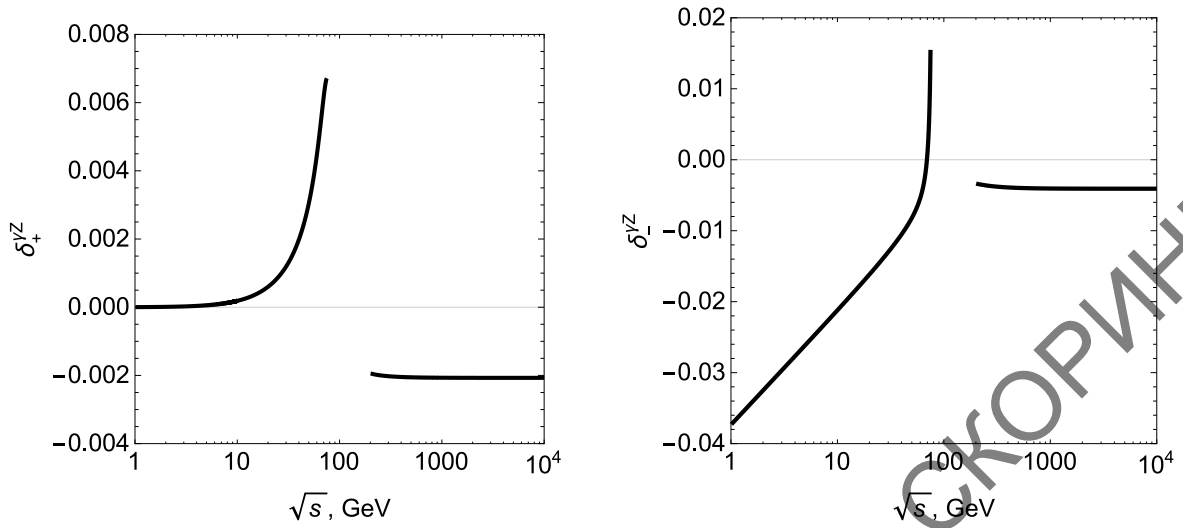


Рис. 4.5: Относительные поправки для γZ -боксов при $\theta = 90^\circ$ и энергиях, соответствующим LE- и HE-режимам

для ZZ -боксов:

$$\begin{aligned}\delta_{+,LE}^{ZZ\text{-box}} &= \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{s}{m_Z^2} \frac{1}{t^2 + u^2} \left(-2(g^- g^+)^2 t^2 + c_4^+ u^2 \right), \\ \delta_{-,LE}^{ZZ\text{-box}} &= -\frac{3\alpha}{4\pi} c_2^+, \end{aligned} \quad (4.50)$$

и для WW -боксов:

$$\begin{aligned}\delta_{+,LE}^{WW\text{-box}} &= -\frac{\alpha}{16\pi} \frac{s}{s_W^4} \frac{u^2}{m_W^2 (t^2 + u^2)}, \\ \delta_{-,LE}^{WW\text{-box}} &= \frac{\alpha}{16\pi s_W^4 c_W^2 c_2^-}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

В HE-режиме важной является комбинация [ср. с (3.62)]:

$$L_1 = \ln^2 \frac{-t}{m_Z^2} - \ln^2 \frac{-u}{m_Z^2} = \ln \frac{t}{u} \ln \frac{tu}{m_Z^4},$$

которая показывает, как степень судаковского логарифма сводится от второй к первой. Так, для γZ -боксов:

$$\begin{aligned}\delta_{+,HE}^{\gamma Z\text{-box}} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{d_0} L_1 \left(2g^- g^+ c_0 t^2 + (c_2^+ + c_4^+) u^2 \right), \\ \delta_{-,HE}^{\gamma Z\text{-box}} &= -\frac{\alpha}{\pi} L_1 \frac{1 + c_2^+}{2 + c_2^+}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

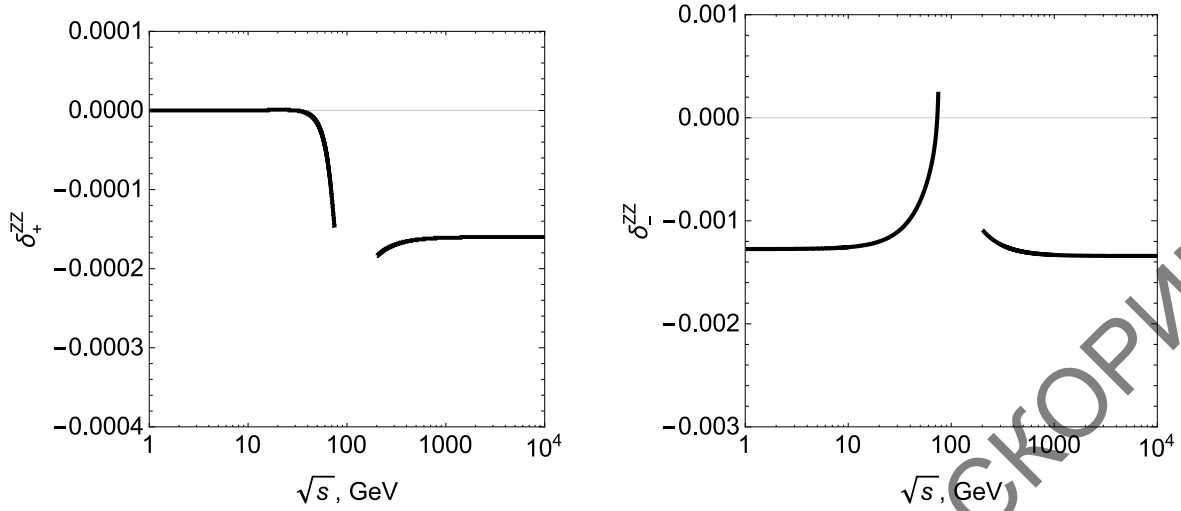


Рис. 4.6: Относительные поправки для ZZ -боксов при $\theta = 90^\circ$ и энергиях, соответствующим LE- и HE-режимам

для ZZ -боксов:

$$\begin{aligned}\delta_{+,HE}^{ZZ-\text{box}} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{d_0} L_1 \left(2(g^- g^+)^2 c_0 t^2 + (c_4^+ + c_6^+) u^2 \right), \\ \delta_{-,HE}^{ZZ-\text{box}} &= -\frac{\alpha}{\pi} L_1 \frac{(g^- g^+)^2 + c_2^+ + c_4^+}{2 + c_2^+},\end{aligned}\quad (4.53)$$

и, наконец, для WW -боксов:

$$\begin{aligned}\delta_{+,HE}^{WW-\text{box}} &= -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1 + (g^-)^2 u^2}{s_W^4 d_0} L_2(-m_W^2/t), \\ \delta_{-,HE}^{WW-\text{box}} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 + (g^-)^2}{s_W^4 c_2^- (2 + c_2^+)} L_2(-m_W^2/t).\end{aligned}\quad (4.54)$$

На рис. 4.8 показаны полные относительные поправки при $\theta = 90^\circ$ в зависимости от энергии реакции. Штриховыми линиями обозначен асимптотический расчёт, а сплошными – точный, с применением средств компьютерной алгебры. Видно превосходно согласие на краях рисунков: левой – для LE-режима, правом – для HE-режима. Видно, при каком значении энергии начинает хорошо работать асимптотический метод [235] (~ 500 ГэВ).

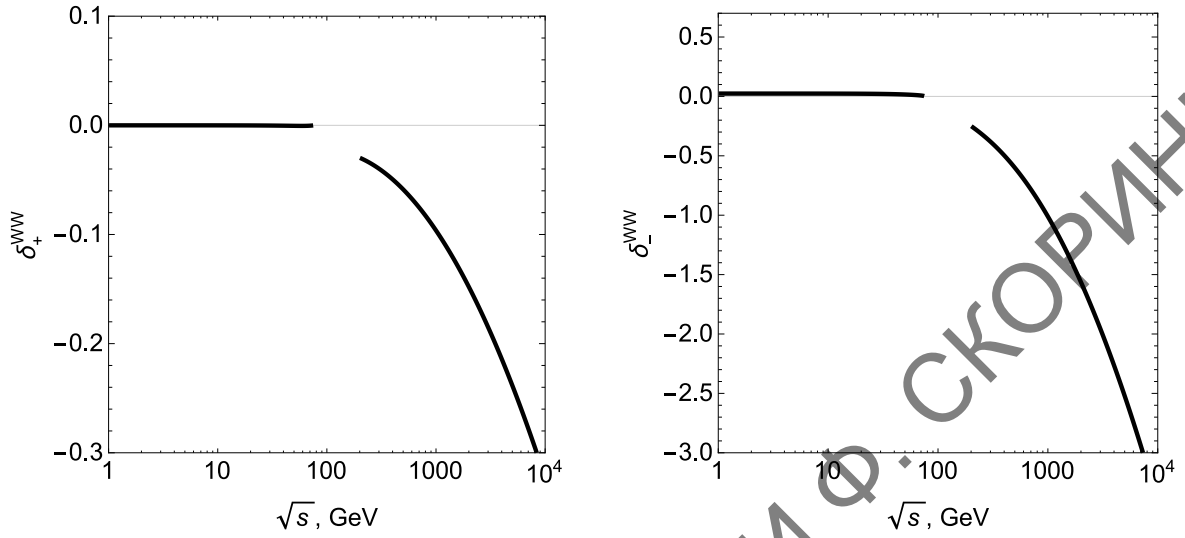


Рис. 4.7: Относительные поправки для WW -боксов при $\theta = 90^\circ$ и энергиях, соответствующим LE- и HE-режимам

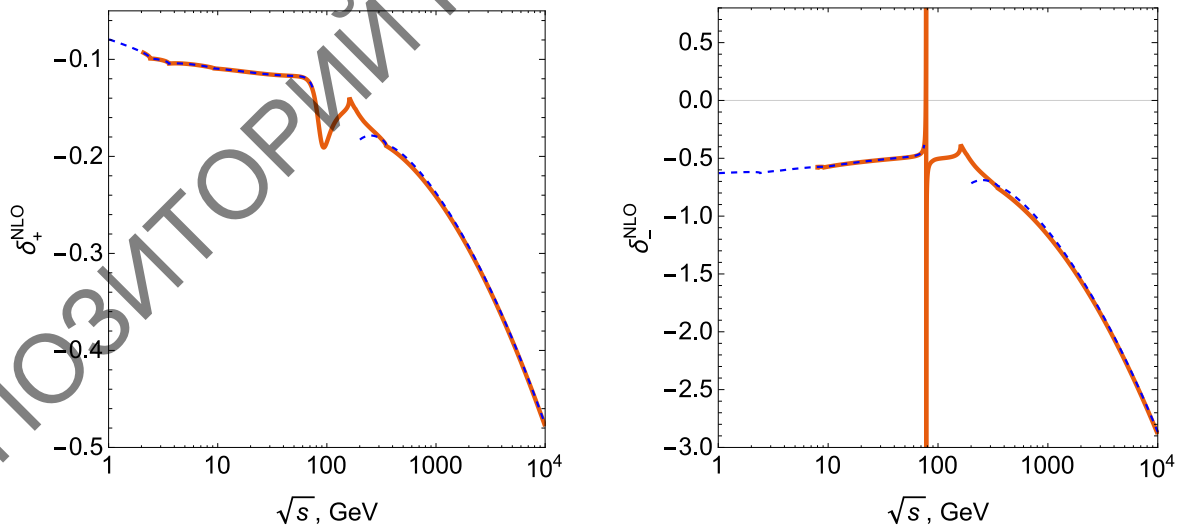


Рис. 4.8: Полные относительные поправки при $\theta = 90^\circ$

4.3 Тормозное излучение в четырёхфермионном процессе

4.3.1 Кинематика, амплитуды, сечения

Снова, как это было сделано и в предыдущих главах, позаботимся об устранении ИКР, для чего учтем тормозное излучение

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow f^-(p_3) + f^+(p_4) + \gamma(p), \quad (4.55)$$

то есть процесс, который “сопровождает” исследуемый процесс (4.1) и неотличим от него в инклюзивной постановке эксперимента (где тормозной фотон не детектируется). Новым в этой главе является то, что здесь будет выработана методика нахождения сечения радиационного процесса (4.55) с фотонами произвольной энергии выше, чем ω – жёсткого тормозного излучения, которое в сумме с безрадиационным сечением даст компактный (численно не зависящий от нефизического параметра ω) результат, соответствующий инклюзивной постановке.

Фейнмановские диаграммы процесса (4.55) соответствуют приведенным на рис. 2.16. Первые две относятся к излучению из начального состояния (ISR), две последние – к излучению из конечного состояния (FSR). Дифференциальное сечение процесса (4.55) имеет такой же вид, что и (2.135):

$$d\sigma_R = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s} \sum |R|^2 d\Phi_3.$$

Квадрированную амплитуду в этой формуле, должным образом просуммированную и усредненную по поляризациям, удобно представить как сумму ISR-части, FSR-части и INT-части – их интерференции. Чтобы удержать общий вид результата, здесь сохраняются произведения зарядов, хотя очевидно, что, например, для FSR $Q_e^2 = (-1)^2 = 1$ и, аналогично, $Q_\mu^2 \equiv Q_e Q_\mu = 1$. Таким образом:

$$\sum |R|^2 = \sum_{i,j=\gamma,Z} \left(Q_e^2 R_{\text{ISR}}^{ij} + Q_e Q_\mu R_{\text{INT}}^{ij} + Q_\mu^2 R_{\text{FSR}}^{ij} \right). \quad (4.56)$$

Приведем выражения для слагаемых в последнем выражении: ISR-часть имеет вид

$$R_{\text{ISR}}^{ij} = -\frac{1}{4} \Pi^i \Pi^{j*} \text{Sp} \left[\left(\gamma^\mu \frac{-2p_1^\rho + \hat{p}\gamma^\rho}{z_1} + \frac{2p_2^\rho - \gamma^\rho \hat{p}}{v_1} \gamma^\mu \right) (\lambda_1^{ij} - \lambda_2^{ij} \gamma_5) \hat{p}_1 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{-2p_1^\rho + \gamma^\rho \hat{p}}{z_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{2p_2^\rho - \hat{p}\gamma^\rho}{v_1} \right) \hat{p}_2 \right] \text{Sp} [\gamma_\mu (\lambda_{\mu V}^{ij} - \lambda_{\mu A}^{ij} \gamma_5) \hat{p}_4 \gamma_\nu \hat{p}_3], \quad (4.57)$$

FSR-часть может быть найдена с помощью замены:

$$R_{\text{FSR}}^{ij} = R_{\text{ISR}}^{ij}(\Pi^j \rightarrow D^j, p_{1,2} \rightarrow -p_{4,3}, \lambda_{1,2} \leftrightarrow \lambda_{\mu V, \mu A}), \quad (4.58)$$

а для интерференции находим:

$$\begin{aligned} R_{\text{INT}}^{ij} = & -\frac{1}{4} \Pi^i D^{j*} \text{Sp} \left[\left(\gamma^\mu \frac{-2p_1^\rho + \hat{p}\gamma^\rho}{z_1} + \frac{2p_2^\rho - \gamma^\rho \hat{p}}{v_1} \gamma^\mu \right) (\lambda_1^{ij} - \lambda_2^{ij} \gamma_5) \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{p}_2 \right] \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\mu (\lambda_{fV}^{ij} - \lambda_{fA}^{ij} \gamma_5) \hat{p}_4 \left(\frac{-2p_4^\rho - \gamma^\rho \hat{p}}{v} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{2p_3^\rho + \hat{p}\gamma^\rho}{z} \right) \hat{p}_3 \right] - \\ & - \frac{1}{4} D^i \Pi^{j*} \text{Sp} \left[\gamma_\mu (\lambda_1^{ij} - \lambda_2^{ij} \gamma_5) \hat{p}_1 \left(\frac{-2p_1^\rho + \hat{p}\gamma^\rho}{z_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{2p_2^\rho - \gamma^\rho \hat{p}}{v_1} \right) \hat{p}_2 \right] \times \\ & \times \text{Sp} \left[\left(\gamma^\mu \frac{-2p_4^\rho - \gamma^\rho \hat{p}}{v} + \frac{2p_3^\rho + \hat{p}\gamma^\rho}{z} \gamma^\mu \right) (\lambda_{fV}^{ij} - \lambda_{fA}^{ij} \gamma_5) \hat{p}_4 \gamma_\nu \hat{p}_3 \right]. \quad (4.59) \end{aligned}$$

Для радиационного случая появляется ещё одна пропагаторная структура:

$$\Pi^j = \frac{1}{s - z - v - m_j^2 + im_j \Gamma_j} \quad (j = \gamma, Z). \quad (4.60)$$

Сечение ТИ записано с использованием четырех радиационных инвариантов:

$$z_1 = 2p_1 p, \quad v_1 = 2p_2 p, \quad z = 2p_3 p, \quad v = 2p_4 p.$$

Они в точности совпадают с введенными в главе 2 (2.127) и обладают теми же свойствами: обращаются в нуль при $p \rightarrow 0$ и, благодаря законам сохранения, связаны соотношениями с инвариантами s, t, u :

$$z_1 + v_1 = z + v, \quad s + t + u = v + 2m_e^2 + 2m_\mu^2. \quad (4.61)$$

Опять по аналогии с главой 2 (2.129), вводятся ещё три инварианта:

$$s_1 = (p_3 + p_4)^2, \quad t_1 = (p_2 - p_4)^2, \quad u_1 = (p_1 - p_4)^2.$$

Определения всех инвариантов и их связь с входными параметрами (ими в нашей ситуации являются E – энергия электрона в с.ц.м. и косинус угла рассеяния c) в ультрарелятивистской форме приведены в табл. 4.2. Имеется существенное отличие табл. 4.2 и табл. 2.1, которое объяснено ниже.

Сконструируем дифференциальное сечение по углу рассеяния, для чего поработаем с фазовым объёмом $d\Gamma_3$. Для начала преобразуем его в форму с четырьмя инвариантами и определителем Грама $-\Delta_4$ [20] (M -метод):

$$d\Gamma_3 = \frac{\pi}{16s} \frac{dt dv dz dv_1}{\sqrt{-\Delta_4}}. \quad (4.62)$$

Табл. 4.2: Инварианты для безрадиационного и радиационного случаев

Инвариант	Безрадиационный случай	Радиационный случай
$s = (p_1 + p_2)^2$	$4E^2$	$4E^2$
$t = (p_1 - p_3)^2$	$-s \cdot c_T$	$(x - z - s) \cdot c_T$
$u = (p_2 - p_3)^2$	$-s \cdot c_U$	$(x - z - s) \cdot c_U$
$z_1 = 2pp_1$	0	$x - v_1$
$v_1 = 2pp_2$	0	v_1
$z = 2pp_3$	0	z
$v = 2pp_4$	0	$x - z$
$x = z + v$	0	x
$s_1 = (p_3 + p_4)^2$	s	$s - x$
$t_1 = (p_2 - p_4)^2$	t	$t - v + v_1$
$u_1 = (p_1 - p_4)^2$	u	$u - v_1 + z$

От инварианта t , который в радиационном случае в с.ц.м. имеет вид:

$$t = \frac{1}{2} \left(2m_e^2 + 2m_\mu^2 - s + v + c \cdot \sqrt{\frac{s - 4m_e^2}{s}} \sqrt{(s - v)^2 - 4m_\mu^2 s} \right), \quad (4.63)$$

следует перейти к косинусу угла рассеяния c . В результате в фазовом объёме появляется якобиан $(s - v)/2$, а дифференциальное сечение ТИ по углу рассеяния приобретает форму:

$$\sigma_R = \frac{\alpha^3}{8\pi s} \iiint \frac{dvdzdv_1}{\sqrt{-\Delta_4}} \frac{s - v}{s} \sum |R|^2 \theta(-\Delta_4). \quad (4.64)$$

Разобъём область интегрирования в (4.64) на две области, используя как разделитель максимальную энергию мягкого фотона ω . Символически запишем это так:

$$\iiint = \iiint_{p_0 \leq \omega} + \iiint_{\omega \leq p_0 \leq \Omega}. \quad (4.65)$$

Первое слагаемое обозначим $\sigma^\gamma(\omega)$, оно относится к мягкому ТИ. Второе обозначим $\sigma^\gamma(\omega, \Omega)$, оно зависит также и от Ω – максимальной энергии фотона в с.ц.м., и относится к жёсткому ТИ.

4.3.2 Мягкие фотоны. Сокращение ИКР

Следуем методу, описанному в главе 2 (как уже говорилось, он восходит к работам Берендса с соавторами [161] и 'т Хофта–Велтмана [272]). На пу-

ти к результату рассчитывается трехмерный интеграл по фазовому объёму мягкого фотона:

$$L(\lambda, \omega) = -\frac{1}{\pi} \iiint_{p_0 < \omega} \frac{d^3 p}{p_0} \left(\frac{p_1^\alpha}{z_1} - \frac{p_2^\alpha}{v_1} + \frac{p_3^\alpha}{z} - \frac{p_4^\alpha}{v} \right)^2 = -\delta_1^\lambda + R_1, \quad (4.66)$$

где

$$R_1 = -4B \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega} - \sum_{g=e,\mu} \left(\ln \frac{m_g^2}{s} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_g^2}{s} + \frac{\pi^2}{3} \right) - 2\text{Li}_2 \frac{-t}{u} - 2\text{Li}_2 \frac{-u}{t}. \quad (4.67)$$

Все необходимые “мягкие” интегралы вычислены в разд. 6.7.

Чтобы получить (4.66), требуется выделить в выражениях (4.57)–(4.59) множители типа p_1^α/z_1 , затем произвести факторизацию борновского сечения. В результате получаем компактную запись:

$$\sigma^\gamma(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} [-\delta_1^\lambda + R_1] \sigma_0. \quad (4.68)$$

Настало время сократить ИКР:

$$\sigma_1^\lambda + \sigma^\gamma(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \delta_1^\lambda \sigma_0 + \frac{\alpha}{\pi} [-\delta_1^\lambda + R_1] \sigma_0 = \frac{\alpha}{\pi} R_1 \sigma_0, \quad (4.69)$$

здесь видно, что в сумме однопетлевого вклада от дополнительных виртуальных частиц (4.25) и вклада мягких фотонов (4.68) зависимость от λ аналитически сокращается.

4.3.3 Жесткие фотоны. Сокращение параметра ω

Сечение $\sigma^\gamma(\omega, \Omega)$, соответствующее вкладу жестких фотонов, зависит и от ω , и от Ω . Зависимость от ω искусственна, далее придется от нее избавляться, а вот зависимость от Ω , напротив, физична: для адекватных измерений требуется отступить от края области интегрирования по энергии тормозного фотона. В с.д.м. запишем это так: $\Omega = \sqrt{s}/2 - E'_{\text{cut}}$. Сечение, которое предстоит посчитать, выпишем в явном виде:

$$\sigma^\gamma(\omega, \Omega) = \frac{\alpha^3}{8\pi s} \iiint_{\omega \leq p_0 \leq \Omega} \frac{dvdzdv_1}{\sqrt{-\Delta_4}} \frac{s-v}{s} \sum |R|^2 \theta(-\Delta_4). \quad (4.70)$$

Область интегрирования по трём переменным показана на рис. 4.9.

Прямое численное интегрирование (4.70) возможно с использованием, например, техники Монте-Карло, однако оно сопровождается проблемами.

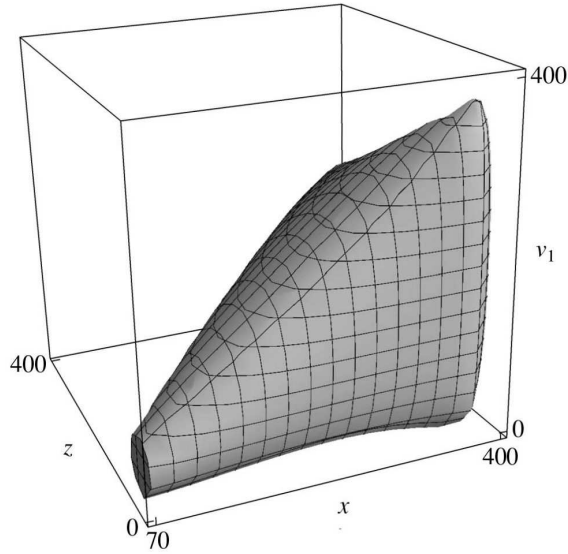


Рис. 4.9: Область интегрирования сечения жёсткого ТИ по трём переменным для реакции (4.55) с энергией $E = 10$ ГэВ

Как основные выделим медленную сходимость и трудность контроля точности. Итак, ставится задача проинтегрировать (4.70) аналитически. Имеются работы, в которых развита техника интегрирования по полному фазовому объёму тормозного фотона в рамках ковариантного метода устранения ИКР Бардина–Шумейко [109], [110]. Область интегрирования в (4.70) имеет существенно другой вид – она обрезана двумя нековариантными параметрами ω и Ω , однако есть возможность преодолеть эту сложность, грамотно выбрав переменные интегрирования (их вид и последовательность интегрирования).

Вид пропагатора (4.60), который наиболее труден для интегрирования, подсказывает, что если сделать замену переменных:

$$(v_1, z, v) \rightarrow (v_1, z, x), \quad \text{где } x = z + v,$$

и интегрировать по x в последнюю очередь, то список возможных интегралов по двум остающимся переменным значительно сократится. Область интегрирования по переменным x и z показана на рис. 4.10.

Для наглядности значения массы мюона при построении рис. 4.10 искусственно завышены (в 25 раз). Принимая во внимание, что в с.ц.м. начальных частиц энергия фотона выражается так: $p_0 = (v + z)/\sqrt{4s}$, заключаем, что минимальное значение переменной x в точности равно $2\omega\sqrt{s}$ (левая вертикальная линия на рис. 4.10), а максимальное равно $2\Omega\sqrt{s}$ (правая верти-

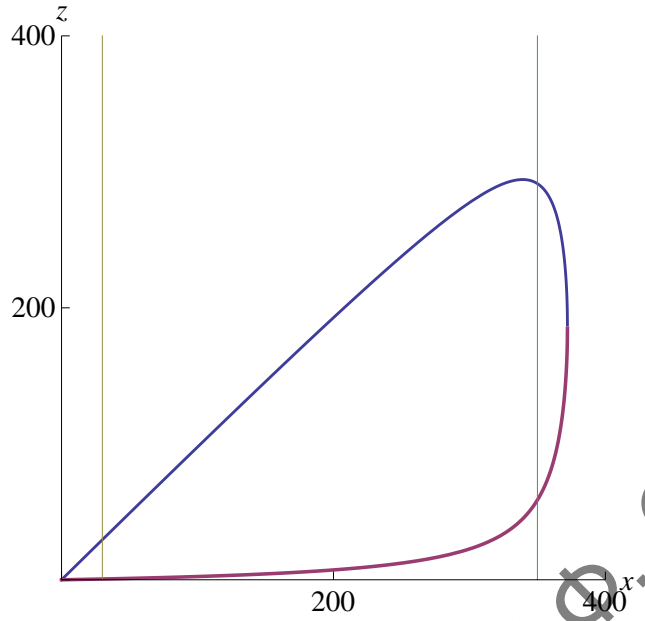


Рис. 4.10: Область интегрирования сечения жёсткого ТИ по переменным x и z для реакции (4.55) с энергией $E = 10$ ГэВ. Левая и правая вертикальные линии обрезают область в соответствии с энергией тормозного фотона в с.д.м., их уравнения: $x = 2\sqrt{s}\omega$ и $x = 2\sqrt{s}\Omega$

кальная линия на рис. 4.10), и тройной интеграл в (4.70) принимает вид:

$$\int_{2\omega\sqrt{s}}^{2\Omega\sqrt{s}} dx \cdot J[f(z, v_1)], \quad \text{где } J[f(z, v_1)] = \int_{z_-}^{z_+} dz \int_{v_{1+}}^{v_{1-}} \frac{dv_1}{\pi\sqrt{-\Delta_4}} f(z, v_1). \quad (4.71)$$

Здесь $v_{1\pm}$ – корни определителя Грама по переменной v_1 (заметим, что интегралы по v_1 были рассчитаны автором для другой задачи [224]). Пределы изменения переменной z такие:

$$z_{\pm} = \frac{x}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s_1}} \right), \quad s_1 = s - x. \quad (4.72)$$

Раскладывая определитель Грама по степеням переменных интегрирования, получим выражение четвёртой степени:

$$-\Delta_4 = (a_2 z^2 + b_2 z + c_2) v_1^2 + 2(a_1 z^2 + b_1 z + c_1) v_1 + (a_0 z^2 + b_0 z + c_0). \quad (4.73)$$

Приведем ультрарелятивистские выражения для коэффициентов в разложении (4.73), они полезны при нахождении $J[f]$, например, для определения

знака, знание которого необходимо при аналитическом интегрировании:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1, & a_1 &= c_U s_U - c_T(s + c_U x), & a_0 &= s_U^2, \\ b_2 &= 2s_1, & b_1 &= s_1(c_U(s - 2c_U x) - c_T(s + 2c_U x)), & b_0 &= -2c_U s_1 x s_U, \\ c_2 &= s_1^2, & c_1 &= -c_U s_1^2 x, & c_0 &= c_U^2 s_1^2 x^2. \end{aligned}$$

Здесь введены комбинации c :

$$c_T = \frac{1 - c}{2}, \quad c_U = \frac{1 + c}{2}. \quad (4.74)$$

В дальнейшем будут полезны также две переменные:

$$s_T = s - c_T x, \quad s_U = s - c_U x. \quad (4.75)$$

Теперь можно приступить непосредственно к нахождению интегралов $J[f]$. Работа эта технически несложная, но требующая аккуратности. Очень помогает в работе сверка с результатами численного интегрирования (использовался Монте-Карло код VEGAS [264]). Встретившиеся интегралы вычислены в работе [276] и приведены в разд. 6.11.

Имеется восемь ($B_{1,\dots,8}$) инфракрасно расходящихся (при $\omega \rightarrow 0$) и 25 ($A_{0,\dots,24}$) инфракрасно конечных (в том же смысле) интегралов. ИКР остается в интегралах B в виде $\sim \frac{1}{x}$, также она “выживает” в выражениях, возникших после разложений:

$$\frac{1}{vz} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{z} \right), \quad \frac{1}{v_1 z_1} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{z_1} \right).$$

Собирая все вклады в однопетлевое сечение, получим:

$$\sigma^{\text{NLO}} = \sigma_1 + \sigma^\gamma(\omega) + \sigma^\gamma(\omega, \Omega). \quad (4.76)$$

Чтобы убедиться, что σ^{NLO} не зависит от ω , представим подынтегральное выражение сечения ТИ $\sigma^\gamma(\omega, \Omega)$ в виде суммы:

$$Y = (Y - Y|_{x \rightarrow 0}) + Y|_{x \rightarrow 0}. \quad (4.77)$$

Соответственно, сечение ТИ разобьется так:

$$\sigma^\gamma(\omega, \Omega) = \sigma^{\gamma,1}(\omega, \Omega) + \sigma^{\gamma,2}(\omega, \Omega)|_{\omega \rightarrow 0}. \quad (4.78)$$

Видно, что зависимость от ω остается только в первом слагаемом. Переменная x факторизуется в нем в виде $\frac{1}{x}$, а коэффициентом при этом факторе

будет борновское сечение. В итоге получим:

$$\sigma^{\gamma,1}(\omega, \Omega) = \frac{4\alpha}{\pi} B \sigma_0 \int_{2\omega\sqrt{s}}^{2\Omega\sqrt{s}} \frac{dx}{x} = \frac{4\alpha}{\pi} B \ln \frac{\Omega}{\omega} \sigma_0.$$

Суммируя с V -вкладом, получим аналитическое сокращение ω :

$$\sigma^{\text{NLO}} = \sigma_1 + \sigma^\gamma(\Omega) + \sigma^{\gamma,2}(0, \Omega). \quad (4.79)$$

Может сложиться впечатление, что полученное сокращение очевидно, поскольку параметр ω вводится, как говорят, “руками” [см. (4.65)]. В общем, это так и есть, однако следует отметить, что на конечном этапе расчёта (после всех сложностей интегрирования, многочисленных подстановок, программирования и т. д.) именно проверка независимости от ω выполняет функцию надежного теста правильности расчёта.

4.3.4 Инклюзивная поправка конечного состояния

Приведем финальный результат для сечения жёсткого излучения, который используется для программирования и дальнейшего анализа:

$$\sigma^\gamma(\omega, \Omega) = \frac{\alpha^3}{2} \int_{2\sqrt{s}\omega}^{2\sqrt{s}\Omega} \text{Re} \sum_C \left(P_V^C Z_V^C + P_A^C Z_A^C \right) dx, \quad (4.80)$$

где индекс C пробегает значения: $C = \text{ISR}, \text{FSR}, \text{INT}$, а

$$\begin{aligned} P_{V(A)}^{\text{ISR}} &= \sum_{i,j=\gamma,Z} \Pi^i \Pi^{j*} \lambda_{+(-)}^{ijij}, & P_{V(A)}^{\text{FSR}} &= \sum_{i,j=\gamma,Z} D^i D^{j*} \lambda_{+(-)}^{ijij}, \\ P_{V(A)}^{\text{INT}} &= \sum_{i,j=\gamma,Z} \Pi^i D^{j*} \lambda_{+(-)}^{ijij}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Выражения Z_V^C и Z_A^C громоздки и требуют предварительного упрощения. Подходящим способом является “обезразмеривание”, для чего перепишем интегралы из приведенной в работе [276] таблицы следующим образом:

$$D_{1-4} = sB_{1-4}, \quad D_{5-8} = s^2B_{5-8}, \quad C_0 = A_0, \quad C_1 = A_1/s^2, \dots$$

Видно, что в результате выражения C_{0-24} и D_{1-8} стали безразмерными. Разложим Z_V^C и Z_A^C в (конечные) ряды по x :

$$Z_V^C = \sum_{n=-1}^4 V_n^C \left(\frac{x}{s} \right)^n, \quad Z_A^C = \sum_{n=-1}^4 A_n^C \left(\frac{x}{s} \right)^n. \quad (4.82)$$

Безразмерные коэффициенты V_n^C и A_n^C выражаются через C_{0-24} , D_{1-8} , они приведены также в работе [276].

Если в финальном результате:

1. “выключить” поляризацию и вклад Z -бозонов,
2. выделить из результата FSR-часть,
3. проинтегрировать получившееся выражение по углу рассеяния по всей физической области $-1 \leq c \leq +1$,
4. проинтегрировать FSR-часть жёсткого ТИ (4.80) по полному фазовому пространству тормозного фотона [до значения $\Omega = \sqrt{s}/2$, см. (2.161)],
5. сложить все вклады, факторизовав полное неполяризованное борновское сечение КЭД $\sigma_0^T = 4\pi\alpha^2/3s$, и разложить в ряд по малому параметру ω/\sqrt{s} ,

то в УРП получится известный результат:

$$\left[\frac{3\alpha}{4\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\omega}{\sqrt{s}}\right) \right] \cdot \sigma_0^T$$

(см., например, формулу (2.290) в книге [88]) – так называемая *инклюзивная поправка конечного состояния*.

Приведем некоторые промежуточные результаты, приводящие к этому выражению. После выполнения первых трех пунктов, перечисленных выше, FSR-часть полного неполяризованного сечения, соответствующего однопетлевым виртуальным диаграммам, и вклада мягкого ТИ выглядит так:

$$\sigma_{1,\text{FSR}}^T = \sigma_0^T \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{s}{m_\mu^2} + \frac{\pi^2}{3} - 2 - \left(\ln \frac{s}{m_\mu^2} - 1 \right) \ln \frac{s}{4\omega^2} \right).$$

Соответствующая часть жёсткого ТИ имеет вид:

$$\sigma_{2,\text{FSR}}^T = \sigma_0^T \frac{\alpha}{\pi} \int_{2\sqrt{s}\omega}^s \frac{dx}{x} \left(\ln \frac{s-x}{m_\mu^2} - 1 \right) \left[1 + \left(1 - \frac{x}{s} \right)^2 \right].$$

Чтобы получить инклюзивную поправку конечного состояния, остается снять интеграл, просуммировать и упростить сумму, как описано в последнем пункте.

4.3.5 Двухпетлевые ЭМП конечного состояния

Вклад конечного состояния в ЭМП – это простейший, но важный с точки зрения решения таких принципиальных вопросов, как процедура (порядок выполнения, методически правильное использование обозначений) сокращения ИКР, доказательство независимости от параметра, разделяющего области мягких и жестких фотонов и выяснение точной формы коэффициентов при старших степенях CL . Он принципиально важен, например, при адсорбции коллинеарных логарифмов в функции партонных распределений для решения проблемы кварковой массовой сингулярности в ISR, и в функции фрагментации в FSR.

На однопетлевом уровне КЭД-поправки конечного состояния были вычислены выше. Приведем результаты для отдельных вкладов в мягкофотонном приближении в несколько измененных обозначениях, придерживаясь работы [277], они складываются из двух частей: 1) вклад от диаграмм с наличием виртуальной частицы, 2) вклад однофотонного излучения из конечного состояния (мягкого и жёсткого). Тогда сечение запишем так:

$$\sigma_{\text{NLO}} = \sigma_V + \sigma_R. \quad (4.83)$$

В мягкофотонном приближении сечения вкладов пропорциональны борновскому и выглядят так:

$$\sigma_V = 2\text{Re}F^{(1)}(s)\sigma_0, \quad \sigma_R = \delta_1^S \sigma_0. \quad (4.84)$$

Действительная часть однопетлевого s -канального формфактора выглядит так:

$$\text{Re}F^{(1)}(s) = \frac{\alpha}{\pi} \left[-\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{2}L_\lambda L + \frac{3}{4}L - \frac{1}{2}L_\lambda - 1 + \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (4.85)$$

В сечении излучения мягкого фотона факторизуется поправка:

$$\delta_1^S = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2}L^2 - L_\lambda L + 2L_\omega L + L_\lambda - 2L_\omega - \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (4.86)$$

Как на однопетлевом, так и на двухпетлевом уровне все значимые результаты выражаются через три логарифма: коллинеарный L , инфракрасный L_λ и мягкий L_ω :

$$L = \ln \frac{s}{m^2}, \quad L_\lambda = \ln \frac{\lambda^2}{m^2}, \quad L_\omega = \ln \frac{2\omega}{\sqrt{s}}. \quad (4.87)$$

Легко заметить, что вклад с излучением мягкого фотона можно преобразовать к виду

$$\delta_1^S = \frac{\alpha}{\pi} \left[A \ln \frac{\omega}{\lambda} - B \right], \quad (4.88)$$

где

$$A = 2(L - 1), \quad B = \frac{1}{2}L^2 - L + \frac{\pi^2}{3} - 2(L - 1) \ln 2. \quad (4.89)$$

Из (4.88) видно, что зависимость от λ “вымирает” при стремлении $\omega \rightarrow \lambda$, это свойство нам пригодится в дальнейшем.

Складывая сечения в формуле, легко заметить сокращение старших степеней CL (второй степени в первой петле) и сокращение ИКР (логарифмы L_λ взаимно уничтожаются). В результате получим известный результат:

$$\sigma_{\text{NLO}} = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{3}{2}L + 2(L - 1)L_\omega - 2 + \frac{\pi^2}{3} \right] \sigma_0. \quad (4.90)$$

Чтобы оценить сечение на двухпетлевом уровне, нужно рассчитать

1. Q -часть: квадратичный (Quadratic) вклад, то есть квадрат однопетлевых NLO FSR поправок,
2. T -часть: двухпетлевой (Two-loop) вклад,
3. O -часть: однофотонное (One-photon) излучение из диаграмм с одним виртуальным фотоном,
4. D -часть: двухфотонное (Double-photon) излучение.

Если действовать в приближении мягких фотонов, то нужно учесть тот факт, что сечение процесса с излучением двух мягких фотонов, каждый с энергией, меньшей ω (это D -часть согласно используемой терминологии), отличается от сечения процесса с излучением двух мягких фотонов с суммарной энергией, меньшей ω . Разницу будем называть K -частью (обозначим её σ_K) и во втором случае (с ограничением на суммарную энергию), который и соответствует экспериментальной постановке. Эту разницу нужно вычесть из сечения, соответствующего первому случаю. С учётом вышесказанного, чтобы получить требуемое сечение на двухпетлевом уровне, нужно суммировать Q -, T -, O -, D -части и вычесть K -часть:

$$\sigma_{\text{NNLO}} = \sigma_Q + \sigma_T + \sigma_O + \sigma_D - \sigma_K.$$

Q -часть – результат квадрирования однопетлевой амплитуды:

$$\sigma_Q = |F^{(1)}(s)|^2 \sigma_0. \quad (4.91)$$

Замечаем, что здесь принципиально требуется учёт мнимой части вершинного формфактора, приведем его:

$$\text{Im}F^{(1)}(s) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \left[L - L_\lambda - \frac{3}{2} \right]. \quad (4.92)$$

Как видно, мнимая часть содержит ИКР (а при квадрировании и ведущую степень CL) и не может быть проигнорирована. T -часть имеет вид:

$$\sigma_T = 2\text{Re}F^{(2)}(s)\sigma_0. \quad (4.93)$$

Эта часть сечения вычислена в рамках схемы перенормировки на массовой поверхности в работе [277] и в наших обозначениях выглядит так:

$$\begin{aligned} \text{Re}F^{(2)}(s) = & \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{32}L^4 - \frac{3}{16}L^3 + \left(\frac{17}{32} - \frac{5}{4}\zeta_2 \right) L^2 + \right. \\ & + \left(-\frac{21}{32} + 3\zeta_2 + \frac{3}{2}\zeta_3 \right) L + \frac{2}{5}\zeta_2^2 - \frac{9}{4}\zeta_3 - 3\zeta_2 \ln 2 - \\ & - \frac{1}{2}\zeta_2 + \frac{405}{216} + L_\lambda^2 \left(\frac{1}{8}L^2 - \frac{1}{4}L + \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\zeta_2 \right) + \\ & \left. + L_\lambda \left(-\frac{1}{8}L^3 + \frac{1}{2}L^2 + \left(-\frac{7}{8} + \frac{5}{2}\zeta_2 \right) L + \frac{1}{2} - \frac{13}{4}\zeta_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Видно, что это выражение содержит нефизические степени CL (четвёртую и третью), которым предстоит сократиться, и значения дзета-функции Римана $\zeta_2 = \pi^2/6$, $\zeta_3 \approx 1.202057$.

O - и D -части имеют интуитивно понятный и известный вид:

$$\sigma_O = \delta_1^S \cdot 2\text{Re}F^{(1)}(s)\sigma_0, \quad \sigma_D = \frac{1}{2}(\delta_1^S)^2 \sigma_0. \quad (4.94)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ обусловлен тождественностью фотонов. Отметим, что сечение σ_D имеет минимум в точке $\omega = \lambda e^{B/A}$ (при $\omega < \lambda e^{B/A}$ сечение падает). Не следует забывать, что должны выполняться и неравенства: $\lambda \ll m \ll \omega$. Наконец, K -часть имеет вид (см. точный вывод этой формулы в разд. 6.8):

$$\sigma_K = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \pi^2 (L-1)^2 \sigma_0. \quad (4.95)$$

Суммируя все вклады, получаем компактный результат [278], который не содержит ИКР и старших (третьей и четвёртой) степеней \mathcal{L} :

$$\sigma_{\text{NNLO}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 [c_2 L^2 + c_1 L + c_0] \sigma_0, \quad (4.96)$$

где коэффициенты при степенях \mathcal{L} имеют вид:

$$\begin{aligned} c_2 &= 2L_\omega^2 + 3L_\omega - 2\zeta_2 + \frac{9}{8}, \\ c_1 &= -4L_\omega^2 + L_\omega(4\zeta_2 - 7) + \frac{11}{2}\zeta_2 + 3\zeta_3 - \frac{45}{16}, \\ c_0 &= 2L_\omega^2 + 4L_\omega(1 - \zeta_2) - \frac{6}{5}\zeta_2^2 + \frac{3}{8}\zeta_2 - 6\zeta_2 \ln 2 - \frac{9}{2}\zeta_3 + \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

4.4 Численные результаты и выводы

В этом разделе произведен численный анализ полученных результатов для ЭСП. Подробно исследованы угловые зависимости, зависимость от энергии и ограничений на энергию детектируемого мюона. Минимальную энергию детектируемого мюона в с.ц.м. определим так: $\Omega = (\frac{1}{2} - \gamma)\sqrt{s}$, тогда параметр γ лежит в интервале $0 < \gamma < \frac{1}{2} - \frac{\omega}{\sqrt{s}}$. Везде, где это не оговаривается, за γ берем 0.01 (хотя такая постановка нетипична для экспериментов, зависимость от γ также исследуется).

Введем индекс C , означающий тип вклада в наблюдаемую величину, который может принимать следующие значения: $C = \{0, \text{NLO}, 0+\text{NLO}\}$. Относительная поправка к неполяризованному сечению (обозначим её индексом 00) определяется так:

$$\delta_{00} = \frac{\sigma_L^{\text{NLO}} + \sigma_R^{\text{NLO}}}{\sigma_L^0 + \sigma_R^0} = \frac{\sigma_{00}^{\text{NLO}}}{\sigma_{00}^0}, \quad (4.97)$$

где L и R означают степени поляризации электрона $p_B = -1$ и $p_B = +1$, соответственно. Относительная поправка к неполяризованному полному сечению определяется аналогично:

$$\delta_T = \frac{\sigma_F^{\text{NLO}} + \sigma_B^{\text{NLO}}}{\sigma_F^0 + \sigma_B^0} = \frac{\sigma_T^{\text{NLO}}}{\sigma_T^0}, \quad (4.98)$$

где сечения рассеяния вперёд (индекс F) и назад (индекс B) с обрезанием

на угол a от оси пучка выглядят так:

$$\sigma_F^C = \int_0^{\cos a} \sigma_{00}^C \cdot d(\cos \theta), \quad \sigma_B^C = \int_{-\cos a}^0 \sigma_{00}^C \cdot d(\cos \theta).$$

Дополнительно поясним, что сечения с индексами F, B, T – это сечения “полные” (то есть проинтегрированные по углу), в отличие от дифференциальных сечений, которые обозначаются индексами $L, R, 00$.

Поляризационная асимметрия определяется как и раньше [см. (2.28), (3.11)]:

$$A_{LR}^C = \frac{\sigma_L^C - \sigma_R^C}{\sigma_L^C + \sigma_R^C}. \quad (4.99)$$

Асимметрия вперёд-назад определяется аналогично [см. (2.36)]:

$$A_{FB}^C = \frac{\sigma_F^C - \sigma_B^C}{\sigma_F^C + \sigma_B^C}. \quad (4.100)$$

Наконец, относительные NLO поправки к борновским асимметриям определяются выражениями:

$$\delta_{LR} = \frac{A_{LR}^{0+NLO} - A_{LR}^0}{A_{LR}^0}, \quad \delta_{FB} = \frac{A_{FB}^{0+NLO} - A_{FB}^0}{A_{FB}^0}. \quad (4.101)$$

Прежде всего проведем тест независимости результата от параметра ω . В табл. 4.3 при $E = 10$ ГэВ показано, что относительные поправки δ_{00} и δ_{LR} (для них выбран $\theta = 40^\circ$), и δ_T и δ_{FB} (для них выбран $a = 10^\circ$) при малом $\omega/\sqrt{s} \leq 10^{-3}$ не зависят от ω с точностью лучше промилле.

Табл. 4.3: Тест зависимости относительных поправок от ω при $E = 10$ ГэВ (для поправок δ_{00} и δ_{LR} выбран $\theta = 40^\circ$, для δ_T и δ_{FB} выбран $a = 10^\circ$)

ω/\sqrt{s}	δ_{00}	δ_{LR}	δ_T	δ_{FB}
0.000001	0.29874	-0.46097	0.28717	-0.46637
0.000010	0.29874	-0.46097	0.28717	-0.46637
0.000100	0.29875	-0.46096	0.28718	-0.46632
0.001000	0.29881	-0.46081	0.28727	-0.46578
0.010000	0.29945	-0.45934	0.28815	-0.46041

Другой тест отображен в табл. 4.4. В ней приведена относительная поправка δ_{00} при энергии Belle II для процесса $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+(\gamma)$ без учёта

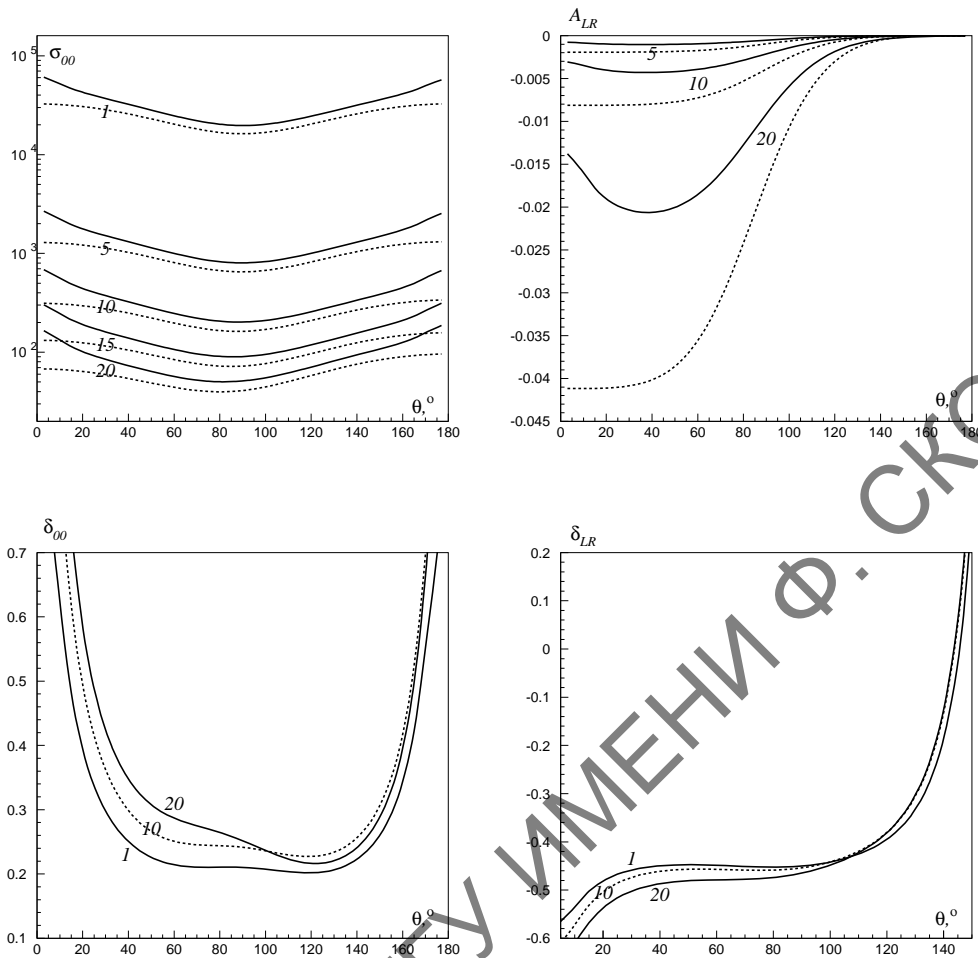


Рис. 4.11: Зависимость неполяризованного сечения (первый), поляризационной асимметрии (второй) [штриховые кривые – борновский случай, сплошные – с учётом однопетлевых ЭСП], относительных поправок к неполяризованному сечению (третий) и поляризационной асимметрии (четвёртый) от угла θ при различных энергиях и $\gamma = 0.01$

жестких фотонов при $\omega = 0.05\sqrt{s}$ в зависимости от θ . В первой строке записаны рассчитанные значения δ_{00} в ультрарелятивистском приближении по асимптотическим формулам данной работы, во второй строке – значения δ_{00} для точного расчёта с учётом всех лептонных масс с применением `FeynArts/FormCalc`. Видно хорошее согласие значений, свидетельствующее о правомерности проведенных приближений.

На рис. 4.11–4.13 представлен численный анализ наблюдаемых величин (полных сечений рассеяния, поляризационной асимметрии, асимметрии вперёд-назад и относительных поправок к ним) в зависимости от θ , γ и a при различных энергиях электрона в с.ц.м. (энергии электрона в ГэВ обозначены

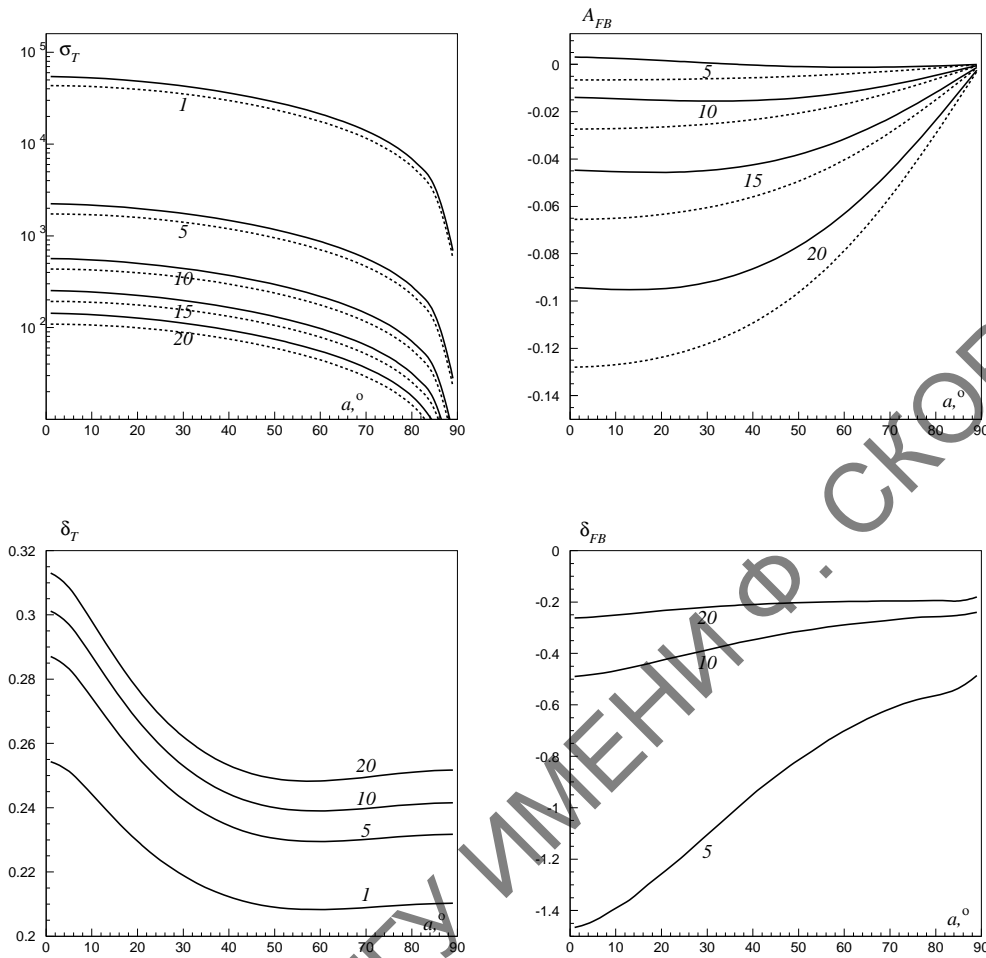


Рис. 4.12: Зависимость полного сечения (первый), асимметрии вперед-назад (второй) [штриховые кривые – борновский случай, сплошные – с учётом однопетлевых ЭСП] относительных поправок к полному сечению (третий) и асимметрии вперед-назад (четвёртый) от угла a при различных энергиях и $\gamma = 0.01$

Табл. 4.4: Относительная поправка δ_{00} при энергии Belle II без учёта жестких фотонов при $\omega = 0.05\sqrt{s}$ в зависимости от θ , рассчитанная двумя способами

$\theta, ^\circ$	30	50	70	90	110	130	150	170
асимпт.	-0.0492	-0.0775	-0.0971	-0.1138	-0.1305	-0.1504	-0.1788	-0.2421
точн.	-0.0487	-0.0777	-0.0970	-0.1137	-0.1304	-0.1501	-0.1782	-0.2411

ны цифрами на кривых).

Как видно из рис. 4.11–4.13, масштаб радиационных эффектов значителен, что не позволит игнорировать их в экспериментах типа Belle II. Новая

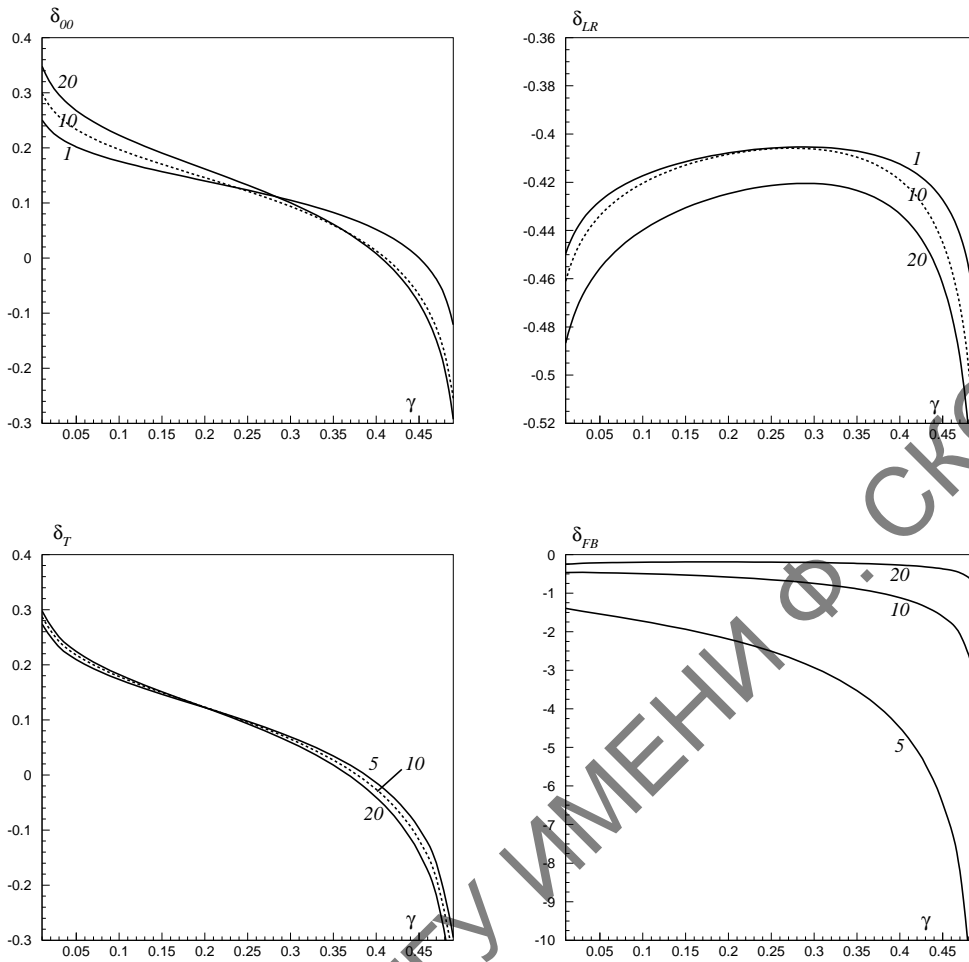


Рис. 4.13: Зависимость относительных поправок к неполяризованному сечению (первый), поляризационной асимметрии (второй) [при $\theta = 40^\circ$ и различных энергиях], относительных поправок к полному сечению (третий) и асимметрии вперёд-назад (четвёртый) [при $a = 10^\circ$] от γ при различных энергиях

методика прецизионного учёта жёсткого ТИ, представленная здесь, удовлетворяет предъявляемым высоким требованиям к теоретической оценке наблюдаемых величин в рамках СМ.

5 ПРОЦЕСС ДРЕЛЛА – ЯНА



Рис. 5.1: Сидни Дэвид Дрелл (Sidney David Drell; 1926–2016) – американский физик-теоретик. Дунмау Ян (Tung-Mow Yan, 1937) – тайванский и американский физик

В своих работах [25], [26] физики С. Дрелл и Д. Ян впервые¹ изучили жесткий процесс рождения лептонной пары в адронных столкновениях. Этот процесс, впоследствии названный именами Дрелла и Яна, впервые был экспериментально исследован в BNL [24]. В результате кварк-партоновая модель (КПМ) получила подтверждение и, более того, квантовая хромодинамика заявила о себе как о теории, адекватно описывающей сильные взаимодействия и согласующейся с принципами КПМ.

В настоящее время тестирование нового энергетического масштаба (тысячи ГэВ) в идущих полным ходом экспериментах на LHC (то есть поиск на нём явлений НФ, который является одной из главных задач современной физики, см. подробное обсуждение в главе 1), будет во многом осуществлено с помощью исследования наблюдаемых величин (сечений и асимметрии вперёд-назад) процесса Дрелла – Яна при больших инвариантных массах

¹Примерно в это же время появилась работа [27] советских ученых на сходную тему.

лептонной пары (или дилептона) l^-l^+ . В мае 2021 г. начнется Run3 (он продлится до конца 2024 г.), в котором будет реализована максимальная запланированная энергия $\sqrt{S} = 14$ ТэВ, собрана статистика до 300 fb^{-1} и промерена область по инвариантной массе пары 4.6–5.2 ТэВ, до 2035 г. (предположительно последний год работы ЛHC) планируется собрать 3000 fb^{-1} и промерить область 5.6–6.2 ТэВ.

5.1 Описание процесса

Процесса Дрелла–Яна – рождение лептонной пары в столкновении адронов h_A и h_B – обычно описывается формулой:

$$h_A + h_B \rightarrow l^- + l^+ + X, \quad (5.1)$$

где начальные адроны имеют 4-импульсы P_A (первый) и P_B (второй); они имеют равные массы m_N . Будем использовать адронный инвариант $S = (P_A + P_B)^2$ (в наших обозначениях это заглавная буква, иногда в литературе используется и строчная, а для описания процесса столкновения ядер также символ S_N [от “atomic Nucleus”]). В с.ц.м. адронов (будем её сокращенно обозначать “с.ц.м.а.”) полная энергия реакции равна, соответственно, \sqrt{S} .

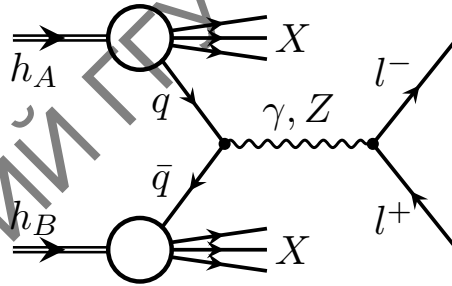


Рис. 5.2: Процесс Дрелла – Яна. На линиях указаны названия частиц

Для описания *партоновых процессов*²

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma, Z \rightarrow l^-(p_3) + l^+(p_4), \quad (5.2)$$

$$\bar{q}(p_1) + q(p_2) \rightarrow \gamma, Z \rightarrow l^-(p_3) + l^+(p_4) \quad (5.3)$$

будем пользоваться теми же обозначениями 4-импульсов, что и для s -канала процесса рассеяния Баба (см. главу 2). Фейнмановские диаграммы, соответ-

²Термин “партон” ввёл Фейнман – автор КПМ – в 1960-х гг. Партон происходит от слова “part” – то есть структурная часть адрона. Часто партоновый процесс называют также подпроцессом или субпроцессом, а если имеется в виду конкретное начальное состояние, то кварковым ($q\bar{q}, \bar{q}q$), или кварк-глюонным (qg), или кварк-фотонным ($q\gamma$) подпроцессом.

ствующие процессам (5.2), (5.3) в борновском приближении, приведены на рис. 5.3.

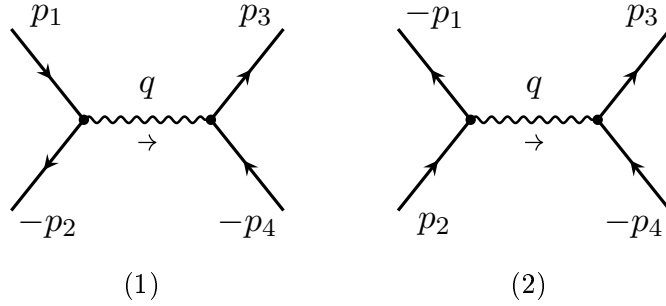


Рис. 5.3: Фейнмановские диаграммы процессов $q\bar{q} \rightarrow l^-l^+$ и $q\bar{q} \rightarrow l^-l^+$

Обозначения на рис. 5.3 следующие: p_1 – 4-импульс первого кварка или антикварка с ароматом q и массой m_q ; p_2 – 4-импульс второго кварка или антикварка (с тем же ароматом и массой); их сумма: $q_s = p_1 + p_2$; p_3 (p_4) – 4-импульс конечного лептона l^- (l^+) с массой m ; $q_{s_1} = p_3 + p_4$ – 4-импульс i -бозона с массой m_i (инвариантная масса дилептонной пары $M = \sqrt{q_{s_1}^2}$), для определенности будем рассматривать в качестве лептона мюон, то есть $l = \mu$. Для безрадиационной кинематики нет различия между q_s и q_{s_1} , в этой ситуации помним, что $q = q_s = q_{s_1}$.

Будем рассматривать общий случай продольно поляризованных адронов, второй случай – первый адрон поляризован, а второй – нет и, наконец, третий случай неполяризованных адронов. В УРП векторы продольной поляризации адронов связаны с 4-векторами соотношениями:

$$\eta_N^A = p_N^A \frac{P_A}{m_N}, \quad \eta_N^B = p_N^B \frac{P_B}{m_N}. \quad (5.4)$$

Здесь вводятся p_N^A, p_N^B – степени поляризации первого и второго адрона соответственно, которые принимают значения ± 1 . В случае неполяризованного адрона $p_N^{A,B} = 0$.

Вектор поляризации адрона и вектор поляризации партона со спиральностью $r_{1,2}$, участвующего в реакции, связаны соотношениями:

$$\eta^{r_1} = r_1 \cdot \eta_N^A, \quad \eta^{r_2} = r_2 \cdot \eta_N^B, \quad (5.5)$$

благодаря которым [и с учётом (5.4)] получаем простое правило:

$$\eta^{r_1} = r_1 p_N^A \cdot \frac{p_1}{m_q}, \quad \eta^{r_2} = r_2 p_N^B \cdot \frac{p_2}{m_q}. \quad (5.6)$$

Полученные выражения работают в рамках КПМ, согласно правилам которой 4-импульсы адрона и партона пропорциональны:

$$p_1 = x_1 P_A, \quad p_2 = x_2 P_B. \quad (5.7)$$

Коэффициенты пропорциональности – это так называемые доли импульса, которые забирают партоны от своего (родительского) адрона.

5.2 Конволюция

Чтобы получить в рамках КПМ сечение процесса Дрелла – Яна, нужно просуммировать все возможности образования дилептона из адронов, то есть учесть все возможные подпроцессы (допустимые законами сохранения заряда, момента и т. д.) и отобрать только те конфигурации, которые возможны кинематически. Видно, что становится возможным применение подхода, использующегося при формулировке *теоремы полной вероятности*, которая в применении к данной физической ситуации называется *конволюционной формулой* (или просто *конволюцией*) и имеет следующий вид:

$$d\sigma_V^h = \frac{1}{3} \sum_{q=u,d,s,\dots} \sum_{r_1, r_2} dx_1 dx_2 \cdot \Theta \times \\ \times \left(f_q^{r_1, A}(x_1) f_{\bar{q}}^{r_2, B}(x_2) d\hat{\sigma}_V^{q\bar{q}} + f_{\bar{q}}^{r_1, A}(x_1) f_q^{r_2, B}(x_2) d\hat{\sigma}_V^{\bar{q}q} \right), \quad (5.8)$$

где $d\sigma_V^h$ – сечение процесса (5.1), $d\sigma_V^{q\bar{q}}$ – сечение процесса (5.2), $d\sigma_V^{\bar{q}q}$ – сечение процесса (5.3).

Все сечения в (5.8) приведены в полностью дифференциальной форме. Чтобы получить наблюдаемое сечение, нужно проинтегрировать по некоторым переменным с учётом фактора Θ , который отвечает за определение области фазового объёма допустимой кинематикой реакции. Математически он представляет собой произведение θ -функций, каждая из которых будет подробно обсуждаться ниже.

Символом “^” (шляпка) обозначен оператор замены аргументов по правилам КПМ (5.7). Индексом V (virtual) обозначаются вклады, соответствующие безрадиационной кинематике: борновский и виртуальные однопетлевые. Множитель $\frac{1}{3}$ называется *цветовым фактором* и учитывает тот факт, что только три из девяти вариантов пар цветов кварков (одна треть) смогут прореагировать, чтобы образовать бесцветный дилептон.

Символом $f_q^{r,h}(x)$ обозначаются так называемые *функции партонных распределений* (parton distribution function, PDF), которые имеют следующий (вероятностный) смысл: $f_q^{r,h}(x)dx$ – это вероятность нахождения в адроне h кварка аромата q со спиральностью r и долей импульса от x до $x + dx$. Стоящее в адронном сечении суммирование по q предполагает все 6 ароматов: $q = u, d, s, c, b, t$ (по нарастанию массы), однако (слишком массивный) t -кварк в расчёт обычно не берётся. Следует заметить, что в функциях партонных распределений имеется также явная зависимость от Q^2 – энергетического масштаба (resolution scale) реакции (для краткости записи его часто опускают), так что можно эквивалентно записать:

$$f_q^{r,h}(x) \equiv f_q^{r,h}(x, Q^2). \quad (5.9)$$

Заметим, что под обозначением Q понимают число (не 4-вектор), тогда понятно, что Q^2 всегда положителен и может быть определен так: $Q^2 = q_s^2$ для s -канальных реакций, $Q^2 = -q_t^2$ для t -канальных. Для процесса Дрелла – Яна естественный выбор для Q такой: $Q = \sqrt{(p_3 + p_4)^2} = M$.

5.3 Безрадиационная кинематика

Набор *переменных Манделъштата* для партонного subprocessa (партонные инварианты) определяется в основном так же, как выше (в главе 2). Однако теперь даже в безрадиационном случае для последующего корректного перехода к адронному сечению следует различать все 6 инвариантов, приведем их для полноты изложения:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_2 - p_3)^2, \quad (5.10)$$

$$s_1 = (p_3 + p_4)^2 = M^2, \quad t_1 = (p_2 - p_4)^2, \quad u_1 = (p_1 - p_4)^2. \quad (5.11)$$

Под действием оператора замены переменных согласно КПМ (5.7) партонные инварианты в УРП приобретают вид:

$$\hat{s} = \frac{s}{x_1 x_2}, \quad \hat{t} = \frac{t}{x_1}, \quad \hat{u} = \frac{u}{x_2}, \quad (5.12)$$

$$\hat{s}_1 = M^2, \quad \hat{t}_1 = \frac{t_1}{x_2}, \quad \hat{u}_1 = \frac{u_1}{x_1}. \quad (5.13)$$

Кроме этого, будем иметь в виду очевидное простое соотношение:

$$\hat{s} = S. \quad (5.14)$$

Найдём все нужные величины (энергии, углы и т. п.) в с.ц.м.а. с применением УРП. Поступаем так: сначала вычисляем нужную комбинацию инвариантов в системе центра масс кварков (обозначаем её как “с.ц.м.к.”), затем делаем переход в нужную систему, в данном случае в с.ц.м.а., с помощью замен (5.7). Итак, в с.ц.м.к.:

$$\begin{aligned} t + u &= -2(p_1 + p_2)p_3 = -4p_{10}p_{30} = -2\sqrt{s} \cdot p_{30}, \\ t_1 + u_1 &= -2(p_1 + p_2)p_4 = -4p_{10}p_{40} = -2\sqrt{s} \cdot p_{40}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тогда энергии конечных частиц такие:

$$p_{30} = -\frac{t + u}{2\sqrt{s}}, \quad p_{40} = -\frac{t_1 + u_1}{2\sqrt{s}} \quad (\text{в с.ц.м.к.}), \quad (5.16)$$

$$p_{30} = -\frac{\hat{t} + \hat{u}}{2\sqrt{\hat{s}}}, \quad p_{40} = -\frac{\hat{t}_1 + \hat{u}_1}{2\sqrt{\hat{s}}} \quad (\text{в с.ц.м.а.}). \quad (5.17)$$

Теперь вычислим нужные углы (обозначения приведены на рис. 5.4).

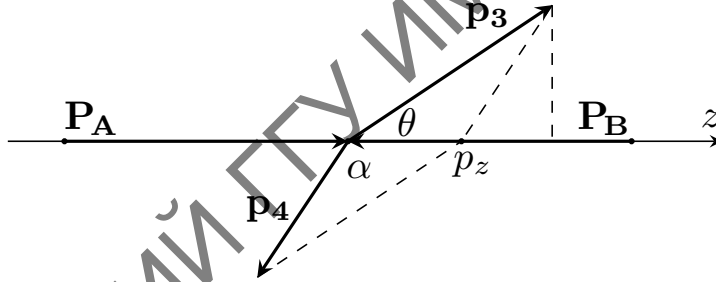


Рис. 5.4: Конфигурация 3-импульсов дилептонной пары в с.ц.м.а. в условиях безрадиационной кинематики

В с.ц.м.к. имеют место уравнения:

$$\begin{aligned} t &= -2p_1p_3 = -2p_{10}p_{30}(1 - \cos \theta) = (t + u)(1 - \cos \theta)/2, \\ u_1 &= -2p_1p_4 = -2p_{10}p_{40}(1 - \cos \alpha) = (t_1 + u_1)(1 - \cos \alpha)/2, \end{aligned}$$

решая которые, получим углы:

$$\cos \theta = \frac{u - t}{u + t}, \quad \cos \alpha = \frac{t_1 - u_1}{t_1 + u_1} \quad (\text{в с.ц.м.к.}), \quad (5.18)$$

$$\cos \theta = \frac{\hat{u} - \hat{t}}{\hat{u} + \hat{t}}, \quad \cos \alpha = \frac{\hat{t}_1 - \hat{u}_1}{\hat{t}_1 + \hat{u}_1} \quad (\text{в с.ц.м.а.}). \quad (5.19)$$

Теперь нетрудно получить поперечные и продольные компоненты 3-импульсов в с.ц.м.а.:

$$p_{3T} = p_{30} \sin \theta = \sqrt{\hat{t}\hat{u}/\hat{s}}, \quad p_{4T} = p_{40} \sin \alpha = \sqrt{\hat{t}_1\hat{u}_1/\hat{s}}, \quad (5.20)$$

$$p_{3z} = p_{30} \cos \theta = \frac{\hat{t} - \hat{u}}{2\sqrt{\hat{s}}}, \quad p_{4z} = p_{40} \cos \alpha = \frac{\hat{u}_1 - \hat{t}_1}{2\sqrt{\hat{s}}}. \quad (5.21)$$

Для вычисления *быстроты* пары (pair rapidity) в с.ц.м.а. нужны выражения для суммарной энергии $E = p_{30} + p_{40}$ и продольной компоненты 3-импульса пары (см. рис. 5.4):

$$p_z = p_{30} \cos \theta + p_{40} \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{\hat{s}}}(\hat{t} - \hat{u} - \hat{t}_1 + \hat{u}_1). \quad (5.22)$$

С учётом вычисленных выше выражений получим для быстроты пары:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{\hat{t}_1 + \hat{u}}{\hat{t} + \hat{u}_1}. \quad (5.23)$$

В случае безрадиационного процесса имеем: $t = t_1$, $u = u_1$, так что выражение для быстроты пары существенно упрощается:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1(t_1 + u)}{x_2(t + u_1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2}. \quad (5.24)$$

Зная p_z , нетрудно найти p_T – поперечную составляющую 3-импульса пары (в безрадиационном случае она равна нулю, это хорошо видно на рис. 5.4):

$$\begin{aligned} p_T^2 &= |\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4|^2 - p_z^2 = (p_{30} + p_{40})^2 - M^2 - p_z^2 = \\ &= \frac{(\hat{t} + \hat{u}_1)(\hat{t}_1 + \hat{u})}{\hat{s}} - M^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Наконец, рассчитаем величины, нужные для $A_{\text{ФВ}}$ – асимметрии вперёд-назад (не путать с кварковой асимметрией $q\bar{q} \rightarrow l^-l^+$, которая подробно обсуждается в разд. 6.10).

Ключевая формула для угла вылета пары в системе Коллинза – Сопера (покоя дилептона) имеет вид:

$$\cos \theta^* = \frac{|p_z|}{p_z} \frac{2}{M\sqrt{M^2 + p_T^2}} [p^+(l^-)p^-(l^+) - p^-(l^-)p^+(l^+)], \quad (5.26)$$

где

$$p^\pm(l^-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{30} \pm p_{3z}), \quad p^\pm(l^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{40} \pm p_{4z}). \quad (5.27)$$

После подстановки и упрощения получим:

$$\cos \theta^* = \text{sgn}[x_2(t + u_1) - x_1(t_1 + u)] \frac{tt_1 - uu_1}{M\sqrt{s(u + t_1)(u_1 + t)}}. \quad (5.28)$$

В безрадиационном случае выражение для $\cos \theta^*$ приобретает особенно простой вид:

$$\cos \theta^* = \text{sgn}[x_1 - x_2] \frac{u - t}{s} = \text{sgn}[x_2 - x_1] \cos \theta. \quad (5.29)$$

Теперь покажем, какие значения принимает асимметрия вперёд-назад при характерных ограничениях эксперимента CMS LHC. На рис. 5.5 показаны так называемые “unfolded measurements”³, собранные при энергии $\sqrt{S} = 7$ ТэВ со светимостью 5 fb^{-1} [279] (наложены 4 стандартных набора ограничений на быстроту $\mu^+\mu^-$ -пары). Были использованы: программа автора READY и партонные распределения [280] и [281] (видно, что для асимметрии влияние выбора распределений незначительно, поскольку они входят сходно в числитель и знаменатель и взаимно подавляются).

5.4 Сечения кварковых подпроцессов

Приступим к расчёту $d\sigma_V^{q\bar{q}}$ – сечения процесса (5.2), изображенного на левой диаграмме рис. 5.3 [сечение $d\sigma_V^{q\bar{q}}$ от (5.3) обсудим ниже]. Применяем изложенную выше технику: для записи амплитуд используем правила Фейнмана (см. разд. 6.1), затем quadriруем. Получим результат в духе главы 2, в котором следует различить фермионные индексы ($f = (q, l)$, где q – кварк в начальном состоянии, l – лептон в конечном состоянии) и осуществить замену:

$$\lambda_1 \rightarrow r_1 p_N^A, \quad \lambda_2 \rightarrow r_2 p_N^B. \quad (5.30)$$

Тогда, используя фазовый объём двухчастичного конечного состояния, выраженный через инвариант t , см. (6.15), получим:

$$d\sigma_0^{q\bar{q}} = \frac{\pi\alpha^2}{s^2} \sum_{a,c=\gamma,Z} \Pi^{ac} R_q^{aac} \cdot dt. \quad (5.31)$$

³Unfolding – это процедура последовательной коррекции данных.

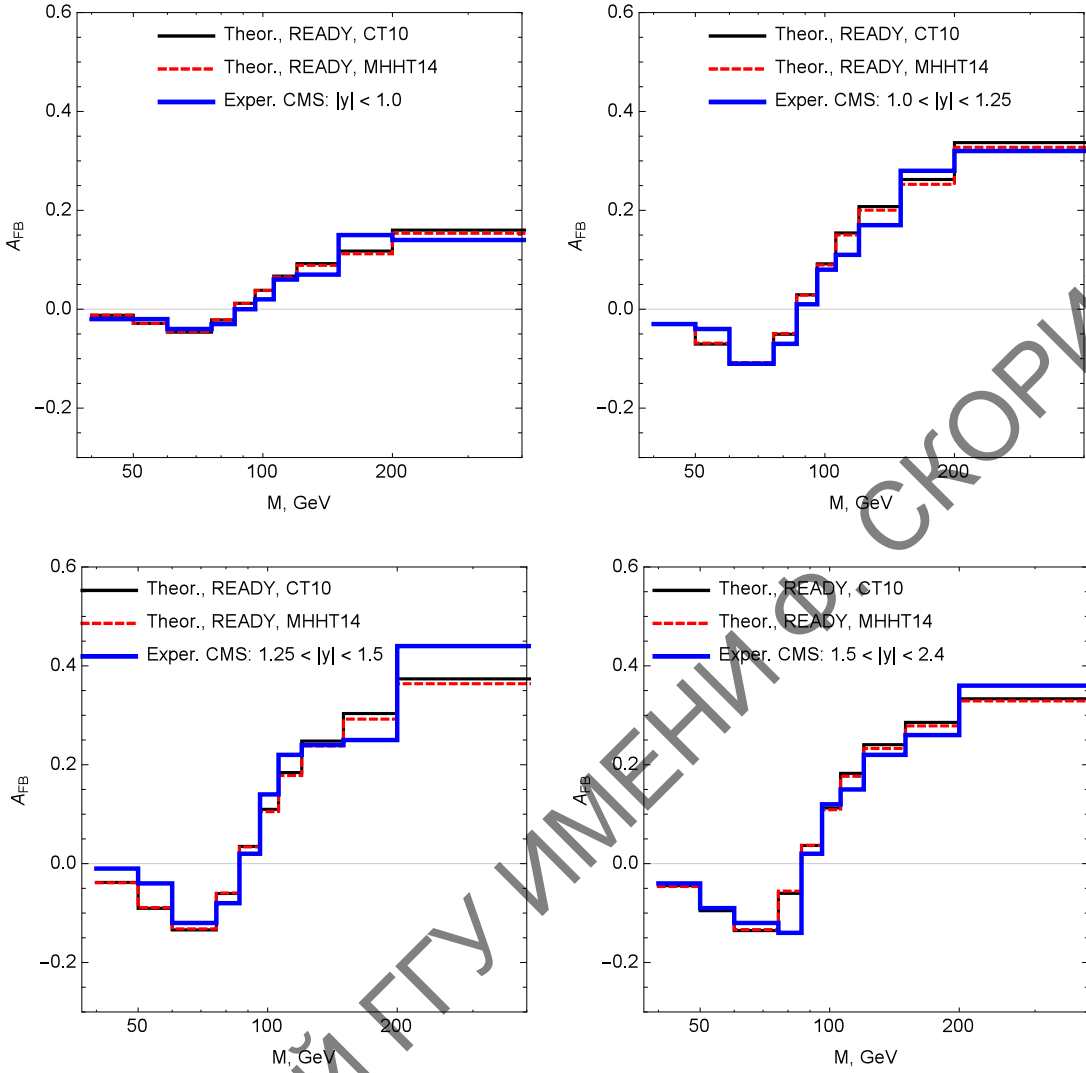


Рис. 5.5: Измерения асимметрии A_{FB} для $\mu^+\mu^-$ -случая (unfolded, борновский уровень). Используются стандартные CMS ограничения на M и y , энергия $\sqrt{S} = 7$ ТэВ, светимость 5 fb^{-1}

Функция R_q (обозначавшаяся в главе 2, как S_{ss} , теперь уберём несущественное более обозначение канала [других каналов, кроме s , нет] и введём индекс “ q ”) получается из расчёта такой комбинации (всё делается в УРП, индексы a и b пока различаются для будущего использования в BSE и вершинном вкладе ЭСП, для борновского и боксовского вкладов они равны):

$$\begin{aligned}
 R_q^{abc} &= \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma_q^a U_1 \Gamma_q^{c+} \gamma_\nu U_2 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma_l^b U_4 \Gamma_l^{c+} \gamma_\nu U_3 \right] = & (5.32) \\
 &= \text{Sp} \left[\gamma_\mu \frac{1}{4} (v_{q\lambda}^{ac} - a_{q\lambda}^{ac} \gamma_5) \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{p}_2 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu (v_l^{bc} - a_l^{bc} \gamma_5) \hat{p}_4 \gamma_\nu \hat{p}_3 \right] = \\
 &= 2t^2 (v_{q\lambda}^{ac} v_l^{bc} - a_{q\lambda}^{ac} a_l^{bc}) + 2u^2 (v_{q\lambda}^{ac} v_l^{bc} + a_{q\lambda}^{ac} a_l^{bc}).
 \end{aligned}$$

Пропагаторы бозонов образуют знакомые комбинации: $\Pi^{ac} = D_a(q) D_c^*(q)$.

Снова используем коммутационные свойства гамма-матриц и подберём удобную сокращённую форму записи констант связи и степеней поляризации. Лептонные комбинации v_l и a_l уже встречались (2.80):

$$v_l^{bc} = v_0^{\gamma bc}, \quad a_l^{bc} = a_0^{\gamma bc}.$$

Обобщим эти формулы на произвольный фермион ($f = q, l$):

$$\begin{aligned} v_f^{bc} &= v_f^b v_f^c + a_f^b a_f^c, \\ a_f^{bc} &= a_f^b v_f^c + v_f^b a_f^c. \end{aligned} \quad (5.33)$$

В кварковом случае предоставляется возможность собрать вместе также степени поляризации обоих кварков:

$$\begin{aligned} v_{q\lambda}^{ac} &= v_q^{ac}(1 - \lambda_1 \lambda_2) - a_q^{ac}(\lambda_1 - \lambda_2), \\ a_{q\lambda}^{ac} &= a_q^{ac}(1 - \lambda_1 \lambda_2) - v_q^{ac}(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Другая форма записи:

$$R_q^{abc} = T_q^{abc} + U_q^{abc} \quad (5.35)$$

где функции T_q и U_q выглядят так:

$$\begin{aligned} T_q^{abc} &= 2t^2 ([1 - \lambda_1 \lambda_2] f_{q-}^{abc} + [\lambda_1 - \lambda_2] g_{q-}^{abc}), \\ U_q^{abc} &= 2u^2 ([1 - \lambda_1 \lambda_2] f_{q+}^{abc} - [\lambda_1 - \lambda_2] g_{q+}^{abc}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

а комбинации констант связи и степеней поляризаций имеют вид:

$$f_{q\pm}^{abc} = \lambda_{q+}^{ac} \lambda_{l+}^{bc} \pm \lambda_{q-}^{ac} \lambda_{l-}^{bc}, \quad g_{q\pm}^{abc} = \lambda_{q+}^{ac} \lambda_{l-}^{bc} \pm \lambda_{q-}^{ac} \lambda_{l+}^{bc}.$$

Видно, что теперь используются новые обозначения (вместо $g_{V,A}$ теперь $\lambda_{f+,f-}$ с фермионным индексом f) для комбинаций констант связи:

$$\lambda_{f+}^{ab} = v_f^a v_f^b + a_f^a a_f^b, \quad \lambda_{f-}^{ab} = v_f^a a_f^b + a_f^a v_f^b. \quad (5.37)$$

5.5 Однопетлевые безрадиационные вклады

5.5.1 Бозонные собственные энергии. Вершинные вклады

Сечение вклада бозонных собственных энергий ($V = \text{BSE}$) получаем из (2.44) по методике, уже использованной для борновского вклада, в виде:

$$\frac{d\sigma_{\text{BSE}}^{q\bar{q}}}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} \sum_{a,b,c=\gamma,Z} \Pi^{abc} R_q^{abc}, \quad (5.38)$$

где

$$\Pi^{abc} = -D_a(q)\hat{\Sigma}_T^{ab}(s_1)D_b(q)D_c^*(q)$$

содержит перенормированную поперечную часть собственных энергий бозонов $\hat{\Sigma}_T^{ab}$. Все существенные моменты касательно её расчёта содержатся выше.

Сечение вершинных вкладов ($V = \text{Ver}$) имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{\text{Ver}}^{q\bar{q}}}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi^{ab} (R_q^{F_{ab}} + R_q^{aF_{ab}}), \quad (5.39)$$

где снова используются перенормированные вершинные формфакторы в качестве эффективных констант связи. Лептонные вершинные формфакторы определяются формулами (2.52) и (2.53), здесь приведем их для случая двух типов кварков. Для вершин с исходящим (из вершины) виртуальным фотоном:

$$\begin{aligned} v_d^{F\gamma} &= \frac{\alpha v_d^\gamma}{4\pi} \left[Q_d^2 \Lambda_{1,d}^\gamma + [(v_d^Z)^2 + (a_d^Z)^2] \Lambda_2^Z - \frac{1}{2s_W^2} \Lambda_2^W + \frac{9}{4s_W^2} \Lambda_3^W \right], \\ a_d^{F\gamma} &= \frac{\alpha v_d^\gamma}{4\pi} \left[2v_d^Z a_d^Z \Lambda_2^Z - \frac{1}{2s_W^2} \Lambda_2^W + \frac{9}{4s_W^2} \Lambda_3^W \right], \\ v_u^{F\gamma} &= \frac{\alpha v_u^\gamma}{4\pi} \left[Q_u^2 \Lambda_{1,u}^\gamma + [(v_u^Z)^2 + (a_u^Z)^2] \Lambda_2^Z - \frac{1}{8s_W^2} \Lambda_2^W + \frac{9}{8s_W^2} \Lambda_3^W \right], \\ a_u^{F\gamma} &= \frac{\alpha v_u^\gamma}{4\pi} \left[2v_u^Z a_u^Z \Lambda_2^Z - \frac{1}{8s_W^2} \Lambda_2^W + \frac{9}{8s_W^2} \Lambda_3^W \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Для вершин с исходящим виртуальным Z -бозоном:

$$\begin{aligned} v_d^{FZ} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[v_d^Z Q_d^2 \Lambda_{1,d}^\gamma + v_d^Z [(v_d^Z)^2 + 3(a_d^Z)^2] \Lambda_2^Z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - 2Q_u s_W^2}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W - \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right], \\ a_d^{FZ} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[a_d^Z Q_d^2 \Lambda_{1,d}^\gamma + a_d^Z [3(v_d^Z)^2 + (a_d^Z)^2] \Lambda_2^Z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - 2Q_u s_W^2}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W - \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
v_u^{FZ} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[v_u^Z Q_u^2 \Lambda_{1,u}^\gamma + v_u^Z [(v_u^Z)^2 + 3(a_u^Z)^2] \Lambda_2^Z - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 + 2Q_d s_W^2}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W + \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right], \\
a_u^{FZ} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[a_u^Z Q_u^2 \Lambda_{1,u}^\gamma + a_u^Z [3(v_u^Z)^2 + (a_u^Z)^2] \Lambda_2^Z - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 + 2Q_d s_W^2}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W + \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right].
\end{aligned}$$

Функции Λ имеют тот же смысл, что и раньше.

Всё сказанное в двух предыдущих разделах касалось кваркового подпроцесса с начальной конфигурацией $q\bar{q}$. Пересчитывать соответствующие сечения процесса с конфигурацией $\bar{q}q$ не нужно, достаточно произвести очевидную кроссинговую замену $p_1 \leftrightarrow p_2$, которая приведет в случае безрадиационной кинематики к замене инвариантов $t \leftrightarrow u$, а также поменять поляризации: $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$.

5.5.2 Боксы: общие выражения

Вклады в сечение от различных боксов ($V = \text{Box} = \gamma\gamma, \gamma Z, ZZ, WW$) определяются общей формулой:

$$\frac{d\sigma_{\text{Box}}^{q\bar{q}}}{dt} = \frac{1}{2^3 \pi s^2} \sum_{c=\gamma, Z} \left(M_{s,D}^{\text{Box}} + M_{s,C}^{\text{Box}} \right) M_s^{c+}. \quad (5.42)$$

Поступаем для начала так, как в главе 2 [см. (2.124) и (2.125)], – найдем выражения для общего случая ($ab = \gamma\gamma, \gamma Z, ZZ, WW$) в приближении малых масс бозонов. Получим для прямых s -канальных боксов:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= + \frac{2C_s}{s} \left[2 C_{3+4,q}^{abc} l_{st} s u + C_{3,q}^{abc} l_{st}^2 (3t^2 + u^2) + \right. \\
&\quad \left. + C_{4,q}^{abc} l_{st}^2 (u^2 - t^2) \right] - 2C_{st} \Pi_3^{ab}(q_s) H_{ss,q}^{abc}, \quad (5.43)
\end{aligned}$$

для перекрестных s -канальных боксов:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= - \frac{2C_s}{s} \left[C_{3,q}^{abc} l_{su}^2 (t^2 + 3u^2) + C_{4,q}^{abc} l_{su}^2 (u^2 - t^2) + \right. \\
&\quad \left. + 2 C_{3-4,q}^{abc} l_{su} s t \right] + 2C_{su} \Pi_4^{ab}(q_s) H_{ss,q}^{abc}. \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Как видно, эти выражения представляют собой модифицированный вариант формул (2.124) и (2.125) – добавлен существенный теперь кварковый индекс q . Используются следующие сокращения:

$$\begin{aligned} C_{3,q}^{abc} &= (v_{1,q}^{abc} + \lambda_2 a_{1,q}^{abc}) v_{0,l}^{abc}, & C_{4,q}^{abc} &= (a_{1,q}^{abc} + \lambda_2 v_{1,q}^{abc}) a_{0,l}^{abc}, \\ H_{ss,q}^{abc} &= 2[C_{3,q}^{abc}(u^2 + t^2) + C_{4,q}^{abc}(u^2 - t^2)], \end{aligned} \quad (5.45)$$

в которых константы связи и степени поляризации “упакованы” немного сложнее, чем в (2.80) и (2.82) – снова следует различать индексы q и l (используем $f = q, l$):

$$\begin{aligned} v_{1,f}^{abc} &= v_{0,f}^{abc} - \lambda_1 a_{0,f}^{abc}, & a_{1,f}^{abc} &= a_{0,f}^{abc} - \lambda_1 v_{0,f}^{abc}, \\ v_{0,f}^{abc} &= v_f^a v_f^b v_f^c + v_f^a a_f^b a_f^c + a_f^a v_f^b a_f^c + a_f^a a_f^b v_f^c, \\ a_{0,f}^{abc} &= a_f^a a_f^b a_f^c + a_f^a v_f^b v_f^c + v_f^a a_f^b v_f^c + v_f^a v_f^b a_f^c. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Наконец, перед пропагаторными структурами факторизуются трёхточечные функции [см. разд. 6.6.4, формула (6.123)]:

$$\begin{aligned} \Pi_3^{ab}(q_s) &= H_0^a(p_1, p_3) D_b(q_s) + D_a(q_s) H_0^b(p_1, p_3), \\ \Pi_4^{ab}(q_s) &= H_0^a(p_1, p_4) D_b(q_s) + D_a(q_s) H_0^b(p_1, p_4). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Сечение, соответствующее $\gamma\gamma$ -боксу, получается подстановкой индекса $ab = \gamma\gamma$ в выражения (5.43), (5.44). Естественно, они работают при любых энергиях. Нетрудно убедиться, что сумма (5.43) и (5.44) не содержит фермионных масс. ИКР сосредоточена в последних слагаемых (причина подробно объяснена в главе 2). Выпишем в явном виде ИКР-части $\gamma\gamma$ -бокса:

$$\begin{aligned} M_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+|\text{IR}} &= -16\pi\alpha^3 Q_q Q_l \cdot D_\gamma(q) D_c^*(q) \cdot R_q^{\gamma c} \cdot t H_0^\gamma(p_1, p_3), \\ M_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+|\text{IR}} &= +16\pi\alpha^3 Q_q Q_l \cdot D_\gamma(q) D_c^*(q) \cdot R_q^{\gamma c} \cdot u H_0^\gamma(p_1, p_4), \end{aligned} \quad (5.48)$$

где “борновское” R_q (аналог S_{ss} из главы 2) имеет вид:

$$R_q^{ac} = 2[C_{3,q}^{a\gamma c}(u^2 + t^2) + C_{4,q}^{a\gamma c}(u^2 - t^2)]. \quad (5.49)$$

ИКР-части γZ -бокса такие же по форме, как выражения (5.48):

$$\begin{aligned} M_{s,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+|\text{IR}} &= -8\pi\alpha^3 Q_q Q_l \cdot D_Z(q) D_c^*(q) \cdot R_q^{Zc} \cdot t H_0^\gamma(p_1, p_3), \\ M_{s,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+|\text{IR}} &= +8\pi\alpha^3 Q_q Q_l \cdot D_Z(q) D_c^*(q) \cdot R_q^{Zc} \cdot u H_0^\gamma(p_1, p_4). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Понятно, что IR-части $Z\gamma$ -бокса дадут такой же вклад (при $k \rightarrow q$, как объяснено в главе 2) и, следовательно, в сумме удвоение.

5.5.3 Боксы: HE- и LE-режимы

Выражения (5.43) и (5.44) дают возможность получить асимптотический результат для всех боксов в HE-режиме, достаточно подставить вместо ab необходимый индекс (γZ , ZZ или WW). Интегралы $H_0^{Z,W}$ в УРП имеют тот же вид, что для процесса Баба, см. расчёт в разд. 6.6. Не забываем выключить в случае WW -боксов те диаграммы, которые запрещены законом сохранения электрического заряда: для процессов с начальным состоянием $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$ нет прямых боксов, а для процессов с конфигурацией $d\bar{d}$ и $u\bar{u}$ нет перекрестных боксов.

Для LE-режима формулы (5.43) и (5.44) не годятся. Пересчитаем ИК-конечные части γZ -боксов по методике главы 2, теперь они имеют вид, аналогичный (2.114):

$$\begin{aligned} M_{s,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= +16\pi\alpha^3 Q_q Q_l \cdot (4T_q^{Zc} + U_q^{Zc}) I_{(3)}^{\gamma Z} D_c^*(q), \\ M_{s,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= -16\pi\alpha^3 Q_q Q_l \cdot (T_q^{Zc} + 4U_q^{Zc}) I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Выражения для ZZ -боксов в LE-режиме получаем из (5.51) заменами:

$$Q_q Q_l \rightarrow 1, \quad Zc \rightarrow \zeta c, \quad I_{2,3}^{\gamma Z} \rightarrow -\frac{1}{4m_Z^2}.$$

Наконец, выражения для WW -боксов в LE-режиме получаем из формул (5.51) следующими заменами:

$$Q_q Q_l \rightarrow 1, \quad Zc \rightarrow \omega c, \quad I_{2,3}^{\gamma Z} \rightarrow -\frac{1}{4m_W^2}.$$

Индекс “ ζ ” и “ ω ” означает здесь то же, что в главе 2 [см. (2.119) и (2.121), соответственно].

В новых обозначениях получается более просто (одной формулой описываются все случаи):

$$\begin{aligned} M_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= +8C_s \cdot (4t^2 C_{3-4}^{abc} + u^2 C_{3+4}^{abc}) I_{(3)}^{ab}, \\ M_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} &= -8C_s \cdot (t^2 C_{3-4}^{abc} + 4u^2 C_{3+4}^{abc}) I_{(2)}^{ab}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Соответствующие сечения процесса с конфигурацией $\bar{q}q$, в принципе, можно не пересчитывать, а подобрать соответствующие замены в $q\bar{q}$ выражениях: очевидную кроссинговую замену $p_1 \leftrightarrow p_2$ (что даст $t \leftrightarrow u$), поменять

поляризации: $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ и сменить топологию диаграммы (прямую с перекрёстной). Понятно, что это чрезвычайно запутывает результат и усложняет программирование, поэтому автор предпочёл пересчитать конфигурацию $\bar{q}q$ в уже апробированных и, как кажется, удобных обозначениях. Результат превзошел ожидания – оказывается, для того чтобы из $q\bar{q}$ -случая получить $\bar{q}q$ -случай, требуется всего лишь заменить знак перед C_3 :

$$d\sigma_{\text{Box}}^{\bar{q}q} = d\sigma_{\text{Box}}^{q\bar{q}}|_{C_3 \rightarrow -C_3}.$$

5.5.4 Сравнение с результатами других групп

Перейдем к численному анализу наблюдаемых величин на партонном уровне, преследуя две цели: изучить поправки в отсутствие неопределенности, связанной с функциями распределения кварков, и сравниться с результатами других групп: программой ZGRAD [229] и расчётом группы SANC [169].

Подходы, например, в [229] и тот, который используется здесь, не вполне одинаковы. Так, “тяжелые боксы” рассчитаны по-разному (в [229] было применено прямое интегрирование четырёхточечных функций, как следствие, результат содержит функции Спенса со сложными комплексными аргументами). Прямое сравнение с результатами [229] невозможно, так как в этой работе использовано так называемое эффективное борновское приближение (effective Born approximation). Чтобы свериться, было проделано отдельное исследование [235], в ходе которого получено хорошее согласие с результатами ZGRAD и SANC для всех вкладов в ЭСП. Для корректного сравнения в этом разделе использовались одинаковые предписания и параметры CM (подробно о выборе предписаний сказано в конце главы). Было получено хорошее согласие для всех вкладов в ЭСП: как для боксовских (см. табл. 5.1), так и для вершинных и собственно-энергетических поправок (см. табл. 5.2), где приведены относительные поправки (в процентах) к $u\bar{u}$ -сечению как функции \sqrt{s} в области $0.1 \text{ ТэВ} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ ТэВ}$. Все результаты округлены до одинакового количества значащих цифр.

Проанализируем различие в относительных поправках к ZZ -боксовской части: можно видеть, что в области невысоких значений $\sqrt{s} \sim 0.2 \text{ ТэВ}$ результаты довольно сильно отличаются (хотя поправки имеют одинаковое поведение), но, начиная с $\sqrt{s} \sim 0.5 \text{ ТэВ}$, разница становится незначительной и уменьшается с ростом \sqrt{s} . Можно сказать, что асимптотический метод [235] хорошо работает, начиная с 0.5 ТэВ , где относительная ошибка асимптотического (к точному SANC) расчёта ~ 0.1161 , в то время как при

Табл. 5.1: Относительные поправки (в процентах), обусловленные ZZ - и WW -боксами на партонном уровне для процесса $u\bar{u} \rightarrow \mu^+\mu^-$ как функции \sqrt{s} , рассчитанные различными группами: SANC [169], ZGRAD [229] и с использованием метода ([235]), изложенного здесь

\sqrt{s} , ТэВ	ZZ [169]	ZZ [229]	ZZ [235]	WW [169]	WW [235]
0.2	-0.091	-0.091	-0.007	-3.107	-4.874
0.5	-0.214	-0.215	-0.190	-10.777	-10.109
1.0	-0.335	-0.335	-0.325	-16.998	-16.572
2.0	-0.464	-0.465	-0.461	-25.442	-25.250
3.0	-0.542	-0.543	-0.541	-31.468	-31.355
5.0	-0.643	-0.643	-0.642	-40.185	-40.131
10.0	-0.779	-0.779	-0.778	-53.989	-53.970

1 ТэВ (2 ТэВ) эта ошибка составляет всего ~ 0.0284 (~ 0.0056). Сравнивая результаты для прямого WW -бокса в точке 0.5 ТэВ, получим относительную ошибку асимптотического метода (к расчёту SANC) ~ 0.0620 , а в точке 1 ТэВ (2 ТэВ) эта ошибка ~ 0.0251 (~ 0.0076).

Табл. 5.2: Относительные поправки (в процентах), обусловленные HV- и BSE-вкладами на партонном уровне для процесса $u\bar{u} \rightarrow \mu^+\mu^-$ как функции \sqrt{s} , рассчитанные различными группами: SANC [169] и с использованием авторского метода

\sqrt{s} , ТэВ	HV [169]	HV [235]	HV, SL	BSE [169]	BSE [237]
0.1	-1.555	-1.545	2.297	6.078	5.942
0.2	-1.688	-1.669	2.448	11.226	11.206
0.5	4.296	4.298	4.094	11.153	11.133
1.0	6.245	6.245	5.991	12.210	12.189
2.0	8.553	8.554	8.425	13.199	13.178
3.0	10.171	10.171	10.094	13.768	13.746
5.0	12.489	12.490	12.451	14.481	14.458
10.0	16.116	16.116	16.102	15.446	15.421

Табл. 5.2 показывает также хорошее согласие для HV-части радиационной поправки: первая колонка – это результат SANC; вторая получена с использованием формул этой главы и точных выражений для $\Lambda_{2,3}$ из [66]; наконец, третья колонка соответствует приближению, в котором удерживаются только двойные судаковские логарифмы; видно хорошее согласие первой и второй колонок и немного хуже между второй и третьей – отно-

сительная ошибка в этом случае 0.040 при $\sqrt{s} = 1$ ТэВ и 8.44×10^{-4} при $\sqrt{s} = 10$ ТэВ. Для BSE-части согласие имеет примерно такой же характер, как для боксов и вершин, – присутствует небольшая постоянная разница ~ 0.02 % (в [235] она была несколько больше по причине неточностей в компьютерной программе, впоследствии устраненных), обусловленная деталями численной оценки.

5.6 Адронное сечение безрадиационных вкладов

В случае неполяризованных начальных адронов, применяя конволюционную формулу и суммируя по спиральностям (далее рассматриваем только этот случай), получаем более простое выражение:

$$d\sigma_V^h = \frac{1}{3} \sum_q dx_1 dx_2 \cdot \Theta \times \\ \times \left(f_q^A(x_1) f_{\bar{q}}^B(x_2) d\hat{\sigma}_{V,u}^{q\bar{q}} + f_{\bar{q}}^A(x_1) f_q^B(x_2) d\hat{\sigma}_{V,u}^{\bar{q}q} \right), \quad (5.53)$$

где запись

$$f_q^h(x) = \sum_r f_q^{r,h}(x) = f_q^{+,h}(x) + f_q^{-,h}(x)$$

означает функцию распределения неполяризованных кварков; нижний индекс “ u ” в кварковом сечении означает отсутствие поляризации у начальных адронов (unpolarized hadrons) и требует выполнения операции $\lambda_{1,2} \rightarrow 0$. Аналогичным образом строятся сечения в случае поляризованных адронов, очевидно, что при суммировании по кварковым спиральностям возникает и вторая комбинация партонных распределений:

$$\Delta f_q^h(x) = \sum_r r f_q^{r,h}(x) = f_q^{+,h}(x) - f_q^{-,h}(x)$$

– функция распределения продольно поляризованных кварков.

Перейдем к адронному сечению, сначала используем самый общий вид – трижды дифференциальное сечение (fully differential cross section). Задача: осуществить замену переменных

$$(x_1, x_2, t) \rightarrow (M, y, C),$$

где $C = \cos \theta$ в с.ц.м.а. (для этой системы используется заглавная C). Данный переход легко осуществить с помощью якобиана J_N :

$$dx_1 dx_2 dt = |J_N| \cdot dM dy dC. \quad (5.54)$$

Сначала получим из (5.12) и (5.14) уравнение $x_1 x_2 = s/S$, а из (5.24) уравнение $x_1/x_2 = \exp(2y)$. Решая их в системе, получим известные соотношения, соответствующие безрадиационной кинематике (напомним, что в этом случае $s = s_1 = M^2$):

$$x_1 = \frac{M}{\sqrt{S}} e^y, \quad x_2 = \frac{M}{\sqrt{S}} e^{-y}. \quad (5.55)$$

Кварковый инвариант t выразится из уравнений (5.12) и (5.24) так:

$$t = -\frac{M^2(1-C)}{1-C+(1+C)e^{-2y}}. \quad (5.56)$$

Вычисляя частные производные и затем определитель, получим якобиан, соответствующий безрадиационной кинематике, в виде:

$$J_N = \frac{D(x_1, x_2, t)}{D(M, y, C)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial M} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial C} \\ \frac{\partial x_2}{\partial M} & \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial C} \\ \frac{\partial t}{\partial M} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial C} \end{vmatrix} = -\frac{4M^3 e^{2y}}{S[1+C+(1-C)e^{2y}]^2}. \quad (5.57)$$

В результате трижды дифференциальное сечение от безрадиационных вкладов в процесс Дрелла – Яна с неполяризованными адронами приобретает вид:

$$\frac{d^3\sigma_V^h}{dM dy dC} = \frac{1}{3} |J_N| \Theta \sum_q \left(f_q^A(x_1) f_{\bar{q}}^B(x_2) \frac{d\hat{\sigma}_{V,u}^{q\bar{q}}}{dt} + f_{\bar{q}}^A(x_1) f_q^B(x_2) \frac{d\hat{\sigma}_{V,u}^{\bar{q}q}}{dt} \right). \quad (5.58)$$

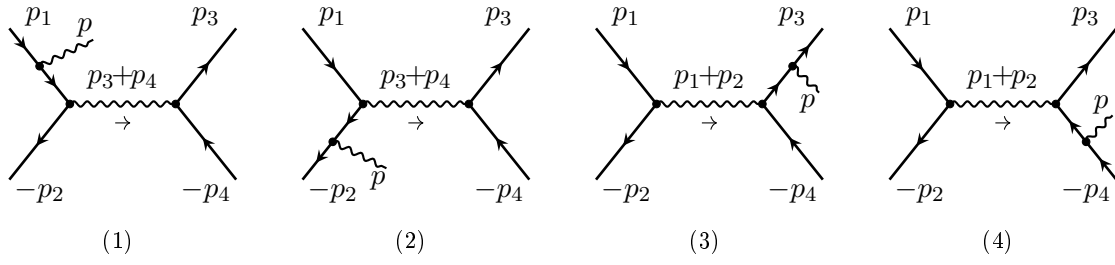
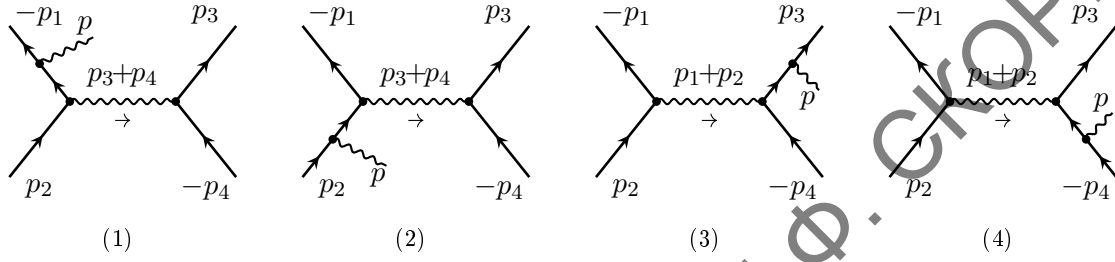
5.7 Тормозное излучение в процессе Дрелла – Яна

При расчёте вклада тормозного излучения в процессе Дрелла – Яна будем последовательно пользоваться результатами, полученными в главах 2 и 4. Теперь нужно удерживать в фотонной вершине заряд: Q_q – в случае излучения из кварковой линии, и Q_l – в случае излучения из лептонной, и позаботиться об обеих ситуациях: $q\bar{q}$ и $\bar{q}q$. Так, процессы с излучением тормозного фотона на кварковом уровне имеют вид:

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow l^-(p_3) + l^+(p_4) + \gamma(p), \quad (5.59)$$

$$\bar{q}(p_1) + q(p_2) \rightarrow l^-(p_3) + l^+(p_4) + \gamma(p). \quad (5.60)$$

Фейнмановские диаграммы подпроцессов (5.59) и (5.60) приведены на рис. 5.6 и 5.7 соответственно.

Рис. 5.6: Фейнмановские диаграммы процесса $q\bar{q} \rightarrow l^-l^+\gamma$ Рис. 5.7: Фейнмановские диаграммы процесса $\bar{q}q \rightarrow l^-l^+\gamma$

Диаграммы 1 и 2 рис. 5.6 формируют амплитуду $R_3^{q\bar{q},a}$, а диаграммы 3 и 4 рис. 5.6, соответственно, дают $R_4^{q\bar{q},a}$:

$$R_3^{q\bar{q},a} = -ie_\rho(p)Q_q D_a(q_{s_1}) \cdot \bar{u}(-p_2)(\Gamma_3^a)^{\mu\rho}u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3)\gamma_\mu\Gamma^a u(-p_4),$$

$$R_4^{q\bar{q},a} = -ie_\rho(p)Q_l D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_2)\gamma_\mu\Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3)(\Gamma_4^a)^{\mu\rho}u(-p_4),$$

где $(\Gamma_3^a)^{\mu\rho}$ и $(\Gamma_4^a)^{\mu\rho}$ берем из “упрощенных” формул (2.133) и (2.134) соответственно. Аналогично диаграммы 1 и 2 рис. 5.7 формируют амплитуду $R_3^{\bar{q}q,a}$, а диаграммы 3 и 4 рис. 5.7 – амплитуду $R_4^{\bar{q}q,a}$:

$$R_3^{\bar{q}q,a} = -ie_\rho(p)Q_q D_a(q_{s_1}) \cdot \bar{u}(-p_1)(\Gamma_5^a)^{\mu\rho}u(p_2) \cdot \bar{u}(p_3)\gamma_\mu\Gamma^a u(-p_4),$$

$$R_4^{\bar{q}q,a} = -ie_\rho(p)Q_l D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_1)\gamma_\mu\Gamma^a u(p_2) \cdot \bar{u}(p_3)(\Gamma_4^a)^{\mu\rho}u(-p_4),$$

где $(\Gamma_5^a)^{\mu\rho} = (\Gamma_3^a)^{\mu\rho}|_{p_1 \leftrightarrow p_2}$.

Дифференциальное сечение процесса (5.59) имеет вид, сходный с (2.126):

$$d\sigma_R^{q\bar{q}} = \frac{\alpha^3}{\pi^2 S} \sum_{a,b=\gamma,Z} \sum_{j=3}^4 \sum_{k=3}^4 R_j^{q\bar{q},a} R_k^{q\bar{q},b^+} d\Phi_3, \quad (5.61)$$

где фазовый объем реакции $d\Phi_3$ определен формулой (2.136). Сечение процесса (5.60) строится аналогично, достаточно в обозначениях произвести замену: $q \leftrightarrow \bar{q}$.

Выражения для квадрированных амплитуд запишем, используя комбинации (2.14), (2.15):

$$R_3^{q\bar{q},a} R_3^{q\bar{q},b^+} = -Q_q^2 \cdot D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_{s_1}) T_{33}, \quad (5.62)$$

$$T_{33} = \text{Sp}[\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2] \text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab} \gamma_\nu U_3],$$

$$R_4^{q\bar{q},a} R_4^{q\bar{q},b^+} = -Q_l^2 \cdot D_a(q_s) D_b^*(q_s) T_{44}, \quad (5.63)$$

$$T_{44} = \text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3] \text{Sp}[\gamma_\mu U_1^{ab} \gamma_\nu U_2],$$

$$R_3^{q\bar{q},a} R_4^{q\bar{q},b^+} = -Q_q Q_l \cdot D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_s) T_{34}, \quad (5.64)$$

$$T_{34} = \text{Sp}[\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \gamma_\nu U_2] \text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3],$$

$$R_4^{q\bar{q},a} R_3^{q\bar{q},b^+} = -Q_q Q_l \cdot D_a(q_s) D_b^*(q_{s_1}) T_{43}, \quad (5.65)$$

$$T_{43} = \text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_3] \text{Sp}[\gamma_\mu U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2].$$

Выражения U из этих формул выведены в главе 2, их можно использовать сразу в УРП:

$$\begin{aligned} U_1^{ab} &= \frac{1}{2} [\lambda_{q+}^{ab} (1 + \lambda_1 \gamma_5) - \lambda_{l-}^{ab} (\lambda_1 + \gamma_5)] \hat{p}_1, & U_2 &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \lambda_2) \hat{p}_2, \\ U_3 &= \hat{p}_3, & U_4^{ab} &= (\lambda_{l+}^{ab} - \lambda_{l-}^{ab} \gamma_5) \hat{p}_4. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Для конфигурации $\bar{q}q$ квадрированные амплитуды выглядят так:

$$R_3^{\bar{q}q,a} R_3^{\bar{q}q,b^+} = -Q_q^2 \cdot D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_{s_1}) \text{Sp}[\Gamma_5^{\mu\rho} U_2^{ab} \Gamma_5^{\nu\rho+} U_1] \text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab} \gamma_\nu U_3],$$

$$R_4^{\bar{q}q,a} R_4^{\bar{q}q,b^+} = -Q_l^2 \cdot D_a(q_s) D_b^*(q_s) \text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3] \text{Sp}[\gamma_\mu U_2^{ab} \gamma_\nu U_1],$$

$$R_3^{\bar{q}q,a} R_4^{\bar{q}q,b^+} = -Q_q Q_l \cdot D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_s) \text{Sp}[\Gamma_5^{\mu\rho} U_2^{ab} \gamma_\nu U_1] \text{Sp}[\gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3],$$

$$R_4^{\bar{q}q,a} R_3^{\bar{q}q,b^+} = -Q_q Q_l \cdot D_a(q_s) D_b^*(q_{s_1}) \text{Sp}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_3] \text{Sp}[\gamma_\mu U_2^{ab} \Gamma_5^{\nu\rho+} U_1].$$

Новое выражение U_2^{ab} из этих формул в УРП имеет сходный с U_2^{ab} вид:

$$U_2^{ab} = \frac{1}{2} [\lambda_{q+}^{ab} (1 - \lambda_2 \gamma_5) - \lambda_{l-}^{ab} (-\lambda_2 + \gamma_5)] \hat{p}_2. \quad (5.67)$$

Таким образом видно, что случаи $q\bar{q}$ и $\bar{q}q$ отличаются лишь заменами: $p_1 \leftrightarrow p_2$, $\lambda_1 \leftrightarrow -\lambda_2$. Так как результат содержит только две комбинации степеней поляризации (2.19):

$$P_1^- = \lambda_1 - \lambda_2, \quad P_2^- = 1 - \lambda_1 \lambda_2,$$

то на результат в УРП вторая замена не влияет. Результат представляется в виде (других комбинаций констант связи в УРП нет):

$$T_i = P_2^- \left(\lambda_{q+}^{ab} \lambda_{l+}^{ab} \cdot T_i^{(1)} + \lambda_{q-}^{ab} \lambda_{l-}^{ab} \cdot T_i^{(2)} \right) + P_1^- \left(\lambda_{q+}^{ab} \lambda_{l-}^{ab} \cdot T_i^{(3)} + \lambda_{q-}^{ab} \lambda_{l+}^{ab} \cdot T_i^{(4)} \right),$$

где индекс i пробегает значения: $i = (33, 44, 34, 43)$. Непосредственным расчётом можно показать равенство интерференционных вкладов $T_{34} = T_{43}$, это поможет ускорить численное интегрирование.

Выражения T_i довольно громоздки, но есть возможность их представить в более-менее обозримом виде, поскольку они содержат симметричные комбинации. Приведем их в УРП, замечая, что массу требуется сохранять только в следующих комбинациях:

$$I_1 = \frac{m_q^2}{z_1^2}, \quad I_2 = \frac{m_q^2}{v_1^2}, \quad I_3 = \frac{m_l^2}{z^2}, \quad I_4 = \frac{m_l^2}{v^2}.$$

Итак, ISR-слагаемые имеют вид:

$$\begin{aligned} T_{33}^{(1)} &= -T_{33}^{(4)} = \\ &= \frac{4s}{z_1 v_1} (2tt_1 + tv + t_1 z) - \frac{4}{z_1} (tt_1 - 2tu_1 + uu_1 + uv + t_1 z) - \\ &- 8I_1 (tt_1 + uu_1 + uv + t_1 z) + (p_1 \leftrightarrow p_2), \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} T_{33}^{(2)} &= -T_{33}^{(3)} = \\ &- \frac{4s}{z_1 v_1} (2tt_1 + tv + t_1 z) + \frac{4}{z_1} (tt_1 - uu_1 - uv + t_1 z) + \\ &+ 8I_1 (tt_1 - uu_1 - uv + t_1 z) - (p_1 \leftrightarrow p_2). \end{aligned} \quad (5.69)$$

FSR-слагаемые такие же по форме и присутствующей симметрии:

$$\begin{aligned} T_{44}^{(1)} &= -T_{44}^{(4)} = \frac{4}{zv} (2ts_1 t_1 - ts_1 v_1 - s_1 t_1 z_1) + \frac{4}{z} (-tu + tt_1 - t_1 z_1) + \\ &+ \frac{4}{v} (tt_1 - tv_1 - t_1 u_1) + 8I_3 (-tt_1 + t_1 z_1) + 8I_4 (-tt_1 + tv_1) + \\ &+ (p_1 \leftrightarrow p_2), \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} T_{44}^{(2)} &= -T_{44}^{(3)} = \frac{4}{zv} (-2ts_1 t_1 + ts_1 v_1 + s_1 t_1 z_1) + \frac{4}{z} (-tt_1 + t_1 z_1) + \\ &+ \frac{4}{v} (-tt_1 + tv_1) + 8I_3 (tt_1 - t_1 z_1) + 8I_4 (tt_1 - tv_1) - \\ &- (p_1 \leftrightarrow p_2). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Интерференционные слагаемые имеют противоположную симметрию:

$$\begin{aligned}
T_{34}^{(1)} = -T_{34}^{(4)} = & \frac{2}{z_1 z} (sts_1 - stt_1 - 2sut_1 - suu_1 - ss_1 t_1 + ss_1^2 + s^2 s_1 + \\
& + tuu_1 - ts_1 t_1 - tt_1^2 - t^2 t_1 - us_1 u_1 - 3ut_1 u_1 - 2s_1 t_1 u_1) + \\
& + \frac{2}{z_1 v} (stt_1 + sus_1 + 2sut_1 + suu_1 - ss_1 u_1 - ss_1^2 - s^2 s_1 + \\
& + 2tus_1 + 3tut_1 + ts_1 t_1 - tt_1 u_1 + us_1 u_1 + uu_1^2 + u^2 u_1) - \\
& - (p_1 \leftrightarrow p_2), \tag{5.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{34}^{(2)} = -T_{34}^{(3)} = & \frac{2}{z_1 z} (sts_1 - stt_1 + 2sut_1 - suu_1 + 3ss_1 t_1 + ss_1^2 + s^2 s_1 + \\
& + tuu_1 - ts_1 t_1 - tt_1^2 - t^2 t_1 - us_1 u_1 + ut_1 u_1 + 2s_1 t_1 u_1) + \\
& + \frac{2}{z_1 v} (-stt_1 + 3sus_1 + 2sut_1 - suu_1 + ss_1 u_1 + ss_1^2 + s^2 s_1 + \\
& + 2tus_1 + tut_1 - ts_1 t_1 + tt_1 u_1 - us_1 u_1 - uu_1^2 - u^2 u_1) + \\
& + (p_1 \leftrightarrow p_2). \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Наконец, используя конволюцию, запишем выражение для сечения процесса Дрелла – Яна с излучением одного тормозного фотона:

$$\begin{aligned}
d\sigma_R^h = & \frac{1}{3} \sum_q \sum_{r_1, r_2} dx_1 dx_2 \cdot \Theta_R \times \\
& \times \left(f_q^{r_1, A}(x_1) f_{\bar{q}}^{r_2, B}(x_2) d\hat{\sigma}_R^{q\bar{q}} + f_{\bar{q}}^{r_1, A}(x_1) f_q^{r_2, B}(x_2) d\hat{\sigma}_R^{\bar{q}q} \right), \tag{5.74}
\end{aligned}$$

где фактор Θ_R отвечает за определение области фазового объёма, допустимой (радиационной) кинематикой реакции.

5.7.1 Вклад мягких фотонов

Отдельно вычислим сечение тормозного излучения мягких фотонов в партонной реакции, которое имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{\text{soft}}^{q\bar{q}}}{dt} = \delta_{\text{soft}}^{q\bar{q}} \frac{d\sigma_0^{q\bar{q}}}{dt}, \tag{5.75}$$

где

$$\delta_{\text{soft}}^{q\bar{q}} = -\frac{\alpha}{2\pi^2} \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3 p}{2p_0} \left[Q_q \left(\frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} \right) - Q_l \left(\frac{p_3^\rho}{pp_3} - \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right) \right]^2, \tag{5.76}$$

здесь p – 4-импульс тормозного фотона, прочие обозначения и методические приёмы вычислений такие же, как в главе 2. Снимаем интеграл, тогда поправка (5.76), содержащая массу фотона λ и максимальную энергию тормозного фотона ω в с.ц.м.к., приобретает вид:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{soft}}^{q\bar{q}} = & \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{4\omega^2}{\lambda^2} \left[Q_q^2 (L_{sq} - 1) + Q_l^2 (L_{sl} - 1) + 2Q_q Q_l t_{tu} \right] + \right. \\ & + Q_q^2 \left(L_{sq} - \frac{1}{2} L_{sq}^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + Q_l^2 \left(L_{sl} - \frac{1}{2} L_{sl}^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \\ & \left. + 2Q_q Q_l \left(\text{Li}_2 \left[-\frac{t}{u} \right] - \text{Li}_2 \left[-\frac{u}{t} \right] \right) \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Обратим внимание на знак перед интерференционным слагаемым: он отличается от приведенного в предыдущих работах автора, так как в них рассматривался процесс с конечным состоянием l^+l^- , а не l^-l^+ . Отличие проявляется в кроссинговой перестановке $t \leftrightarrow u$, которая и даёт разницу в знаке.

Не составляет труда сложить инфракрасно-расходящиеся части сечений и проверить, что λ в сумме сокращается, то есть ИКР устраняется. Докажем это, применив тождественное преобразование:

$$\sigma \equiv \left[\sigma - \sigma|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} \right] + \sigma|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} = \sigma^{\text{IR}} + \sigma^F.$$

Тогда вершинная IR-часть выглядит так:

$$\frac{d\sigma_{\text{Ver}}^{q\bar{q},\text{IR}}}{dt} = \frac{\alpha^3}{2s^2} \sum_{a,c=\gamma,Z} \Pi^{ab} R_q^{ac} (Q_q^2 \Lambda_{1,q}^{\gamma,\text{IR}} + Q_l^2 \Lambda_{1,l}^{\gamma,\text{IR}}), \quad (5.78)$$

где

$$\Lambda_{1,f}^{\gamma,\text{IR}} = \Lambda_{1,f}^{\gamma} - \Lambda_{1,f}^{\gamma}|_{\lambda \rightarrow \sqrt{s}} = -2 \ln \frac{s}{\lambda^2} (L_{sf} - 1).$$

IR-часть боксовских диаграмм такая:

$$\frac{d\sigma_{\text{Box}}^{q\bar{q},\text{IR}}}{dt} = -\frac{2\alpha^3}{s^2} Q_q Q_l \sum_{a,c=\gamma,Z} \Pi^{ab} R_q^{ac} \left[tH_0^{\gamma,\text{IR}}(p_1, p_3) - (t \leftrightarrow u) \right], \quad (5.79)$$

где

$$tH_0^{\gamma,\text{IR}}(p_1, p_3) = \ln \frac{s}{\lambda^2} \ln \frac{-t}{m_q m_l}.$$

Складываем вершинный и боксовский вклады, получаем:

$$\frac{d\sigma_V^{q\bar{q},\text{IR}}}{dt} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\sigma_0^{q\bar{q}}}{dt} \ln \frac{\lambda^2}{s} \left[Q_q^2 (L_{sq} - 1) + Q_l^2 (L_{sl} - 1) + 2Q_q Q_l l_{tu} \right]. \quad (5.80)$$

Видно, что в сумме с вкладом мягкого фотонного излучения (5.75) параметр λ сокращается.

Попутно убеждаемся, что в сумме виртуальной и мягкой частей отсутствуют двойные коллинеарные логарифмы (остаётся только первая степень), а кварковая коллинеарная сингулярность, приводящая в силу неопределённости кварковой массы к неудовлетворительному результату, выделяется в точности в том виде, который позволяет адсорбировать её в функции партонных распределений в полном соответствии, например, с $\overline{\text{MS}}$ -схемой КХД [94]. Этот вопрос будет рассмотрен подробно ниже в разделе 5.8.

5.7.2 Радиационная кинематика процесса Дрелла – Яна

Лоренц-инварианты, описывающие радиационный процесс, те же, что в главе 2, см. (2.127):

$$z_1 = 2p_1 p, \quad v_1 = 2p_2 p, \quad z = 2p_3 p, \quad v = 2p_4 p, \quad (5.81)$$

а s_1 , t_1 , u_1 описываются формулами (5.10). Соотношения, которые их связывают, отличаются лишь тем, что массы частиц конечного и начального состояний не одинаковы:

$$z_1 + v_1 = z + v, \quad s + t + u = 2m_q^2 + 2m_l^2 + v. \quad (5.82)$$

Интересно и такое соотношение:

$$s_1 + t_1 + u_1 = 2m_q^2 + 2m_l^2 - v. \quad (5.83)$$

Переходя в УРП, получим полное совпадение с соотношениями из табл. 2.1.

Инвариант s в радиационном случае следует пересчитать, так как для процесса Дрелла – Яна он не является заданным параметром реакции, а определяется из других соображений. Рассмотрим в с.ц.м.к. связь между партонными инвариантами $s_1 = s - z_1 - v_1$, откуда получим соотношение $M^2 = s - 2\sqrt{s}p_0$. Решаем его относительно s , тогда, отбрасывая нефизический корень, получим

$$s = \left(p_0 + \sqrt{p_0^2 + M^2} \right)^2. \quad (5.84)$$

В каком-то смысле это ключевая формула, она показывает, что кварковый инвариант s при данном M зависит только от энергии фотона и не зависит от полной энергии реакции и $x_{1,2}$. Хотя, как и прежде, имеет место соотношение $s = x_1 x_2 S$, но надо понимать, что именно комбинация $x_1 x_2$ “подстраивается” под s и S по формуле $x_1 x_2 = s/S$. Используя эту формулу и соотношение (5.23) [оно введено в начале раздела, но легко модифицируется в случае радиационной кинематики, так как p_z вычисляется в случае радиационной кинематики по той же формуле (5.22)]:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{\hat{t}_1 + \hat{u}}{\hat{t} + \hat{u}_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1(z_1 + M^2)}{x_2(v_1 + M^2)},$$

получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p_0 + \sqrt{p_0^2 + M^2}}{\sqrt{S}} \sqrt{\frac{v_1 + M^2}{z_1 + M^2}} e^y, \\ x_2 &= \frac{p_0 + \sqrt{p_0^2 + M^2}}{\sqrt{S}} \sqrt{\frac{z_1 + M^2}{v_1 + M^2}} e^{-y}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Якобиан, соответствующий радиационной кинематике, имеет вид:

$$J_R = \frac{D(x_1, x_2)}{D(M, y)} = -\frac{2M p_0 + \sqrt{p_0^2 + M^2}}{S \sqrt{p_0^2 + M^2}}. \quad (5.86)$$

Интегрирование по углу рассеяния лептона остаётся в фазовом объёме Φ_3 , который вычисляется в точности как в главе 2 (2.136). Наконец, инвариант t (см., например, выражение (2.130)) в радиационном случае в с.ц.м.к. вычисляется по формуле

$$t = \frac{1}{2} \left(2m_q^2 + 2m_l^2 - s + v + \cos \theta \cdot \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \sqrt{(s - v)^2 - 4m_l^2 s} \right). \quad (5.87)$$

Радиационный u выглядит так же, но с другим знаком при $\cos \theta$.

5.7.3 Связь полного и дифференциального сечения

Для того, чтобы перейти от полного сечения к дифференциальному, требуется формально продифференцировать его по переменной M , используя очевидное соотношение, которое базируется на определении полного сечения и теореме Барроу (производная интеграла с переменным верхним пределом

по этому пределу равна значению подынтегральной функции от верхнего предела):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Учитывая известную формулу функционального анализа $\Theta'(x) = \delta(x)$, можно снять одно из интегрирований (например, по переменной x_2) с помощью возникшей δ -функции и известного правила:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - z) dx = f(z) \Theta(z - a) \Theta(b - z).$$

Итак, чтобы в радиационном случае сделать переход от полного к дифференциальному сечению, нужно: опустить интегрирование по x_2 и подынтегральный фактор $\Theta(\hat{s} - z - v - M^2)$; осуществить замену $x_2 \rightarrow \frac{M^2 + z + v}{Sx_1}$ (что эквивалентно $\hat{s} \rightarrow M^2 + z + v$); домножить подынтегральное выражение в сечении на фактор $2M(Sx_1)^{-1} \Theta(Sx_1 - M^2 - z - v)$. Для безрадиационного случая переход такой же, но плюс к этому все радиационные инварианты зануляются.

5.8 Решение проблемы кварковой массовой сингулярности

Теперь нужно решить проблему кварковой массовой сингулярности, то есть добиться независимости результатов от кварковых масс. Для этого используем $\overline{\text{MS}}$ -схему [94] и процедуру линеаризации, которая была обоснована в работе [169]. После всех предписанных манипуляций часть дифференциального сечения, которую следует вычесть для решения проблемы, имеет вид (аббревиатура QS означает “кварковая сингулярность”, quark singularity)

$$d\alpha_{\text{QS}} = \frac{1}{3} \sum_q dx_1 dx_2 \int_0^{1 - \frac{2\omega}{M}} \left[(q(x_1) \Delta \bar{q}(x_2, \eta) + \Delta q(x_1, \eta) \bar{q}(x_2)) d\sigma_0^{q\bar{q}} + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right] \cdot \Theta \cdot d\eta, \quad (5.88)$$

где используются следующие сокращенные обозначения:

$$q(x) \equiv q(x, Q^2) \equiv f_q(x, Q^2).$$

Наконец, вводится нетривиальная комбинация:

$$\Delta q(x, \eta) = \frac{\alpha}{2\pi} Q_q^2 \left[\frac{1}{\eta} q\left(\frac{x}{\eta}, M_{sc}^2\right) \theta(\eta - x) - q(x, M_{sc}^2) \right] \times \\ \times \frac{1 + \eta^2}{1 - \eta} \left(\ln \frac{M_{sc}^2}{m_q^2} - 2 \ln(1 - \eta) - 1 \right), \quad (5.89)$$

где M_{sc} – масштаб факторизации (factorization scale) [94].

5.9 КХД радиационные поправки

Кратко опишем происхождение и структуру однопетлевых радиационных КХД-поправок (NLO QCD corrections) для процесса Дрелла – Яна. Существуют два типа диаграмм, первый из них (по терминологии КХД – процесс $q\bar{q}$ -типа, идущий в несинглетном канале) приведен на рис. 5.8. Результат

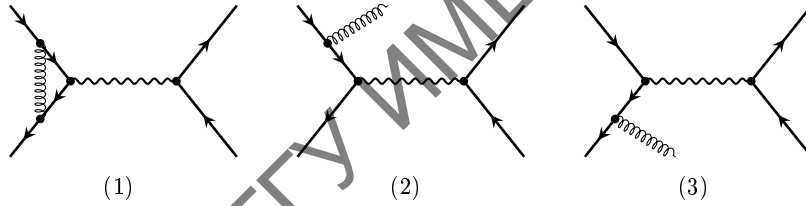


Рис. 5.8: Фейнмановские диаграммы для процесса с глюонной вершинной функцией и глюонным тормозным излучением для начального состояния $q\bar{q}$

для этой части легко может быть получен из вклада соответствующих диаграмм с фотоном с использованием замены постоянной тонкой структуры α на константу сильного взаимодействия α_s :

$$Q_q^2 \alpha \rightarrow \sum_{a=1}^{N^2-1} t^a t^a \alpha_s = \frac{N^2 - 1}{2N} I \alpha_s \rightarrow \frac{4}{3} \alpha_s, \quad (5.90)$$

где $2t^a$ – матрицы Гелл-Мана, а $N = 3$ – число поколений кварков.

Процессы второго типа (qg -типа, так называемый синглетный канал) обычно называются инверсным глюонным излучением (IGE, inverse gluon emission), они приведены на рис. 5.9. Вклад первого типа рассчитан автором в работе [252], а второго – в работе [253].

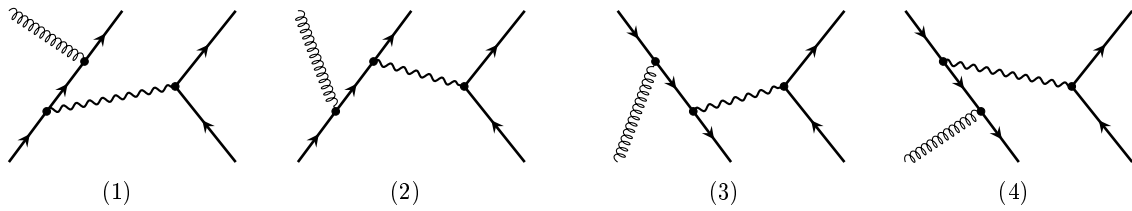


Рис. 5.9: Фейнмановские диаграммы процессов инверсного глюонного излучения с начальным состоянием gq (первая и вторая) и $q\bar{q}$ (третья и четвёртая)

5.10 Численные оценки ЭСП для условий CMS LHC

Для численных оценок этого раздела принимается следующий набор предписаний [282]:

1. исследуемая реакция (5.1) с начальными неполяризованными протонами суммарной энергии $\sqrt{S} = 14$ ТэВ (LHC, Run3);
2. электрослабые параметры СМ и лептонные массы, которые соответствуют [259];
3. для массы хиггсовского бозона СМ выбирается современное значение $m_H = 125.26$ ГэВ (имеет место слабая зависимость ЭСП от этого параметра);
4. учитываем все ароматы валентных и “морских” кварков в протоне, кроме аромата t ;
5. набор функций кварковых распределений MRST2004QED [129], в которых учитывается КЭД-эволюция [128] и делается выбор $Q = M_{sc} = M$, см. [283] (было проведено сравнение результатов, полученных с разными распределениями, и не обнаружено существенного отличия для относительных поправок между, в частности, следующими наборами: CTEQ6 [284], MSTW2008 [130], CT10 [280], MMHT14 [281]; вопрос этот весьма важный и требует отдельного исследования, особенно в “новой” области сверхвысоких энергий LHC);
6. стандартные экспериментальные ограничения на угол вылета детектируемого лептона l^- : $-\zeta^* \leq \cos \theta \leq \zeta^*$ [используется обозначение: $\zeta = \cos \theta$] или на его быстроту: $|y(l)| \leq y(l)^*$; связь между этими переменными следующая:

$$y(l) = -\ln \tan \frac{\theta}{2}; \quad \zeta = \frac{1 - A}{1 + A}, \quad A = e^{-2y(l)}; \quad (5.91)$$

для экспериментов на детекторе CMS ζ^* и $y(l)^*$ принимают значения:

$$y(l)^* = 2.4, \zeta^* \approx 0.983675; \quad y(l)^* = 2.5, \zeta^* \approx 0.986614; \quad (5.92)$$

для l^+ используются такие же ограничения;

7. используется второе стандартное экспериментальное ограничение детектора CMS: $p_T(l^\pm) \geq 20$ ГэВ;
8. применяется так называемая чистая схема (“bare” setup) требований идентификации лептонов: не принимается во внимание “размазывание” (smearing) и не учитываются условия рекомбинации детектируемого лептона и радиационного фотона (“calo” setup).

Фактор Θ , который отвечает за определение области фазового объёма, допустимой кинематикой реакции в соответствии с геометрией детектора, представляет собой произведение θ -функций, опишем его подробнее:

$$\begin{aligned} \Theta = & \Theta(\zeta^* - \cos \theta) \Theta(\zeta^* + \cos \theta) \Theta(\zeta^* - \cos \alpha) \Theta(\zeta^* + \cos \alpha) \times \\ & \times \Theta(p_T(l^-) - p_T^{\min}) \Theta(p_T(l^+) - p_T^{\min}) \end{aligned} \quad (5.93)$$

Все величины из этого выражения приведены выше, использовать их нужно в зависимости от кинематики (безрадиационная или радиационная).

Сравним полученные оценки с результатами аналогичных расчётов, проведенных другими группами. В работе [232] приведены ЭСП для полного сечения, дифференциальных распределений и асимметрии вперёд-назад в области M до 2 ТэВ, рассчитанные с помощью программных комплексов ведущих мировых групп: HORACE [285], SANC [169], ZGRAD2 [229]. Для сравнения были выбраны те же условия детектирования частиц и электро-слабых параметров, что и в [232] (они в основном совпадают с приведенными выше). Результат [286] изображен на рис. 5.10.

На данные, приведенные в [232], наложены значения, полученные с помощью программы FEWZ [287] (считается официальной программой CMS LHC), а также значения кода автора READY. Чтобы получить ЭСП к распределению по M , было произведено интегрирование по переменной y по всей области изменения, исключая область за пределами возможностей детектора. Полученные результаты для относительной поправки к сечению

$$\delta = d\sigma^{\text{NLO}}/d\sigma^0$$

($l = \mu$, “bare” setup) от всех программ совпадают с точностью примерно 1%. Согласие улучшается с ростом M , что легко объяснимо тем, что автором

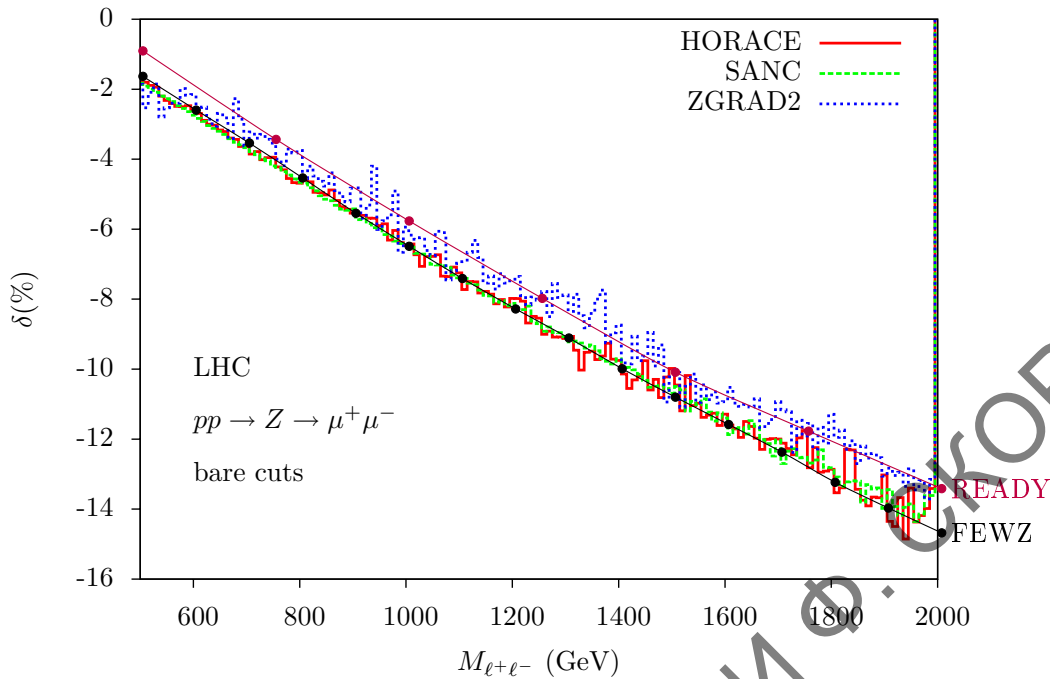


Рис. 5.10: Относительные ЭСП (в %) к сечению $d\sigma/dM$ в зависимости от M

использовался асимптотический метод [235], который чрезвычайно сильно упрощает формулы и ускоряет счёт, но начинает удовлетворительно работать только при $M \geq 0.5$ ТэВ.

На рис. 5.11 изображена разница между поправленной и борновской асимметриями вперёд-назад с учётом ЭСП (случай $l = \mu$, “bare” setup), полученная разными группами. Асимметрия A_{FB} определяется стандартным образом (см., например, формулы (35)–(38) из [229]). Кроме требований и ограничений, которые накладывались на наблюдаемые сечения, для асимметрий обычно используется ещё и условие, накладываемое на быстроту лептонной пары, которое сильно сказывается на масштабе и поведении асимметрии. К данным на рис. 5.11 это условие не применялось.

На рис. 5.12 показаны предсказания [288] для относительных радиационных поправок к дифференциальному (по M) сечению для Run 3 LHC. Интервал Run 3 по инвариантной массе мюонной пары соответствует таким значениям: $4.6 \text{ ТэВ} < M < 5.2 \text{ ТэВ}$.

Наконец, на рис. 5.13 показаны численные предсказания [288] для асимметрии вперёд-назад с учётом ЭСП и КХД поправок при характерных ограничениях эксперимента CMS LHC при энергии Run 3 $\sqrt{S} = 14$ ТэВ (наложены 4 стандартных набора ограничений на быстроту $\mu^+\mu^-$ -пары). Были использованы: программа READY, партонные распределения [280].

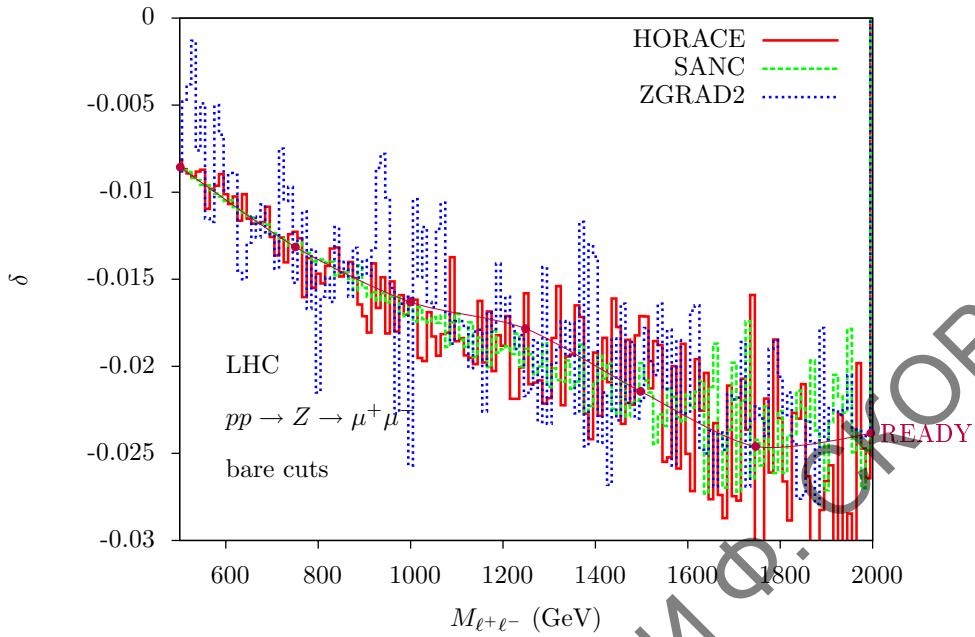


Рис. 5.11: Разница между поправленной и борновской асимметриями ($\delta = A_{\text{FB}}^{\text{NLO}} - A_{\text{FB}}^0$) в зависимости от M

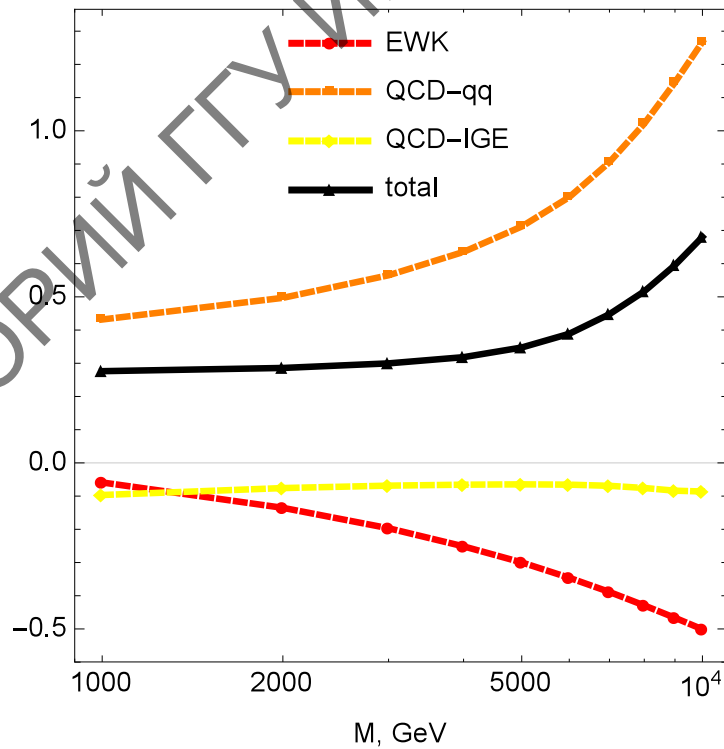


Рис. 5.12: Относительные поправки к дифференциальному сечению $d\sigma/dM$: $\mu^+ \mu^-$ измерения, ST10, $\sqrt{S} = 14$ ТэВ, стандартные каты SMC

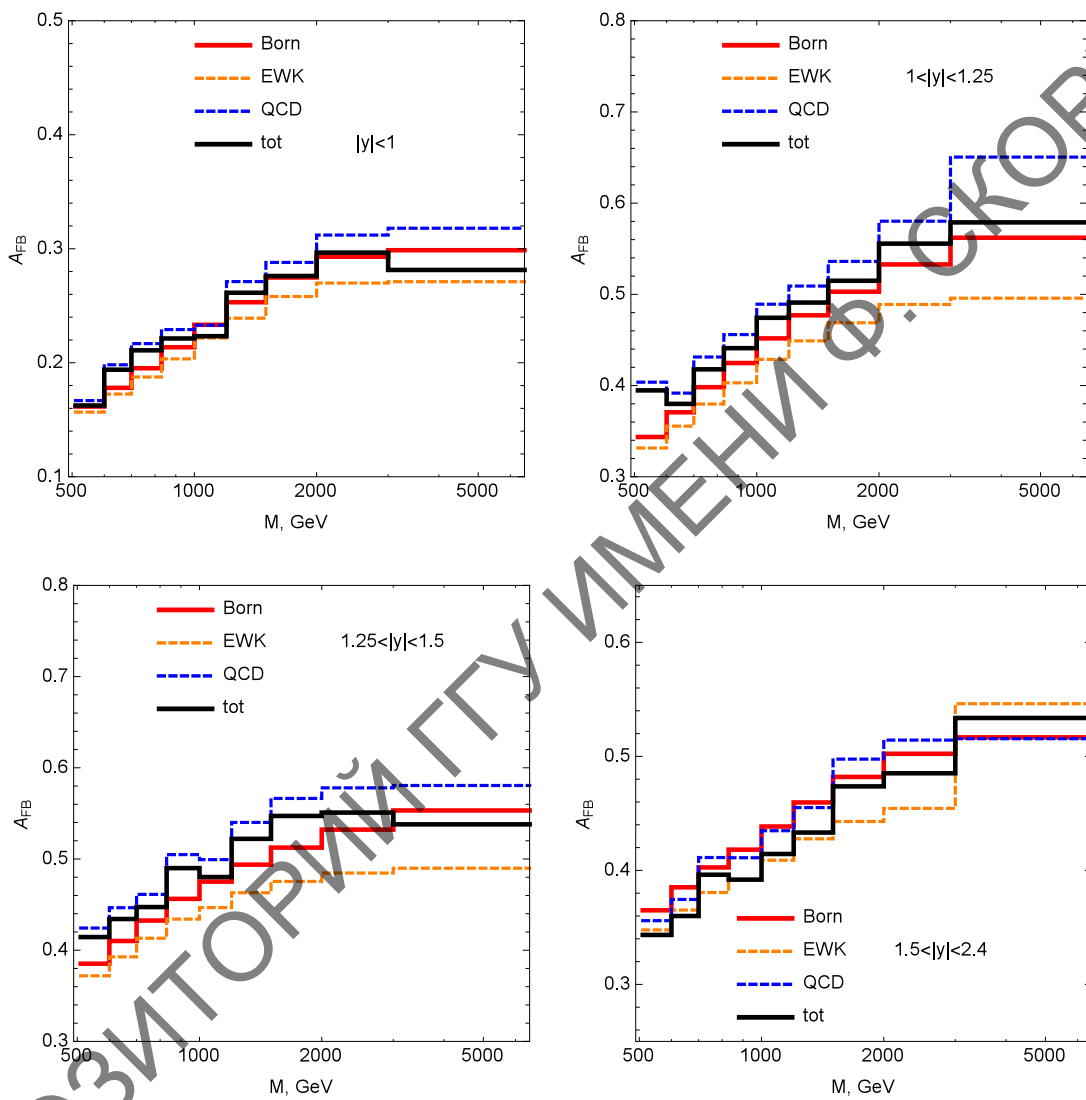


Рис. 5.13: Асимметрии A_{FB} для $\mu^+\mu^-$ -случая. Использованы стандартные CMS ограничения на M и y , энергия $\sqrt{S} = 14$ ТэВ

6 РАСЧЁТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1 Правила Фейнмана

Чтобы в рамках СМ записать амплитуду процесса взаимодействия элементарных частиц, нужно прежде всего изобразить его (процесс) с помощью диаграммы Фейнмана в заданном порядке теории возмущений, отражающей способ перехода из начального состояния в конечное, основанный на лагранжиане взаимодействия. Затем нужно использовать правила Фейнмана, которые отражают структуру операторов в разложении по теореме Вика, и согласно которым каждому графическому элементу диаграммы соответствует определённое математическое содержание. Важно следить за очередностью записи, не забывая, что амплитуда – это произведение матриц, со сложными законами коммутации. Проходим элементы диаграммы против стрелки, которая ставится на линии, соответствующей элементарной частице, по её движению; в случае античастицы стрелка ставится против движения. При движении по фермионной линии матрицу следует описывать обозначением с индексами, тогда в случае замкнутой фермионной петли естественным образом образуется след произведения матриц по правилу

$$A^{ij} B^{jk} \dots D^{li} = [AB \dots D]^{ii} = \text{Sp}[AB \dots D]. \quad (6.1)$$

Приведем основные правила Фейнмана (более подробный список приведен, например, в обзорах [66], [67]).

- Входящему фермиону с 4-импульсом p соответствует биспинорная амплитуда $u(p)$, выходящему соответствует биспинорная амплитуда $\bar{u}(p)$.
- Выходящему бозону (фотону) с 4-импульсом p соответствует вектор поляризации $e_\rho(p)$,
- Пропагатору бозона (в калибровке Фейнмана) соответствует выражение

$$-ig^{\alpha\beta} D_\alpha(q), \quad (6.2)$$

где q – 4-импульс передачи в пропагаторе,

$$D_a(q) = \frac{1}{q^2 - m_a^2 + im_a\Gamma_a}, \quad a = \gamma, Z. \quad (6.3)$$

Фотонная масса $m_\gamma \equiv \lambda$ равна нулю везде, кроме специально отмеченных случаев, где она используется как инфинитезимальный параметр, который регуляризует инфракрасную расходимость. Масса Z -бозона обозначена как m_Z , его ширина – Γ_Z (используется схема с фиксированной шириной).

- Фермионный (электронный) пропагатор выглядит так (p – 4-импульс передачи в пропагаторе, также везде используется сокращенная запись $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu$ ¹):

$$iS(p) = i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (6.4)$$

- Вершине взаимодействия фермиона f с калибровочным бозоном a соответствует выражение:

$$ie\gamma_\mu \Gamma_f^a, \quad \text{где } \Gamma_f^a = v_f^a - a_f^a \gamma_5. \quad (6.5)$$

Векторные и аксиально-векторные константы связи фермиона f с фотоном и Z -бозоном:

$$v_f^\gamma = -Q_f, \quad a_f^\gamma = 0, \quad v_f^Z = \frac{I_f^3 - 2Q_f s_W^2}{2s_W c_W}, \quad a_f^Z = \frac{I_f^3}{2s_W c_W}. \quad (6.6)$$

Используются следующие параметры СМ: Q_f – электрический заряд f -частицы в единицах протонного заряда, третья компонента слабого изоспина (тут конкретизируем тип фермиона):

$$I_\nu^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_e^3 = -\frac{1}{2}, \quad I_u^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_d^3 = -\frac{1}{2}, \quad (6.7)$$

а s_W (c_W) – синус (косинус) угла Вайнберга, которые связаны с массами Z - и W -бозона согласно правилам СМ:

$$c_W = \frac{m_W}{m_Z}, \quad s_W = \sqrt{1 - c_W^2}. \quad (6.8)$$

¹Не менее часто в литературе используется перечёркнутый символ: $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

- По 4-импульсу каждой внутренней частицы следует провести интегрирование. С учётом сохранения 4-импульса в каждой вершине, которая выражается присутствием в ней соответствующей δ -функции в конечном выражении для амплитуды, останется одна δ -функция, выражающая общий закон сохранения энергии-импульса диаграммы.

Существует большое число альтернативных обозначений для вершин и констант связи. С этой точки зрения обозначения, используемые в работах [66], [67], отнюдь не являются более употребительными. Например, для записи вершины не менее популярны обозначения Деннера [67]:

$$ie\gamma_\mu(g_-^a\omega_- + g_+^a\omega_+), \quad \omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \quad (6.9)$$

Для определённого типа фермиона связь между обозначениями Холлика и Деннера имеет следующий вид:

$$g_\mp^a = v^a \pm a^a. \quad (6.10)$$

Приведенные параметры СМ связаны (на борновском уровне) с важным и чрезвычайно точно экспериментально определенным физическим параметром – константой Ферми G_F , следующим образом:

$$\pi\alpha = \sqrt{2}G_F s_W^2 m_W^2, \quad (6.11)$$

где α – постоянная тонкой структуры, которая при $\hbar = c = 1$ в системе единиц Хевисайда – Лоренца безразмерна и имеет вид и численное значение: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.036}$.

Сконструированная по вышеприведенным правилам Фейнмана амплитуда \mathcal{M} процесса позволяет сформировать дифференциальное сечение. В случае процесса $2 \rightarrow 2$ дифференциальное сечение записывается с помощью формулы:

$$d\sigma = \frac{1}{8\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_2, \quad (6.12)$$

где фазовый объём реакции имеет вид

$$d\Phi_2 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2p_{40}}. \quad (6.13)$$

Снимая с помощью δ -функции три интеграла по пространственным компонентам p_4 и переходя в сферическую систему координат, получим в с.ц.м. (где энергии конечных частиц равны $p_{30} = p_{40}$):

$$d\Phi_2 = \delta(\sqrt{s} - 2p_{30}) \frac{1}{4p_{30}p_{40}} |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta d\varphi, \quad (6.14)$$

где

$$\sqrt{s} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2} = p_{10} + p_{20}$$

– полная энергия реакции (в с.ц.м., где $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$).

Применив соотношение $|\mathbf{p}_3|d|\mathbf{p}_3| = p_{30}dp_{30}$ и снимая интегралы (по p_{30} с помощью δ -функции [используем (2.147) и не теряем $\frac{1}{2}$], а по φ с учётом симметрии системы относительно азимутального поворота), получим, возвращаясь на последнем шаге к лоренц-инвариантной записи:

$$d\Phi_2 = \frac{\pi|\mathbf{p}_3|}{4p_{40}}d\cos\theta = \frac{\pi}{2s}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}dt. \quad (6.15)$$

Что касается упомянутой выше лоренц-инвариантности, полезно привести несколько формул, связанных с этим понятием (удержим до конца этого раздела в формулах скорость света c). Псевдоевклидов 4-импульс энергии-импульса определяется выражением (масса проявляет себя, как скаляр равный “длине” этого вектора): $p_\mu = (\frac{E}{c^2}, \frac{\mathbf{p}}{c})$, где E – энергия, \mathbf{p} – 3-импульс (с входит в p_μ со строгим соблюдением размерности). Квадрируя, получим: $m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{\mathbf{p}^2}{c^2}$, откуда видно, что

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}.$$

При $\mathbf{p} = 0$ находим знаменитое $E_0 = mc^2$ – выражение для энергии покоя.² Соответственно, кинетическая энергия – разность: $E_k = E - E_0$. Общая связь 3-импульса и скорости

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \cdot \mathbf{v}.$$

При небольших \mathbf{p} , упрощая, получим классические выражения:

$$E_k = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Наконец, связи со скоростью энергии и 3-импульса имеют вид:

$$E = \gamma mc^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

²Студентам будет крайне полезно ознакомиться с работой Л.Б. Окуня [289], например, чтобы расстаться с вредными иллюзиями относительно “зависимости массы от скорости”.

6.2 Дилогарифм Спенса

Приведем некоторые полезные формулы для дилогарифма (функции) Спенса [290]. Его определение при $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t} dt. \quad (6.16)$$

Имеется разрез на вещественной оси при $x \in [1, \infty)$, который даёт ненулевую мнимую часть:

$$\operatorname{Im} \operatorname{Li}_2(x) = -\pi \ln x.$$

Для комплексных аргументов полезна формула:

$$\operatorname{Li}_2(z) = -\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2} \ln^2(-z) - \frac{1}{6} \pi^2. \quad (6.17)$$

Для действительных аргументов имеются свойства:

$$\operatorname{Li}_2(x) = -\operatorname{Li}_2(1-x) - \ln|x| \ln|1-x| + \frac{\pi^2}{6}, \quad (6.18)$$

$$\operatorname{Li}_2(x) = -\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln^2(-x) - \frac{1}{6} \pi^2 \quad (x < 0), \quad (6.19)$$

$$\operatorname{Li}_2(x) = -\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{3} \pi^2 \quad (x > 0). \quad (6.20)$$

Формулы (6.18) и (6.19) полезны для вычисления функции Спенса через её разложение в ряд:

$$\operatorname{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad (6.21)$$

который сходится при $|x| < 1$. Преобразования (6.18)–(6.20) обеспечат подходящее для точной оценки разложение при любых аргументах. Наконец, приведем значения дилогарифма Спенса в некоторых важных точках:

$$\operatorname{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \operatorname{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 2, \quad \operatorname{Li}_2(2) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Далее приведем формулу, полезную при расчётах неопределённых интегралов, которые выражаются через дилогарифм Спенса, она работает для $x \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{\ln(ax+b)}{cx+d} dx = \frac{1}{c} \ln \left| b - \frac{ad}{c} \right| \ln \left| \frac{a(cx+d)}{ad-bc} \right| - \frac{1}{c} \operatorname{Li}_2\left(\frac{a(cx+d)}{ad-bc}\right). \quad (6.22)$$

6.3 Расчёт и перенормировка бозонной собственной энергии

Интересующая нас в этом разделе фейнмановская диаграмма представлена на рис. 6.1. Выписываем по правилам Фейнмана из разд. 6.1 выражение,

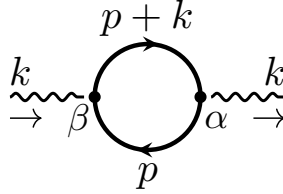


Рис. 6.1: Фейнмановская диаграмма, соответствующая фотонной собственной энергии. Буквами α и β обозначены лоренц-индексы фермион-фотонных вершин

соответствующее электронной петле (фотонные пропагаторы не включаем) на рис. 6.1 и получаем так называемый поляризационный оператор (от явления под названием *поляризация вакуума*)

$$P_{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \cdot i[S(p)]^{ij} \cdot ie[\gamma_\alpha]^{jk} \cdot i[S(p+k)]^{kl} \cdot ie[\gamma_\beta]^{li}. \quad (6.23)$$

Индексы, описывающие матричную структуру, выписаны явно, по повторяющимся индексам проводим суммирование от 1 до 4. С учётом того, что фермионные линии замыкаются, первый и последний индексы в цепочке одинаковы, это приводит к следу (шпуру) последовательного произведения матриц по правилу (6.1).

Проводим упрощение и, используя явный вид электронного пропагатора (6.4), получим:

$$P_{\alpha\beta}(k) = -\frac{\alpha}{\pi} \int \frac{d^4p}{i\pi^2} \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} T_{\alpha\beta}, \quad (6.24)$$

где

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \text{Sp}[(\hat{p} + m)\gamma_\alpha(\hat{p} + \hat{k} + m)\gamma_\beta].$$

След $T_{\alpha\beta}$ вычисляется стандартными приёмами. Приведём здесь программу на языке FORM [258], с помощью которой это нетрудно осуществить.

```
v p,k; i a1,b1; s m;
g T = 1/4*(g_(1,p)+m)*g_(1,a1)*(g_(1,p)+g_(1,k)+m)*g_(1,b1);
trace4,1;
print T;
.end
```

Результат после несложного упрощения такой:

$$T = d_-(a_1, b_e) * (m^2 - p \cdot p - p \cdot k) + 2 * p(a_1) * p(b_e) + p(a_1) * k(b_e) + p(b_e) * k(a_1);$$

Это означает

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} [m^2 - p^2 - (pk)] + 2p_\alpha p_\beta + p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha.$$

Подставив это выражение в поляризационный оператор и поделив почленно, получим:

$$P_{\alpha\beta}(k) = \frac{\alpha}{\pi} \int \frac{d^4 p}{i\pi^2} \left(\frac{g_{\alpha\beta}}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{g_{\alpha\beta}(pk) - 2p_\alpha p_\beta - p_\alpha k_\beta - p_\beta k_\alpha}{(p^2 - m^2)((p+k)^2 - m^2)} \right).$$

Первое слагаемое легко интегрируется с помощью приёма под названием *поворот Вика* (2.116). Можно напрямую применить известную формулу:

$$I_0 = \int \frac{d^4 p}{i\pi^2} \frac{1}{(p-b)^2 - d} = -\Lambda^2 + d \ln \frac{\Lambda^2}{d} - \frac{b^2}{2}, \quad (6.25)$$

для случае первого слагаемого b и k такие: $b = -k$, $d = m^2$. Величина Λ (полагая $\Lambda \rightarrow +\infty$) параметризует ультрафиолетовую расходимость.

При вычислении петлевых интегралов оказываются весьма полезными следующие формулы, объединяющие знаменатель (*трик Фейнмана*):

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{C^2}, \quad \frac{1}{A^2 B} = \int_0^1 \frac{2xdx}{C^3}, \quad \frac{1}{A^3 B} = \int_0^1 \frac{3x^2 dx}{C^4}, \quad (6.26)$$

где

$$C = Ax + B\bar{x}, \quad \bar{x} = 1 - x.$$

В частности, для вычисления второго слагаемого $P_{\alpha\beta}(k)$ применим первую:

$$\frac{1}{(p^2 - m^2)((p+k)^2 - m^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{((p-b)^2 - d)^2}, \quad b = -x \cdot k, \quad d = m^2 - x\bar{x} \cdot k^2.$$

Приведём ещё три (скалярный, векторный, тензорный) нужных для дальнейшего расчёта интеграла:

$$I_{1,\alpha,\alpha\beta} = \int \frac{d^4 p}{i\pi^2} \frac{1, p_\alpha, p_\alpha p_\beta}{((p-b)^2 - d)^2},$$

$$I_1 = \ln \frac{\Lambda^2}{d} - 1, \quad I_\alpha = b_\alpha \left(\ln \frac{\Lambda^2}{d} - \frac{3}{2} \right),$$

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(d \ln \frac{\Lambda^2}{d} - \frac{d}{2} - \frac{\Lambda^2}{2} - \frac{b^2}{3} \right) + b_\alpha b_\beta \left(\ln \frac{\Lambda^2}{d} - \frac{11}{6} \right).$$

Тогда после поднесения I_0 под знак интеграла по x поляризационный оператор приобретает вид:

$$P_{\alpha\beta}(k) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \left(g_{\alpha\beta}(I_0 + k_\mu I_\mu) - 2I_{\alpha\beta} - k_\beta I_\alpha - k_\alpha I_\beta \right).$$

Зная, что поляризационный оператор (после перенормировки) имеет поперечную структуру (2.45), нам достаточно вычислить и перенормировать только часть при $g_{\alpha\beta}$, обозначим её верхним индексом g . Полный поляризационный оператор легко восстановить добавлением к $g_{\alpha\beta}$ слагаемого $-k_\alpha k_\beta / k^2$.

Итак, после подстановок и упрощения имеем:

$$P_{\alpha\beta}(k)|^g = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} \int_0^1 dx \left(-\frac{\Lambda^2}{2} + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{k^2}{2} - xk^2 \left[\ln \frac{\Lambda^2}{d} - \frac{3}{2} \right] - d \ln \frac{\Lambda^2}{d} + \frac{d}{2} + \frac{b^2}{3} \right) \quad (6.27)$$

Теперь приступим к перенормировке, для нее формально требуется вычесть из перенормированного результата первый и второй члены разложения в ряд Маклорена:

$$P_{\alpha\beta}(k)|_R = P_{\alpha\beta}(k) - P_{\alpha\beta}(0) - k^2 \left(\frac{\partial P_{\alpha\beta}(k)}{\partial k^2} \Big|_{k^2 \rightarrow 0} \right). \quad (6.28)$$

Довольно просто получить перенормированное выражение в конкретной точке, например при $k^2 = m^2$ прямой расчёт даёт:

$$P_{\alpha\beta}(k)|_R^g(k^2 = m^2) = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} \frac{3\sqrt{3}\pi - 17}{9} m^2. \quad (6.29)$$

Теперь рассмотрим перенормированное выражение в двух режимах, пока не снимая интеграл по x . В режиме малых k^2 ($|k^2| \ll m^2$) используем переменную $\beta = k^2/m^2$, тогда

$$P_{\alpha\beta}(k)|_R^g = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} m^2 \int_0^1 dx [x\bar{x}\beta + (1 + x^2\beta) \ln(1 - x\bar{x}\beta)].$$

Раскладываем в ряд по β и окончательно получаем

$$P_{\alpha\beta}(k)|_R^g = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} \frac{m^2}{2} \beta^2 \int_0^1 dx (x^4 - x^2) = -\frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} \frac{(k^2)^2}{15m^2}. \quad (6.30)$$

В режиме больших $|k^2|$ ($|k^2| \gg m^2$) используем $\delta = m^2/k^2$, тогда

$$P_{\alpha\beta}(k)|_R^g = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} k^2 \int_0^1 dx \left[x\bar{x} - (x^2 + \delta) \ln \frac{\delta}{\delta - x\bar{x}} \right].$$

Раскладываем в ряд по δ и окончательно получаем

$$P_{\alpha\beta}(k)|_R^g = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} k^2 \int_0^1 dx \left(x\bar{x} + x^2 \ln \frac{x\bar{x}}{-\delta} \right) = \frac{\alpha}{\pi} g_{\alpha\beta} k^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{-k^2}{m^2} - \frac{5}{9} \right) \quad (6.31)$$

Если $k^2 < 0$, то мнимой части нет (так как аргумент логарифма при условии малости ϵ – это действительное положительное число), если же $k^2 > 0$, то получим

$$\begin{aligned} \ln \frac{-k^2}{m^2 - i\epsilon} &= \ln \frac{-k^2(m^2 + i\epsilon)}{m^4 + \epsilon^2} = \ln \left(-\frac{k^2 m^2}{m^4 + \epsilon^2} - i \frac{k^2 \epsilon}{m^4 + \epsilon^2} \right) = \\ &= \ln \frac{k^2}{m^2} - i\pi. \end{aligned}$$

Продемонстрировано, что при положительном ϵ мнимая часть от логарифма имеет именно отрицательный знак перед π . Полученные результаты полностью совпадают с [16].

Зависимости действительной скалярной части перенормированного поляризационного оператора от k^2 (в области положительных значений) показаны на рис. 6.2.

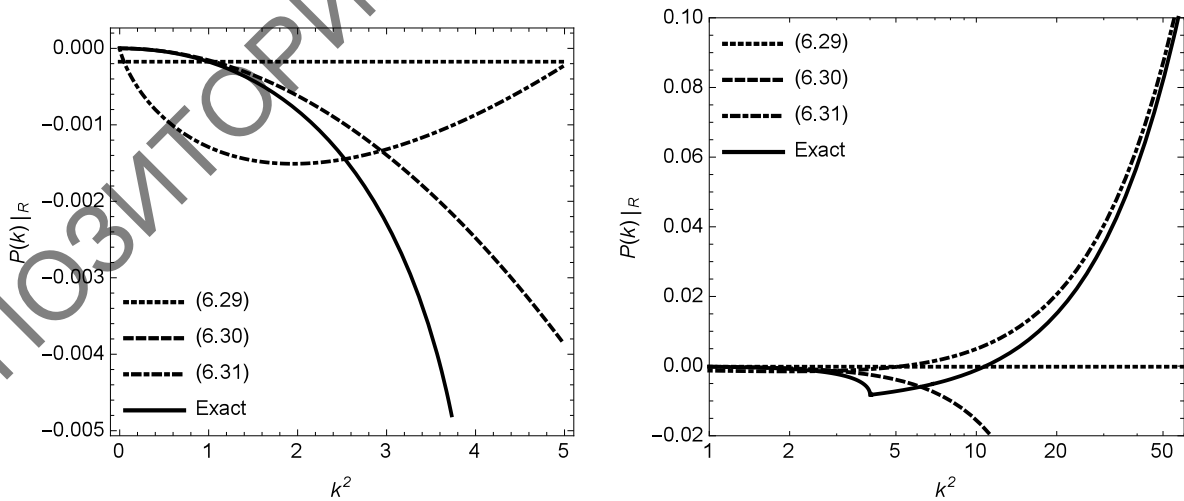


Рис. 6.2: Вещественная скалярная часть перенормированного поляризационного оператора в зависимости от k^2 (все величины обезразмерены, масса фермиона в петле $m = 1$)

6.4 Расчёт и перенормировка вершины

При расчёте фотонной вершины в однопетлевом приближении возникают следующие фейнмановские диаграммы, которые представлены на рис. 6.3. Первая соответствует борновской вершине, вторая – вершинной функции, в которой конечные фермионы (далее для определённости рассматриваем электрон) лежат на массовой поверхности (то есть внешнее излучение отсутствует).

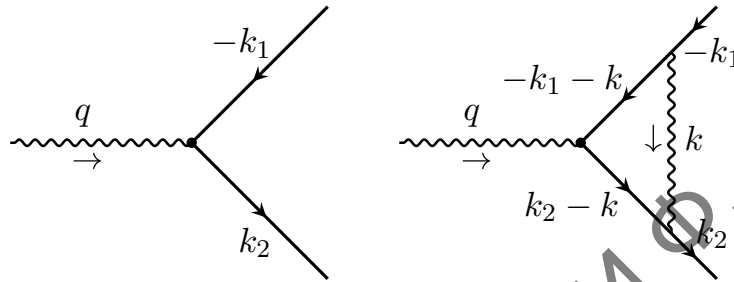


Рис. 6.3: Фейнмановские диаграммы для фотонной вершины: борновская (слева) и соответствующая вершинной функции (справа)

Борновской вершине соответствует выражение

$$-ieQ_e\gamma^\mu. \quad (6.32)$$

Вершинную диаграмму удобно записать в виде модификации борновской вершины (6.32) по правилу:

$$\gamma^\mu \rightarrow \Lambda^\mu,$$

где выражение для Λ^μ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu = Q_e^2 \frac{\alpha}{4\pi} \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \gamma_\alpha \frac{\hat{k}_2 - \hat{k} + m}{(k_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times \gamma^\mu \frac{-\hat{k}_1 - \hat{k} + m}{(k_1 + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ниже будем опускать фактор $Q_e^2 = 1$, который при необходимости (например, для аналогичного расчёта ISR) будет нетрудно восстановить.

Выделим в Λ^μ скалярную, векторную и тензорную части:

$$\Lambda^\mu = \frac{\alpha}{4\pi} (G_1^\mu J_1 + G_\sigma^\mu J^\sigma + G_{\sigma\rho}^\mu J^{\sigma\rho}). \quad (6.34)$$

При скалярном интеграле J_1 выделяется комбинация

$$G_1^\mu = \gamma_\alpha (\hat{k}_2 + m) \gamma^\mu (-\hat{k}_1 + m) \gamma^\alpha, \quad (6.35)$$

которая в биспинорных обкладках упрощается в случае нахождения на массовой поверхности с учётом уравнения Дирака

$$\bar{u}(k_2)(\hat{k}_2 - m) = 0, \quad (\hat{k}_1 + m)u(-k_1) = 0 \quad (6.36)$$

так:

$$\bar{u}(k_2) \cdot G_1^\mu \cdot u(-k_1) = \bar{u}(k_2) \cdot (4m^2 - 2q^2)\gamma^\mu \cdot u(-k_1).$$

В результате получим:

$$G_1^\mu = (4m^2 - 2q^2)\gamma^\mu. \quad (6.37)$$

При векторном интеграле J_σ выделяется комбинация

$$G_\sigma^\mu = \gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu (\hat{k}_1 - m) \gamma_\alpha - \gamma^\alpha (\hat{k}_2 + m) \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\alpha, \quad (6.38)$$

которая в биспинорных обкладках упрощается в случае нахождения на массовой поверхности с учётом уравнения Дирака так:

$$G_\sigma^\mu = 2\hat{q}\gamma_\sigma\gamma^\mu - 2\gamma^\mu\gamma_\sigma\hat{q} - 4mg_\sigma^\mu. \quad (6.39)$$

При тензорном $J_{\sigma\rho}$ выделяется комбинация

$$G_{\sigma\rho}^\mu = \gamma_\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma_\rho \gamma^\alpha = -2\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\sigma. \quad (6.40)$$

6.4.1 Скалярная часть

Скалярный интеграл J_1 имеет вид:

$$J_1 = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)((k_1 + k)^2 - m^2)((k_2 - k)^2 - m^2)}. \quad (6.41)$$

Везде далее рассчитываем только действительную часть и опускаем для краткости обозначение *обхода полюса* $+i\epsilon$, однако, так как важно удерживать везде единообразно знак перед ϵ , будем помнить, что эта величина входит в интегралы в жёстко определённой комбинации с массами: $m^2 - i\epsilon$.

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y]^3}. \quad (6.42)$$

Выбирая $a_1 = k^2 - \lambda^2$, $a_2 = (k_1 + k)^2 - m^2$, $a_3 = (k_2 - k)^2 - m^2$, получим выражение из знаменателя (6.42) в виде (при условии нахождения конечных частиц на массовой поверхности $k_1^2 = m^2$, $k_2^2 = m^2$, $2k_1q = 2k_2q = q^2$):

$$a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y = (k - \tilde{b})^2 - \tilde{d},$$

где

$$\tilde{b} = -k_1x + qy, \quad \tilde{d} = m^2x^2 + q^2y^2 - q^2xy - \lambda^2x + 0y + \lambda^2.$$

Снимая интеграл по k по формуле

$$\int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{[(k - \tilde{b})^2 - \tilde{d}]^3} = -\frac{1}{2\tilde{d}}, \quad (6.43)$$

получим скалярный интеграл в виде:

$$J_1 = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{\tilde{d}}. \quad (6.44)$$

Интеграл (6.44) сводится к общему виду, вычисление которого разобрано в работе [272]

$$J_1 = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \quad (6.45)$$

где

$$a = m^2, \quad b = q^2, \quad c = -q^2, \quad d = -\lambda^2, \quad e = 0, \quad f = \lambda^2 - i\epsilon.$$

Первые шаги расчёта сделаем по схеме [272].

1. Заменим переменную $y \rightarrow y + \alpha x$, α подберем так, чтобы занулился коэффициент при x^2

$$\alpha = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b},$$

тогда

$$J_1 = - \int_0^1 dx \int_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x} dy \frac{1}{by^2 + (c + 2\alpha b)xy + (d + \alpha e)x + ey + f}, \quad (6.46)$$

2. Меняем порядок интегрирования. Тогда

$$J_1 = - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \int_{y/(1-\alpha)}^1 dx - \int_0^{-\alpha} dy \int_{y/(-\alpha)}^1 dx \right\} \frac{1}{N(y) \cdot x + K(y)}, \quad (6.47)$$

где

$$N(y) = (c + 2\alpha b)y + d + \alpha e, \quad K(y) = by^2 + ey + f.$$

3. Снимая первый интеграл, получим

$$J_1 = - \int_0^{1-\alpha} \frac{dy}{N(y)} \ln \frac{K(y) + N(y)}{K(y) + N(y)y/(1-\alpha)} + \int_0^{-\alpha} \frac{dy}{N(y)} \ln \frac{K(y) + N(y)}{K(y) + N(y)y/(-\alpha)}.$$

4. Переобозначим $N(y)$:

$$N(y) = \beta(y - y_0), \quad \beta = c + 2\alpha b, \quad y_0 = -\frac{d + \alpha e}{\beta}. \quad (6.48)$$

С учётом этого переобозначения после тождественного преобразования получим:

$$J_1 = \int_{1-\alpha}^{-\alpha} \frac{dy}{N(y)} \ln \frac{K(y) + N(y)}{K(y_0)} + \int_0^{1-\alpha} \frac{dy}{N(y)} \ln \frac{K(y) + N(y)y/(1-\alpha)}{K(y_0)} + \\ + \int_{-\alpha}^0 \frac{dy}{N(y)} \ln \frac{K(y) + N(y)y/(-\alpha)}{K(y_0)}. \quad (6.49)$$

Начиная с этого пункта, изложение отклоняется от работы [272].

5. Сделаем замену переменной $y - y_0 \rightarrow y$, тогда

$$\beta \cdot J_1 = \int_{1-\alpha-y_0}^{-\alpha-y_0} \frac{dy}{y} \ln(A_1 y^2 + B_1 y + 1) + \int_{-y_0}^{1-\alpha-y_0} \frac{dy}{y} \ln(A_2 y^2 + B_2 y + 1) + \\ + \int_{-\alpha-y_0}^{-y_0} \frac{dy}{y} \ln(A_3 y^2 + B_3 y + 1), \quad (6.50)$$

где

$$A_1 = b/K_0, \quad B_1 = (\gamma + c + 2b\alpha)/K_0, \\ A_2 = \left(b + \frac{\beta}{1-\alpha}\right)/K_0, \quad B_2 = \left(\gamma + y_0 \frac{\beta}{1-\alpha}\right)/K_0, \\ A_3 = \left(b + \frac{\beta}{-\alpha}\right)/K_0, \quad B_3 = \left(\gamma + y_0 \frac{\beta}{-\alpha}\right)/K_0,$$

а

$$K_0 \equiv K(y_0), \quad \gamma = 2by_0 + e.$$

6. Используем мастер-интеграл с общим обозначением

$$F_n^{(i)} \equiv F_n(A_i, B_i; \alpha_i, \beta_i) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{dy}{y^n} \ln(A_i y^2 + B_i y + 1), \quad (6.51)$$

где пределы интегрирования удобно выбрать в виде:

$$\alpha_1 = \beta_2 = 1 - \alpha - y_0, \quad \alpha_2 = \beta_3 = -y_0, \quad \alpha_3 = \beta_1 = -\alpha - y_0. \quad (6.52)$$

Просуммированный по трём значениям интеграл будем обозначать так:

$$\sum_{i=1}^3 F_n^{(i)} = F_n. \quad (6.53)$$

В расчёте встречаются следующие интегралы:

$$\begin{aligned} 2F_{-1}^{(i)} &= (\alpha_i - \beta_i)(\alpha_i + \beta_i + y_i^- + y_i^+) - \\ &\quad - (y_i^-)^2 L_i^- - (y_i^+)^2 L_i^+ + \beta_i^2 L_i^\beta - \alpha_i^2 L_i^\alpha, \\ F_0^{(i)} &= 2(\alpha_i - \beta_i) - y_i^- L_i^- - y_i^+ L_i^+ + \beta_i L_i^\beta - \alpha_i L_i^\alpha, \\ F_1^{(i)} &= \text{Li}_2 \frac{\alpha_i}{y_i^-} - \text{Li}_2 \frac{\beta_i}{y_i} + \text{Li}_2 \frac{\alpha_i}{y_i^+} - \text{Li}_2 \frac{\beta_i}{y_i^+}, \\ F_2^{(i)} &= \frac{1}{y_i^-} L_i^- + \frac{1}{y_i^+} L_i^+ - \frac{y_i^- + y_i^+}{y_i^- y_i^+} \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \frac{1}{\beta_i} L_i^\beta + \frac{1}{\alpha_i} L_i^\alpha, \\ 2F_3^{(i)} &= \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_i \beta_i} \frac{y_i^- + y_i^+}{y_i^- y_i^+} - \frac{(y_i^-)^2 + (y_i^+)^2}{(y_i^- y_i^+)^2} \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} + \\ &\quad + (y_i^-)^{-2} L_i^- + (y_i^+)^{-2} L_i^+ - \beta_i^{-2} L_i^\beta + \alpha_i^{-2} L_i^\alpha, \end{aligned}$$

где y_i^\mp — корни уравнения $A_i y^2 + B_i y + 1 = 0$,

$$L_i^\mp = \ln \frac{\beta_i - y_i^\mp}{\alpha_i - y_i^\mp}, \quad L_i^\alpha = \ln(A_i \alpha_i^2 + B_i \alpha_i + 1).$$

С учётом введенных обозначений запишем скалярный интеграл в окончательном виде:

$$J_1 = \frac{1}{\beta} F_1. \quad (6.54)$$

Выражения в ультрарелятивистском приближении ($q^2 \gg m^2$) будем обозначать верхним индексом ∞ . Также везде ниже будет использоваться условие малости фотонной массы ($\lambda^2 \ll q^2$) и обозначения для коллинеарного $L = \ln \frac{q^2}{m^2}$ и инфракрасного $L_\lambda = \ln \frac{\lambda^2}{m^2}$ логарифмов. Итак, ультрарелятивистское выражение для J_1 имеет следующий вид:

$$J_1^\infty = \frac{1}{q^2} \left(\frac{1}{2} L^2 - L L_\lambda - \frac{2}{3} \pi^2 \right). \quad (6.55)$$

6.4.2 Векторная часть

Векторный интеграл J_σ имеет вид:

$$J_\sigma = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{k_\sigma}{(k^2 - \lambda^2)((k_1 + k)^2 - m^2)((k_2 - k)^2 - m^2)}. \quad (6.56)$$

Снимая интеграл по k по формуле

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{k_\sigma}{[(k - \tilde{b})^2 - \tilde{d}]^3} = -\frac{\tilde{b}_\sigma}{2\tilde{d}}, \quad (6.57)$$

получим интеграл в виде:

$$J_\sigma = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{-k_{1\sigma} \cdot x + q_\sigma \cdot y}{\tilde{d}} = -k_{1\sigma} J_x + q_\sigma J_y. \quad (6.58)$$

Для его расчёта требуется получить два интеграла:

$$J_{(x,y)} = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{(x,y)}{\tilde{d}}. \quad (6.59)$$

Эти интегралы (J_x и J_y) вычисляются по примененной выше технологии:

$$J_x = \frac{1}{\beta} \left(\ln \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{y_0}{1-\alpha} \ln \frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{y_0}{\alpha} \ln \frac{\beta_3}{\alpha_3} \right) - \frac{1}{\beta^2} \left(bF_0 + \gamma F_1 + K_0 F_2 \right),$$

$$J_y = \frac{1}{\beta} \left(F_0 + y_0 F_1 \right) + \alpha J_x.$$

Выражения для $J_{x,y}$ в ультрарелятивистском приближении такие:

$$J_x^\infty = \frac{2}{q^2} L, \quad J_y^\infty = \frac{1}{q^2} L. \quad (6.60)$$

6.4.3 Тензорная часть

Тензорный интеграл $J_{\sigma\rho}$ имеет вид:

$$J_{\sigma\rho} = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{(k^2 - \lambda^2)((k_1 + k)^2 - m^2)((k_2 - k)^2 - m^2)}. \quad (6.61)$$

Снимая интеграл по k по формуле

$$\int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{k_\sigma k_\rho}{[(k - \tilde{b})^2 - \tilde{d}]^3} = \frac{1}{4} g_{\sigma\rho} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\tilde{d}} - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2\tilde{d}} \tilde{b}_\sigma \tilde{b}_\rho, \quad (6.62)$$

получим интеграл в виде:

$$\begin{aligned} J_{\sigma\rho} &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(\frac{1}{2} g_{\sigma\rho} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\tilde{d}} - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{\tilde{d}} \tilde{b}_\sigma \tilde{b}_\rho \right) \\ &= g_{\sigma\rho} \left(\ln \frac{\Lambda}{m} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} J_L \right) + k_{1\sigma} k_{1\rho} J_{xx} + q_\sigma q_\rho J_{yy} - (k_{1\sigma} q_\rho + q_\sigma k_{1\rho}) J_{xy}. \end{aligned}$$

Для расчёта тензорной части требуются четыре интеграла:

$$J_L = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \ln \frac{\tilde{d}}{m^2}, \quad (6.63)$$

$$J_{(xx,yy,xy)} = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{(x^2, y^2, xy)}{\tilde{d}}. \quad (6.64)$$

На пути вычисления получим с учётом обозначений

$$p_n^{i,j} = \frac{1}{n+1} (\alpha_j^{n+1} - \alpha_i^{n+1})$$

$$\begin{aligned} L(a, b, c; \alpha, \beta) &= \int_\alpha^\beta dy \ln(ay^2 + by + c) = \int_\alpha^\beta dy \ln(a[y - y_-][y - y_+]) = \\ &= \left(2y + y_- \ln(y - y_-) + y_+ \ln(y - y_+) - y \ln(ay^2 + by + c) \right) \Big|_\alpha^\beta \end{aligned}$$

следующие выражения для тензорных интегралов:

$$\begin{aligned}
J_{xx} = & \frac{1}{2\beta} \left(\ln \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left[p_1^{1,2} + 2y_0 p_0^{1,2} + y_0^2 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\alpha^2} \left[p_1^{2,3} + 2y_0 p_0^{2,3} + y_0^2 \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right] \right) + \\
& + \frac{1}{\beta^2} \left(-K_0 p_{-2}^{1,3} - \gamma \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - b p_0^{1,3} + \right. \\
& + \frac{1}{1-\alpha} \left[y_0 K_0 p_{-2}^{1,2} + (y_0 \gamma + K_0) \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + (b y_0 + \gamma) p_0^{1,2} + b p_1^{1,2} \right] - \\
& \left. - \frac{1}{\alpha} \left[y_0 K_0 p_{-2}^{2,3} + (y_0 \gamma + K_0) \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + (b y_0 + \gamma) p_0^{2,3} + b p_1^{2,3} \right] \right) + \\
& + \frac{1}{\beta^3} \left(f^2 F_3 + 2ef F_2 + (e^2 + 2bf) F_1 + 2be F_0 + b^2 F_{-1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{xy} = & \alpha J_{xx} + \frac{1}{\beta} \left(p_0^{1,3} + y_0 \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{1}{1-\alpha} \left[p_1^{1,2} + 2y_0 p_0^{1,2} + y_0^2 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\alpha} \left[p_1^{2,3} + 2y_0 p_0^{2,3} + y_0^2 \ln \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right] \right) - \\
& - \frac{1}{\beta^2} \left(y_0 K_0 F_2 + (f + 2ey_0 + 3by_0^2) F_1 + (e + 3by_0) F_0 + b F_{-1} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_L = & \frac{1}{2} + L \left(\frac{b}{m^2}, \frac{e+\beta}{m^2}, \frac{f-\beta y_0}{m^2}; 1-\alpha, -\alpha \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{K_0}{m^2} + \\
& + \frac{1}{1-\alpha} (F_{-1}^{(2)} + y_0 F_0^{(2)}) - \frac{1}{\alpha} (F_{-1}^{(3)} + y_0 F_0^{(3)}) + \frac{1}{\beta} (K_0 F_1 + \gamma F_0 + b F_{-1}).
\end{aligned}$$

Интеграл J_{yy} легко выражается из тождества:

$$\frac{1}{2} + a J_{xx} + b J_{yy} + c J_{xy} + d J_x + e J_y + f J_1 = 0,$$

которое легко доказать, исходя из определений интегралов.

Выражения для тензорных интегралов $J_{xx,xy,yy,L}$ в ультрарелятивистском приближении приобретают вид:

$$J_{xx}^\infty = \frac{1}{q^2} L, \quad J_{xy}^\infty = \frac{1}{2q^2} L, \quad J_{yy}^\infty = \frac{1}{2q^2} (L-1), \quad J_L^\infty = \frac{3-L}{2}. \quad (6.65)$$

6.4.4 Перенормировка вершины

Приведем получившиеся ультрарелятивистские выражения для скалярного, векторного и тензорного вкладов в вершинную функцию:

$$\begin{aligned} G_1^\mu J_1 |^\infty &= \left(-L^2 + 2LL_\lambda + \frac{4}{3}\pi^2 \right) \gamma^\mu, & G_\sigma^\mu J^\sigma |^\infty &= 4L\gamma^\mu, \\ G_{\rho\sigma}^\mu J^{\rho\sigma} |^\infty &= \left(4 \ln \frac{\Lambda}{m} - L - 1 \right) \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Полный неперенормированный результат для вершины:

$$\Lambda^\mu |^\infty = \frac{\alpha}{\pi} \left(-\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{2}LL_\lambda + \frac{3}{4}L + \ln \frac{\Lambda}{m} - \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{3} \right) \gamma^\mu. \quad (6.67)$$

Выражения при нулевом q^2 будем обозначать верхним индексом 0. Непосредственно из (6.45) при нулевом q^2 получим:

$$J_1^0 = \frac{1}{2m^2} L_\lambda. \quad (6.68)$$

Аналогично для векторных интегралов из определения (6.59):

$$J_x^0 = -\frac{1}{m^2}, \quad J_y^0 = -\frac{1}{2m^2}, \quad J_\rho^0 = \frac{1}{m^2} k_{1\rho}, \quad (6.69)$$

а для тензорных:

$$J_{xx}^0 = \frac{1}{2m^2}, \quad J_{xy}^0 = -\frac{1}{4m^2}, \quad J_{yy}^0 = -\frac{1}{6m^2}, \quad J_L^0 = \frac{1}{2}. \quad (6.70)$$

Полный результат для вершины при нулевой передаче:

$$\Lambda^\mu |^0 = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2}L_\lambda + \ln \frac{\Lambda}{m} + \frac{3}{4} \right) \gamma^\mu. \quad (6.71)$$

Наконец, полный перенормированный результат для Λ^μ после сложения всех трех частей и приведения подобных в УРП выглядит так (видно, как сокращается зависимость от Λ):

$$\Lambda^\mu |^R = \Lambda^\mu |^\infty - \Lambda^\mu |^0 = \frac{\alpha}{\pi} \left(-\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{2}LL_\lambda - \frac{1}{2}L_\lambda + \frac{3}{4}L - 1 + \frac{\pi^2}{3} \right) \gamma^\mu. \quad (6.72)$$

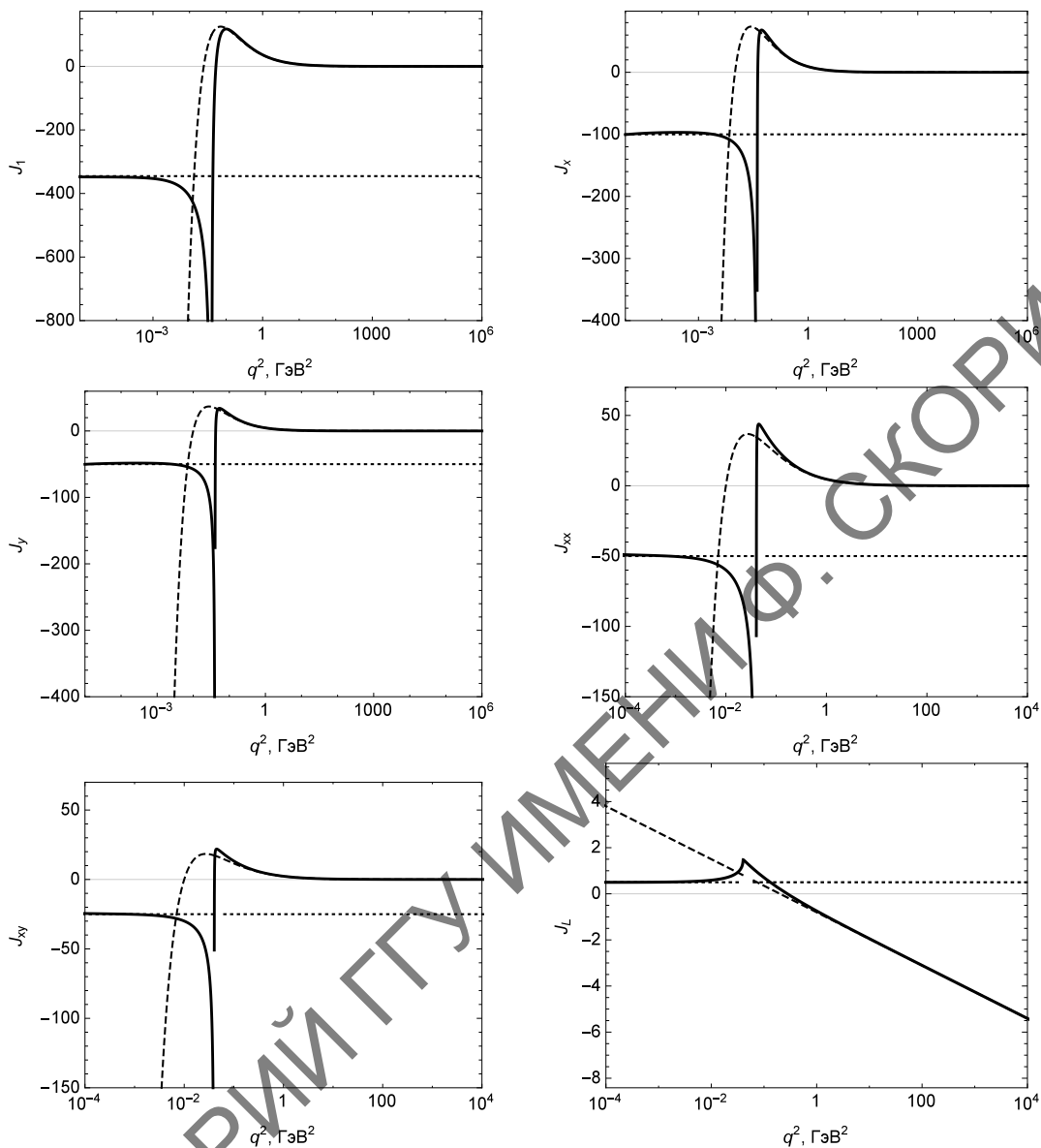


Рис. 6.4: Зависимость скалярного интеграла J_1 , векторных $J_{x,y}$ и тензорных интегралов $J_{xx,xy,L}$ от q^2 : точный расчёт – сплошные, расчёт в УРП – штриховые, при нулевой передаче – точечные линии

На рис. 6.4 приведены зависимости от q^2 полученных интегралов. Для численных оценок выбран реальный масштаб интересующих нас величин для эксперимента CMS LHC: $q^2 = 10^6$ ГэВ² и масса $m = 0.1$ ГэВ (порядка массы мюона). Инфинитезимальные параметры выбраны такими: $\lambda^2 = 10^{-5}$ ГэВ², $\epsilon = 10^{-10}$ ГэВ². Видно совпадение точных (без приближений) кривых с вычисленными асимптотическими выражениями в крайних режимах: для нулевых передач и в УРП.

6.5 Векторное и тензорное интегрирование

Изложим технику вычисления тензорных и векторных многоточечных интегралов (на примере расчёта прямого s -канального $\gamma\gamma$ -бокса, случай 3). Тензорный интеграл $I_{\alpha\beta}^{(3)}$ и векторный интеграл $I_\alpha^{(3)}$ определены в (2.84). Далее в этом разделе опускаем обозначение случая “3” и индекс $ab = \gamma\gamma$. Остальные нужные для расчёта скалярные и векторные интегралы имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{0,\alpha}(p_{1,3}, q_s) &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)((k - q_s)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_{1,3}k)}, \\ H_{0,\alpha}(p_1, p_3) &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}, \\ F_{0,\alpha}(p_1, p_3, q_s) &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{((k - q_s)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Векторные интегралы раскладываются следующим образом (где можно, скобки с аргументами опустим):

$$\begin{aligned} G_\alpha(p_1, q_s) &= g_1 p_{1\alpha} + g_3 q_{s\alpha}, \\ G_\alpha(p_3, q_s) &= G_2 p_{3\alpha} + G_3 q_{s\alpha}, \\ H_\alpha &= h_1 p_{1\alpha} + h_2 p_{3\alpha}, \\ F_\alpha &= f_1 p_{1\alpha} + f_2 p_{3\alpha} + f_3 q_{s\alpha}, \\ I_\alpha &= a_1 p_{1\alpha} + a_2 p_{3\alpha} + a_3 q_{s\alpha}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

6.5.1 Интегралы G_α , H_α и F_α

Далее с векторными интегралами поступим так: домножим каждый из них на каждый 4-вектор из правой части. Для интеграла G_α получим:

$$\begin{aligned} p_1^\alpha G_\alpha &= g_1 m^2 + g_3(p_1 q_s), \\ q_s^\alpha G_\alpha &= g_1(p_1 q_s) + g_3 q_s^2. \end{aligned}$$

Далее подносим под знак интеграла домножаемый 4-вектор, свертываем с числителем и выражаем через комбинации, присутствующие в знаменателях (осуществляем разложение Вельтмана – Пассарино [291]):

$$p_{1,3}k = \frac{1}{2}(2p_{1,3}k - k^2 + k^2), \quad q_s k = \frac{1}{2}(k^2 + q_s^2 - (k - q_s)^2).$$

Деля почленно подынтегральные выражения, получим комбинации двухточечных функций (они приведены в следующем разделе). В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} g_1 m^2 + g_3 (p_1 q_s) &= \frac{1}{2} [P(p_1, q_s) - R(q_s)], \\ g_1 (p_1 q_s) + g_3 q_s^2 &= \frac{1}{2} [P(p_1, q_s) + q_s^2 G_0(p_1, q) - P(p_1)]. \end{aligned}$$

Решение этой системы даёт выражения коэффициентов в векторных интегралах через скалярные интегралы, расчёт которых приведен в следующем разделе, в УРП эти коэффициенты выглядят так:

$$\begin{aligned} g_1 &= G_0 - \frac{2}{s} [P(p_1, q_s) - R(q_s)] = \frac{1}{2s} [L_s^2 - 4L_s + \frac{1}{3}\pi^2], \\ g_3 &= \frac{1}{s} [P(p_1, q_s) - R(q_s)] = \frac{1}{s} L_s. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$G_2 = g_1, \quad G_3 = g_3.$$

Для интеграла H_α имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} p_1^\alpha H_\alpha &= h_1 m^2 + h_2 (p_1 p_3) = \frac{1}{2} [-P(p_3) + N(p_1, p_3)], \\ p_3^\alpha H_\alpha &= h_1 (p_1 p_3) + h_2 m^2 = \frac{1}{2} [-P(p_1) + N(p_1, p_3)]. \end{aligned}$$

Решая её, в УРП получим:

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{2p_1 p_3} [N(p_1, p_3) - P(p_1)] = \frac{1}{t} L_t.$$

Для расчёта F_α применим следующий приём: заменим переменную интегрирования $k \rightarrow k + q_s$ [приём уже применялся при получении (2.91)]. Упрощая, получим соотношение:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{k_\alpha + q_{s\alpha}}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 + 2p_2 k)(k^2 + 2p_4 k)} = \\ &= H_\alpha|_{p_{1,3} \rightarrow -p_{2,4}} + q_{s\alpha} H_0|_{p_{1,3} \rightarrow -p_{2,4}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, раскладывая по 4-векторам:

$$f_1 p_{1\alpha} + f_2 p_{3\alpha} + f_3 q_{s\alpha} = -h_1 p_{2\alpha} - h_2 p_{4\alpha} + q_{s\alpha} H_0.$$

Приводя подобные и приравнивая коэффициенты при одинаковых 4-векторах, получим соотношения:

$$f_1 = f_2 = h_1, \quad f_3 = H_0 - 2h_1.$$

6.5.2 Интегралы I_α и $I_{\alpha\beta}$

Для интеграла I_α имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} p_1^\alpha I_\alpha &= a_1 m^2 + a_2(p_1 p_3) + a_3(p_1 q_s) = \frac{1}{2}[-G_0 + F_0], \\ p_3^\alpha I_\alpha &= a_1(p_1 p_3) + a_2 m^2 + a_3(p_3 q_s) = \frac{1}{2}[-G_0 + F_0], \\ q_s^\alpha I_\alpha &= a_1(p_1 q_s) + a_2(p_3 q_s) + a_3 q_s^2 = \frac{1}{2}[F_0 + q_s^2 I_0 - H_0]. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений в УРП получим $a_1 = a_2$. Решая далее, находим:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2u}[sI_0 - H_0 - F_0 + 2G_0] = -\frac{1}{2u}[X_0 + 2G_0], \\ a_3 &= \frac{1}{s}[a_1 t - G_0 + F_0]. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Тензорный интеграл $I_{\alpha\beta}$ раскладывается по простейшим следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}(p_1, p_3, q_s) &= b_0 g_{\alpha\beta} + b_1 p_{1\alpha} p_{1\beta} + b_2 p_{3\alpha} p_{3\beta} + b_3 q_{s\alpha} q_{s\beta} + \\ &+ b_4(p_{1\alpha} p_{3\beta} + p_{3\alpha} p_{1\beta}) + b_5(p_{1\alpha} q_{s\beta} + q_{s\alpha} p_{1\beta}) + b_6(p_{3\alpha} q_{s\beta} + q_{s\alpha} p_{3\beta}). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Домножая его на $g^{\alpha\beta}$, получим уравнение

$$4b_0 + m^2(b_1 + b_2) + q_s^2 b_3 + 2(p_1 p_3) b_4 + 2(p_1 q_s) b_5 + 2(p_3 q_s) b_6 = F_0.$$

С учётом того, что для безрадиационной кинематики s -канала выполняются соотношения $2p_{1,2,3,4} q_s = s$, в УРП находим

$$4b_0 + s b_3 + (-t) b_4 + s b_5 + s b_6 = F_0. \quad (6.77)$$

Далее, домножая на p_1^β и приравнивая коэффициенты при одинаковых членах, получим три уравнения, запишем их сразу в УРП:

$$2b_0 + (-t) b_4 + s b_5 = f_1, \quad (6.78)$$

$$(-t) b_2 + s b_6 = f_2 - G_2, \quad (6.79)$$

$$s b_3 + (-t) b_6 = f_3 - G_3. \quad (6.80)$$

Домножая на p_3^β , получим следующие три уравнения:

$$(-t)b_1 + sb_5 = f_1 - g_1, \quad (6.81)$$

$$2b_0 + (-t)b_4 + sb_6 = f_2, \quad (6.82)$$

$$sb_3 + (-t)b_5 = f_3 - g_3. \quad (6.83)$$

Наконец, домножая на q_s^β , получим:

$$sb_1 + sb_4 + 2sb_5 = f_1 + sa_1 - h_1, \quad (6.84)$$

$$sb_2 + sb_4 + 2sb_6 = f_2 + sa_2 - h_2, \quad (6.85)$$

$$2b_0 + 2sb_3 + sb_5 + sb_6 = f_3 + sa_3. \quad (6.86)$$

Получившаяся система из 10 уравнений имеет 7 неизвестных, следовательно, является переопределенной (некоторые уравнения являются линейно-зависимыми). Для решения выбираются 7 уравнений, обязательны следующие: уравнение (6.77), одно уравнение из блока (6.78)–(6.80), одно из блока (6.81)–(6.83) и одно из блока (6.84)–(6.86).

Приведём здесь решение системы в упрощённом виде:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2}(G_0 - a_1t), \\ b_1 = b_2 &= \frac{1}{tu}(G_0s + g_1u - g_3s + h_1t - a_1st), \\ b_3 &= \frac{1}{su}(g_3s + H_0u + h_1(s - u) + G_0t - a_1t^2), \\ b_4 &= \frac{1}{tu}(-g_3s - G_0t + h_1t + a_1t^2), \\ b_5 = b_6 &= \frac{1}{u}(G_0 - g_3 - h_1 - a_1t). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Естественно, что в силу переопределённости полной системы такая форма записи не является единственно возможной. Это не отражается на физическом результате (следует помнить, что между коэффициентами системы существуют дополнительные связи, для построения программы численного расчёта они не имеют особого значения).

6.6 Скалярные многоточечные функции

6.6.1 Двухточечные функции

Введем скалярные двухточечные (ультрафиолетово-расходящиеся) функции:

$$N(p_1, p_3) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}, \quad (6.88)$$

$$P(p_1, q) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{((k - q)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1k)}, \quad (6.89)$$

$$P(p_1) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1k)}, \quad (6.90)$$

$$R(q) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)((k - q)^2 - \lambda^2)}. \quad (6.91)$$

Рассчитаем для примера первую (нужна только действительная часть).

Применяем трюк Фейнмана [конкретно, первую формулу из (6.26)] и получаем выражение (6.88) в виде:

$$N(p_1, p_3) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \int_0^1 \frac{dy}{[(k^2 - 2p_1k)y + (k^2 - 2p_3k)(1 - y)]^2}. \quad (6.92)$$

Снимаем интеграл по k по формуле

$$\int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{dy}{[(k - b)^2 - d]^2} = \ln \frac{\Lambda^2}{d} - 1. \quad (6.93)$$

Тогда

$$N(p_1, p_3) = \int_0^1 dy \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln \frac{d}{m^2} - 1 \right), \quad (6.94)$$

где

$$b = p_1y + p_3(1 - y), \quad d = b^2.$$

Упрощая, получим

$$\frac{d}{m^2} = ay^2 - ay + 1, \quad a = \frac{2m^2 - 2p_1p_3}{m^2}.$$

Наконец, снимаем интеграл по y и получаем выражение

$$N(p_1, p_3) = \ln \frac{\Lambda^2}{m^2|a|} + 1. \quad (6.95)$$

В УРП явный вид двухточечных функций такой:

$$\begin{aligned} N(p_1, p_3) &= L_\Lambda + \ln \frac{m^2}{2p_1 p_3} + 1, \\ P(p_1, q_r) &= P(p_1) = L_\Lambda + 1, \\ R(q_r) &= L_\Lambda - L_r + 1. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Полученный результат можно проверить с помощью компьютерной алгебры, общепризнанными надёжными и удобными пакетами для этой цели являются FormCalc и LoopTools [206]. Это относится и к результатам последующих разделов.

6.6.2 Трёхточечные функции

Скалярный мастер-интеграл имеет вид (опускаем для краткости обозначение обхода полюса $+i\epsilon$, кроме этого везде далее рассчитываем только действительную часть)

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)((k - p_1)^2 - m^2)((k - p_3)^2 - m^2)}. \quad (6.97)$$

Подробный расчёт этого интеграла разобран в разделе 6.4.1. Приведем нужные формулы для справочных целей. В обозначениях этого раздела:

$$\tilde{b} = p_1 x - (p_1 - p_3)y, \quad \tilde{d} = m^2 x^2 + 2(m^2 - p_1 p_3)y^2 - 2(m^2 - p_1 p_3)xy - \lambda^2 x + \lambda^2,$$

а интеграл имеет вид

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{\tilde{d}}. \quad (6.98)$$

Далее

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \quad (6.99)$$

где

$$a = m^2, \quad b = 2(m^2 - p_1 p_3), \quad c = -2(m^2 - p_1 p_3), \quad d = -\lambda^2, \quad e = 0, \quad f = \lambda^2 - i\epsilon.$$

И, наконец, в окончательном виде:

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{\beta} F_1. \quad (6.100)$$

Используем ультрарелятивистское приближение

$$m^2 \ll |b|, \quad (6.101)$$

также учтём условие малости фотонной массы по сравнению с массой излучающего лептона

$$\lambda \ll m \quad (6.102)$$

и обозначения для коллинеарного L_b и инфракрасного L_λ логарифмов:

$$L_b = \ln \frac{|b|}{m^2}, \quad L_\lambda = \ln \frac{\lambda^2}{m^2}. \quad (6.103)$$

Приведем основные выражения в ультрарелятивистском приближении, сведем их в таблицу, используя обозначения:

$$\mu = \frac{m^2}{b}, \quad \nu = \frac{\lambda^2}{b},$$

так что выполняются соотношения

$$\ln |\mu| = -L_b, \quad \ln |\nu| = L_\lambda - L_b.$$

Для упрощений в ультрарелятивистском приближении используем очень полезную формулу (6.17), связывающую дилогарифмы Спенса с обратными аргументами.

Вычисляя H_0^γ на основе приближенно вычисленных в УРП (6.101) и с условием (6.102) данных из таблицы, получим общую формулу

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{2m^2 - 2p_1 p_3} \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2m^2 - 2p_1 p_3}{\lambda^2} \right) - \text{Li}_2(1) \right).$$

Подставляя значение b в зависимости от аргументов трёхточечной функции, получим:

$$\begin{aligned} H_0^\gamma(p_1, -p_2) &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} L_s^2 - L_s L_\lambda - \frac{2}{3} \pi^2 \right) \quad \text{для случая 1,} \\ H_0^\gamma(p_1, p_4) &= \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} L_u^2 - L_u L_\lambda - \frac{1}{6} \pi^2 \right) \quad \text{для случая 2 и 4,} \\ H_0^\gamma(p_1, p_3) &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} L_t^2 - L_t L_\lambda - \frac{1}{6} \pi^2 \right) \quad \text{для случая 3.} \end{aligned} \quad (6.104)$$

Табл. 6.1: Выражения в УРП, необходимые для расчёта трёхточечных функций

	$H_0^\gamma(p_1, -p_2)$	$H_0^\gamma(p_1, p_3)$	$G_0(p_1, q_t)$	$G_0(p_1, q_s)$
α	μ	$1 - \mu$	$1/\mu$	1
β	$-b$	b	q_t^2	$-q_s^2$
$\alpha_1 = \beta_2$	$1 - \mu$	μ	2	-2μ
$\alpha_2 = \beta_3$	ν	$-\nu$	$1/\mu$	$-\mu$
$\alpha_3 = \beta_1$	$-\mu$	$-1 + \mu$	1	-1
y_1^-	ν	$-\nu$	1	-1
y_1^+	$1 - 2\mu$	-1	1	-1
y_2^-	$+i\sqrt{\nu/\mu}$	$+i\sqrt{\nu\mu}$	$1/\mu$	$-\mu$
y_2^+	$-i\sqrt{\nu/\mu}$	$-i\sqrt{\nu\mu}$	$1/\mu$	$-\mu$
y_3^-	$+i\sqrt{\mu\nu}$	$-i\sqrt{\nu/\mu}$	1	-1
y_3^+	$-i\sqrt{\mu\nu}$	$+i\sqrt{\nu/\mu}$	$1/\mu$	$-\mu$

Теперь рассчитаем подобный скалярный интеграл, но с Z -бозоном (естественным будет обозначение H_0^Z):

$$H_0^Z(p_1, p_3) = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - m_Z^2)((k - p_1)^2 - m^2)((k - p_3)^2 - m^2)}. \quad (6.105)$$

Методика расчёта H_0^Z в НЕ-режиме такая же самая, как в случае расчёта H_0^γ , за исключением того, что вместо условия (6.102) необходимо использовать (очевидное для первых поколений фермионов) условие

$$m_Z \gg m. \quad (6.106)$$

Изменение условий, с первого взгляда выглядящее как не особенно важное, тем не менее “драматическим” образом меняет форму результата. Сведем необходимые для расчёта H_0^Z выражения в таблицу, используя обозначения: $\mu = m^2/b$, $\nu = m_Z^2/b$.

Подставляя значение b в зависимости от аргументов трёхточечной функции и упрощая, где это возможно, получим:

$$\begin{aligned} H_0^Z(p_1, -p_2) &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_Z^2}{s} - \frac{1}{6} \pi^2 \right) \quad \text{для случая 1,} \\ H_0^Z(p_1, p_4) &= \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_Z^2}{-u} + \frac{1}{3} \pi^2 \right) \quad \text{для случая 2 и 4,} \\ H_0^Z(p_1, p_3) &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_Z^2}{-t} + \frac{1}{3} \pi^2 \right) \quad \text{для случая 3.} \end{aligned} \quad (6.107)$$

Табл. 6.2: Выражения в УРП, необходимые для расчёта трёхточечной функции H_0^Z

	$H_0^Z(p_1, -p_2)$	$H_0^Z(p_1, p_3)$	$H_0^Z(p_1, p_4)$
α	μ	1	1
β	$-b = -s$	$b = -t$	$b = -u$
$\alpha_1 = \beta_2$	1	$-\nu$	$-\nu$
$\alpha_2 = \beta_3$	ν	$-\nu$	$-\nu$
$\alpha_3 = \beta_1$	$-\nu$	-1	-1
y_1^-	ν	$-\nu$	$-\nu$
y_1^+	1	-1	-1
y_2^-	1	$-\mu$	$-\mu$
y_2^+	ν/μ	$-\nu$	$-\nu$
y_3^-	1	$-\nu/\mu$	$-\nu/\mu$
y_3^+	ν	-1	-1

Видно, что рассматриваемый интеграл во всех четырёх случаях выражается через квадрат *судаковского логарифма*.

Теперь вычислим скалярный мастер-интеграл

$$G_0(p_1, q) = \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{k^2(k-q)^2(k^2-2p_1k)}. \quad (6.108)$$

Действовать будем по той же схеме. Выбирая

$$a_1 = k^2 - \lambda^2, \quad a_2 = (k-q)^2 - \lambda^2, \quad a_3 = (k-p_1)^2 - m^2,$$

получим (при условии нахождения конечных частиц на массовой поверхности и равных масс)

$$\tilde{b} = qx + p_3y, \quad \tilde{d} = q^2x^2 + m^2y^2 - q^2xy - q^2x + (q^2 - \lambda^2)y + \lambda^2.$$

Далее используем полученные значения коэффициентов a, b, \dots, f в процедуре расчёта. Необходимые приближенные выражения приведены в табл. 6.1, заметим, что здесь μ и ν уже определяются по-другому:

$$\mu = \frac{m^2}{q^2}, \quad \nu = \frac{\lambda^2}{q^2}.$$

Упрощаем с помощью выражений из табл. 6.1, тогда общая формула выглядит так:

$$G_0(p_1, q) = \frac{1}{q^2} \left(2\text{Li}_2(2) - \text{Li}_2\left[\frac{q^2}{m^2}\right] \right).$$

Ультрарелятивистские выражения для конкретных случаев приобретают следующий вид:

$$G_0(p_1, q_t) = G_0(-p_2, q_t) = G_0(p_4, q_t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} L_t^2 + \frac{2}{3} \pi^2 \right), \quad (6.109)$$

$$G_0(p_1, q_s) = G_0(p_3, q_s) = G_0(p_4, q_s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} L_s^2 + \frac{1}{6} \pi^2 \right). \quad (6.110)$$

6.6.3 Четырёхточечные интегралы X_0 и I_0

В этом разделе вычислим ИК-конечную четырёхточечную функцию (рассмотрим случай 3, следовательно $q = q_s$):

$$\begin{aligned} X_0(p_1, p_3, q) &= q^2 I_0^\gamma(p_1, p_3, q) - F_0^\gamma(p_1, p_3) - H_0^\gamma(p_1, p_3) = \\ &= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{2k(q-k)}{k^2(k-q)^2(k^2-2p_1k)(k^2-2p_3k)}. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Будем использовать ряд обозначений и методику расчёта из работы Кахана [99]: применяем трюк Фейнмана (A1)–(A3) и интегрируем по внутреннему 4-импульсу (A5). Снимая два первых интеграла по параметрам Фейнмана x и z , получаем (A36). В наших обозначениях это даёт следующее выражение:

$$X_0(p_1, p_3, q) = \int_0^1 \frac{dy}{p_y^2} \ln \left| \frac{p_y^2}{q^2} \right|, \quad (6.112)$$

где $p_y = yp_1 + (1-y)p_3$.

Вычислим p_y^2 , после возведения в квадрат получим

$$p_y^2 = t(y^2 - y + \alpha) = t(y - y_1)(y - y_2),$$

где

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}, \quad \alpha = \frac{m^2}{t}. \quad (6.113)$$

Полезны следующие соотношения:

$$y_1 - y_2 = \sqrt{1 - 4\alpha}, \quad y_1 + y_2 = 1. \quad (6.114)$$

Нетрудно сделать разложение

$$\frac{1}{p_y^2} = \frac{1}{t\sqrt{1-4\alpha}} \left(\frac{1}{y-y_1} - \frac{1}{y-y_2} \right).$$

Приступаем к интегрированию, замечая, что в случае $\alpha < 0$ (это справедливо при $t < 0$) особенностей у подынтегральной функции нет. Разбиваем её на шесть элементарных слагаемых и снимаем интеграл:

$$X_0(p_1, p_3, q) = \frac{1}{t\sqrt{1-4\alpha}} \left(\ln \frac{-t}{q^2} \left[\int_0^1 \frac{dy}{y-y_1} - \int_0^1 \frac{dy}{y-y_2} \right] + \right. \quad (6.115)$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{\ln|y-y_1|}{y-y_1} - \int_0^1 \frac{\ln(y-y_2)}{y-y_2} + \int_0^1 \frac{\ln(y-y_2)}{y-y_1} - \int_0^1 \frac{\ln|y-y_1|}{y-y_2} \right)$$

Упрощая с учётом (6.114) и затем делая УРП ($|\alpha|, |y_2| \ll 1$), получим:

$$X_0(p_1, p_3, q) = \frac{1}{t\sqrt{1-4\alpha}} \left(2 \ln \frac{-t}{q^2} \ln \frac{-y_2}{y_1} + \right.$$

$$\left. + \ln^2(-y_2) - \ln^2 y_1 + 2\text{Li}_2 \frac{y_1}{y_1-y_2} - 2\text{Li}_2 \frac{y_2}{y_2-y_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \left(2 \ln \frac{-t}{q^2} \ln(-\alpha) + \ln^2(-\alpha) + \frac{1}{3}\pi^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \left(-2 \ln \frac{q^2}{m^2} \ln(-\alpha) - \ln^2(-\alpha) + \frac{1}{3}\pi^2 \right). \quad (6.116)$$

Для конкретных случаев в УРП получаем:

$$X_0(p_1, -p_2, q_t) = \frac{1}{s} \left((2L_t - L_s)L_s + \frac{4}{3}\pi^2 \right) \quad \text{для случая 1,}$$

$$X_0(p_1, p_4, q_t) = \frac{1}{u} \left((2L_t - L_u)L_u + \frac{1}{3}\pi^2 \right) \quad \text{для случая 2,}$$

$$X_0(p_1, p_3, q_s) = \frac{1}{t} \left((2L_s - L_t)L_t + \frac{1}{3}\pi^2 \right) \quad \text{для случая 3,} \quad (6.117)$$

$$X_0(p_1, p_4, q_s) = \frac{1}{u} \left((2L_s - L_u)L_u + \frac{1}{3}\pi^2 \right) \quad \text{для случая 4.}$$

Заметим, что в интеграле $X_0(p_1, -p_2, q_t)$ появилось добавочное слагаемое $+\pi^2$, его происхождение такое:

$$-\text{Re} \left(\ln^2(-\alpha) \right) = -\text{Re} \left(\ln^2 \frac{m^2}{-s} \right) = -\text{Re} \left(\ln \frac{m^2}{s} - i\pi \right)^2 = -\ln^2 \frac{m^2}{s} + \pi^2.$$

Наконец, для скалярной четырёхточечной ИК-расходящейся функции

для конкретных случаев в УРП получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 I_0(p_1, -p_2, q_t) &= \frac{2}{ts} L_s(L_t - L_\lambda) \text{ для случая 1,} \\
 I_0(p_1, p_4, q_t) &= \frac{2}{tu} L_u(L_t - L_\lambda) \text{ для случая 2,} \\
 I_0(p_1, p_3, q_s) &= \frac{2}{st} L_t(L_s - L_\lambda) \text{ для случая 3,} \\
 I_0(p_1, p_4, q_s) &= \frac{2}{su} L_u(L_s - L_\lambda) \text{ для случая 4.}
 \end{aligned} \tag{6.118}$$

6.6.4 Случай разных масс

Приведем скалярные интегралы в УРП для случая, когда массы фермионов в ISR и FSR различны. Для определенности рассмотрим s -канальный четырёхфермионный процесс $q\bar{q} \rightarrow \mu^- \mu^+$, тогда

$$p_1^2 = p_2^2 = m_q^2, \quad p_3^2 = p_4^2 = m_\mu^2.$$

Скалярные двухточечные функции $N(p_1, p_3)$, $N(p_1, p_4)$ и R в этой ситуации останутся без изменения, так как в УРП они не зависят от масс. Остальные выглядят так:

$$P(p_{1,2}, q_s) = P(p_{1,2}) = \ln \frac{\Lambda^2}{m_q^2} + 1, \tag{6.119}$$

$$P(p_{3,4}, q_s) = P(p_{3,4}) = \ln \frac{\Lambda^2}{m_\mu^2} + 1.$$

Функции G_0 получаются непосредственной заменой, так как напрямую зависят только от одного внешнего 4-импульса:

$$G_0(p_1, q_s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{s}{m_q^2} + \frac{1}{6} \pi^2 \right). \tag{6.120}$$

$$G_0(p_3, q_s) = G_0(p_4, q_s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{s}{m_\mu^2} + \frac{1}{6} \pi^2 \right). \tag{6.121}$$

Для скалярной трёхточечной функции $H_0^\gamma(p_1, p_3)$ проделаем расчёт подробнее. Так, для коэффициентов получим выражения:

$$\begin{aligned}
 a &= m_q^2, \quad b = m_q^2 + m_\mu^2 - 2p_1 p_3, \quad c = -2m_q^2 + 2p_1 p_3, \\
 d &= -\lambda^2, \quad e = 0, \quad f = -\lambda^2 - i\epsilon.
 \end{aligned}$$

Обозначая

$$\nu = \frac{\lambda^2}{2p_1 p_3}, \quad \mu_1 = \frac{m_q^2}{2p_1 p_3}, \quad \mu_2 = \frac{m_\mu^2}{2p_1 p_3},$$

получим в УРП

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2p_1 p_3, \quad \alpha_1 = -\mu_2, \quad \alpha_2 = \nu, \quad \alpha_3 = -1,$$

$$y_1^- = \nu, \quad y_1^+ = -1, \quad y_2^\mp = \mp i \sqrt{\nu \mu_2}, \quad y_3^\mp = \mp i \sqrt{\frac{\nu}{\mu_1}}.$$

Далее, применяя соотношение

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(-z) = \frac{1}{2} \text{Li}_2(z^2)$$

и затем формулу (6.17), получим:

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{-t}{m_\mu^2} - \ln \frac{-t}{m_\mu^2} \ln \frac{\lambda^2}{m_\mu^2} - \frac{1}{6} \pi^2 + \ln \frac{m_\mu}{m_q} \ln \frac{m_q m_\mu}{\lambda^2} \right). \quad (6.122)$$

Заметим, что последнее слагаемое зануляется в случае равных масс. Представим эту функцию в виде, симметричном относительно замены $m_q \leftrightarrow m_\mu$:

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{t} \left(\ln \frac{-t}{\lambda^2} \ln \frac{-t}{m_q m_\mu} - \frac{1}{2} \ln \frac{-t}{m_q^2} \ln \frac{-t}{m_\mu^2} - \ln^2 \frac{m_q}{m_\mu} - \frac{1}{6} \pi^2 \right). \quad (6.123)$$

Аналогичная формула для $H_0^\gamma(p_1, p_4)$ получается заменой $t \rightarrow u$. Равенства $F_0^\gamma = H_0^\gamma$ выполняются, как и раньше.

Наконец, функции X_0 в УРП имеют вид:

$$X_0(p_1, p_3, q_s) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s^2}{-t m_q^2} \ln \frac{-t}{m_q^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{s^2}{-t m_\mu^2} \ln \frac{-t}{m_\mu^2} + \frac{1}{3} \pi^2 \right), \quad (6.124)$$

$$X_0(p_1, p_4, q_s) = \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s^2}{-u m_q^2} \ln \frac{-u}{m_q^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{s^2}{-u m_\mu^2} \ln \frac{-u}{m_\mu^2} + \frac{1}{3} \pi^2 \right).$$

Легко проверить, что при $m_\mu \rightarrow m_q \rightarrow m$ функции этого раздела переходят в форму, приведенную в предыдущем разделе для случая равных масс.

6.7 Интегралы мягкого тормозного излучения

Требуется уметь рассчитывать интегралы вида:

$$L_{ij} = \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3 \mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{p p_i} \frac{1}{p p_j}, \quad i, j = \overline{1, 4}. \quad (6.125)$$

Рассматриваются два случая: случай $i = j$ и случай $i \neq j$. Первый случай более простой, он требует прямого расчёта мастер-интеграла

$$L_j = \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{(pp_j)^2}, \quad (6.126)$$

приступим к его вычислению (возьмем вместо j индекс x , далее им удобнее пользоваться).

В с.ц.м. начальных частиц конфигурация импульсов показана на рис. 6.5.

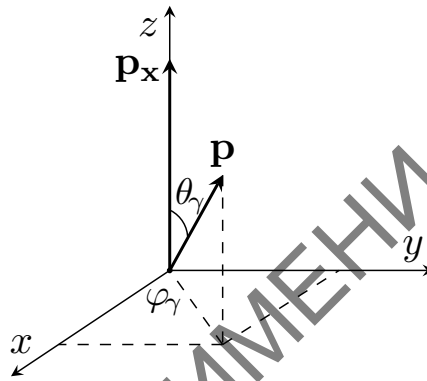


Рис. 6.5: Конфигурация 3-импульсов при интегрировании по фазовому пространству мягкого фотона в с.ц.м. начальных частиц

Переходим в сферическую систему координат:

$$L_x = \int_0^\omega |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| \int_{-1}^1 d \cos \theta_\gamma \int_0^{2\pi} d\varphi_\gamma \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \lambda^2}} \frac{1}{(p_{x0}p_0 - |\mathbf{p}_x||\mathbf{p}| \cos \theta_\gamma)^2}.$$

Снимаем без проблем интеграл по азимутальному углу, получаем:

$$L_x = 2\pi \int_0^\omega d|\mathbf{p}| \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \lambda^2}} \frac{1}{|\mathbf{p}_x|^2} \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta_\gamma}{(\cos \theta_\gamma - p_{x0}p_0/|\mathbf{p}_x||\mathbf{p}|)^2}. \quad (6.127)$$

Теперь снимаем интеграл по полярному углу, тогда

$$L_x = 4\pi \int_0^\omega d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \lambda^2}} \frac{1}{(p_{x0}^2 - |\mathbf{p}_x|^2)|\mathbf{p}|^2 + \lambda^2 p_{x0}^2}. \quad (6.128)$$

Наконец, интегрируем по последней переменной и получим (ср., напр., [161]):

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{2\pi}{p_{x0}^2 - |\mathbf{p}_x|^2} \left(\ln \frac{4\omega^2}{\lambda^2} + \frac{p_{x0}}{|\mathbf{p}_x|} \ln \frac{p_{x0} - |\mathbf{p}_x|}{p_{x0} + |\mathbf{p}_x|} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{p_x^2} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right), \end{aligned} \quad (6.129)$$

где

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}_x|}{p_{x0}} = \sqrt{1 - \frac{p_x^2}{p_{x0}^2}}. \quad (6.130)$$

В случае $i \neq j$ расчёт сводится к этому же мастер-интегралу, если применить приём Фейнмана (6.26), тогда

$$L_{ij} = \int_0^1 dx \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3 \mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{(pp_x)^2}, \quad \text{где } p_x = xp_i + (1-x)p_j. \quad (6.131)$$

Видно, что

$$p_x^2 = (x \cdot p_i + \bar{x} \cdot p_j)^2 = m^2 \cdot (x^2 + \bar{x}^2) + 2p_i p_j \cdot x \bar{x}. \quad (6.132)$$

Заметим, что с условием мягкости фотона $p \rightarrow 0$ импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_x коллинеарны. Таким образом, получим общую формулу:

$$L_{ij} = \int_0^1 dx \frac{2\pi}{p_x^2} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right). \quad (6.133)$$

Выразим через L_{ij} поправку (2.142):

$$\begin{aligned} \delta_{\text{soft}} = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \left(m^2 \sum_{j=1}^4 L_j + 2p_1 p_4 \cdot L_{14} + 2p_2 p_3 \cdot L_{23} - 2p_1 p_2 \cdot L_{12} - \right. \\ \left. - 2p_1 p_3 \cdot L_{13} - 2p_2 p_4 \cdot L_{24} - 2p_3 p_4 \cdot L_{34} \right). \end{aligned} \quad (6.134)$$

Для расчёта L_1 применим ранее выведенное уравнение (6.129). Видно, что в этом случае $p_x^2 = m^2$, $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/s}$, тогда в УРП:

$$L_1 = \frac{2\pi}{m^2} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} - \ln \frac{s}{m^2} \right). \quad (6.135)$$

Так как в с.д.м. и УРП энергии всех фермионов равны (с точностью до малой величины ω), то такой же вид имеют и интегралы L_2 , L_3 и L_4 . По этой же причине равны p_{x0} для всех остальных случаев: $p_{x0} = E$.

Используя мастер-интеграл (6.129) из этого раздела, получим для L_{12} :

$$p_x^2 = m^2(2x - 1)^2 + sx\bar{x} = (s - 4m^2)(-x^2 + x + \alpha), \quad \alpha = \frac{m^2}{s - 4m^2},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} \cdot |2x - 1| = \frac{|2x - 1|}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{1 + 4\alpha}.$$

Тогда

$$L_{12} = 2\pi \int_0^1 dx \frac{1}{p_x^2} \left(2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) = L_{12}^\lambda + L_{12}^f. \quad (6.136)$$

Можно это выражение проинтегрировать, сведя к элементарным функциям и дилוגарифму, либо считать интеграл численным методом (особенностей в нем, разумеется, нет).

Вычислим первый интеграл в (6.136):

$$L_{12}^\lambda = \frac{4\pi}{s - 4m^2} \ln \frac{2\omega}{\lambda} \int_0^1 dx \frac{1}{-x^2 + x + \alpha}. \quad (6.137)$$

Применим формулу

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|. \quad (6.138)$$

Тогда в УРП (в нем $\alpha \rightarrow +0$) получим:

$$L_{12}^\lambda = \frac{8\pi}{s - 4m^2} \ln \frac{2\omega}{\lambda} \ln \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \frac{8\pi}{s} \ln \frac{2\omega}{\lambda} \ln \frac{s}{m^2}. \quad (6.139)$$

Интеграл такого типа вычисляется с помощью приёма, который показал автору Э. А. Кураев. Разделим область интегрирования малым параметром ($\sigma \rightarrow +0$, $\sigma \gg \alpha$) и воспользуемся тем, что подынтегральная функция симметрична относительно замены $x \leftrightarrow 1 - x$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x) + \alpha} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{x(1-x) + \alpha} = 2 \left[\int_0^\sigma + \int_\sigma^{\frac{1}{2}} \right] \frac{dx}{x(1-x) + \alpha}. \quad (6.140)$$

В первом интеграле можно пренебречь x^2 , а во втором α , тогда выражение (6.140) принимает более простой вид и легко вычисляется:

$$\begin{aligned} 2 \left[\int_0^\sigma \frac{dx}{x + \alpha} + \int_\sigma^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(1-x)} \right] &= 2 \left[\ln(x + \alpha) \Big|_0^\sigma + \ln \frac{x}{1-x} \Big|_\sigma^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= 2 \left[\ln \frac{\sigma}{\alpha} - \ln \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] = -2 \ln \alpha = 2 \ln \frac{s}{m^2}. \end{aligned}$$

ИК-конечная часть выглядит так (где возможно, делаем УРП):

$$L_{12}^f = \frac{4\pi}{s} \int_0^{1/2} dx \frac{1}{-x^2 + x + \alpha} \frac{1}{1-2x} \ln \frac{\gamma - 1 + 2x}{\gamma + 1 - 2x} \quad (6.141)$$

Сделаем замену переменной $2x - 1 = y$, тогда

$$-x^2 + x + \alpha = -\frac{1}{4}(y - \gamma)(y + \gamma)$$

и интеграл приобретет вид (вычислять его дальше – одно удовольствие):

$$L_{12}^f = \frac{8\pi}{s} \int_{-1}^0 dy \frac{1}{(y - \gamma)(y + \gamma)y} \ln \frac{\gamma + y}{\gamma - y}. \quad (6.142)$$

Раскладываем дробь под интегралом, получим в УРП

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{2} \frac{1}{y - \gamma} + \frac{1}{2} \frac{1}{y + \gamma},$$

теперь вычислим последовательно все получившиеся шесть интегралов, применяем формулу (6.22). В результате получим:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 dy \frac{1}{y} \ln \frac{\gamma + y}{\gamma - y} &= \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2(-1) = \frac{1}{4}\pi^2, \\ \int_{-1}^0 dy \frac{\ln(y + \gamma)}{y - \gamma} &= - \int_{-1}^0 dy \frac{\ln(-y + \gamma)}{y + \gamma} = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2} \ln^2 2, \\ \int_{-1}^0 dy \frac{\ln(y + \gamma)}{y + \gamma} &= - \int_{-1}^0 dy \frac{\ln(-y + \gamma)}{y - \gamma} = -\frac{1}{2} \ln^2(2\alpha). \end{aligned} \quad (6.143)$$

Собирая вместе, получим:

$$L_{12}^f = -\frac{2\pi}{s} \left(\ln^2 \alpha + \frac{2}{3} \pi^2 \right), \quad (6.144)$$

так, что в УРП

$$L_{12} = \frac{2\pi}{s} \left(4 \ln \frac{2\omega}{\lambda} \ln \frac{s}{m^2} - \ln^2 \frac{s}{m^2} - \frac{2}{3} \pi^2 \right). \quad (6.145)$$

Недиагональные случаи, соответствующие интерференции ISR и FSR, таким методом считать сложно, лучше применить методику работы Велтмана и 'т Хоофта [272]. Пересчитаем, руководствуясь ей, этот же интеграл L_{12} . Прежде всего произведем замены $k = \alpha p_1$, $q = p_2$ и потребуем выполнения условия

$$(k - q)^2 = 0, \quad (6.146)$$

кроме этого знаки у $k_0 - q_0$ и q_0 должны быть одинаковыми. Перепишем искомый интеграл в обозначениях [272] (обращаем внимание на то, что в некоторых местах знаки противоположны, так как в работе [272] используется другая метрика):

$$L_{12} = \alpha \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3 \mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{(pk)(pq)} = 2\pi\alpha(R_1 + R_2), \quad (6.147)$$

где

$$R_1 = \int_0^1 dx \frac{2}{u^2} \ln \frac{2\omega}{\lambda} = \frac{1}{vl} \ln \frac{q^2 + 2vl}{q^2} \ln \frac{2\omega}{\lambda}, \quad (6.148)$$

$$R_2 = \int_0^1 dx \frac{1}{u^2} \frac{u_0}{|\mathbf{u}|} \ln \frac{u_0 - |\mathbf{u}|}{u_0 + |\mathbf{u}|}. \quad (6.149)$$

4-вектор u здесь заменяет p_x , использовавшийся ранее. Связь между ними такая: $u \equiv p_x = q + x \cdot (k - q)$. Возводя в квадрат при условии (6.146), получим $u^2 = q^2 + 2xvl$, где видно, что введенное условие уничтожает нежелательный квадратный член. И использованные две вспомогательные величины имеют вид:

$$l = k_0 - q_0, \quad v = \frac{k^2 - q^2}{2l}.$$

Прежде всего рассчитаем в УРП R_1 :

$$R_1 = \frac{2}{k^2 - q^2} \ln \frac{k^2}{q^2} \ln \frac{2\omega}{\lambda}, \quad (6.150)$$

тогда

$$L_{12}^{\lambda} = \frac{4\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)m^2} \ln \alpha^2 \ln \frac{2\omega}{\lambda}. \quad (6.151)$$

Теперь получим α из условия (6.146), для этого решаем уравнение

$$p_1^2 \alpha^2 - 2(p_1 p_2) \alpha + p_2^2 = 0$$

и получаем после упрощения:

$$\alpha = \alpha^{\pm} = \frac{p_1 p_2 \pm \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^4}}{m^2}.$$

Из двух корней выберем тот, который даст энергию положительного знака (как у p_{20}), это будет α^+ , который в УРП приведет к выражению

$$\alpha = \frac{2(p_1 p_2)}{m^2},$$

что дает при подстановке выражение для L_{12}^f из (6.139).

Приступим к расчёту L_{12}^f , предварительно выражая его через уже введенные величины:

$$u^2 = 2vu_0 - 2vq_0 + q^2, \quad |\mathbf{u}|^2 = u_0^2 - u^2 = u_0^2 - 2vu_0 + 2vq_0 - q^2.$$

Введем новую переменную

$$m = u_0 - |\mathbf{u}|$$

и выразим через нее величину u_0 (используем выражения $u_0 + |\mathbf{u}| = 2u_0 - m$ и $u^2 = m(u_0 + |\mathbf{u}|)$):

$$u_0 = \frac{1}{2(m - v)} (m^2 - 2vq_0 + q^2).$$

Без труда получим $|\mathbf{u}|$ и вторую важную комбинацию:

$$u_0 + |\mathbf{u}| = \frac{1}{m - v} (vm - 2vq_0 + q^2).$$

Теперь совсем нетрудно вычислить дифференциал:

$$\frac{dx}{dm} = \frac{d}{dm} \left(\frac{u_0 - q_0}{k_0 - q_0} \right) = \frac{m^2 - 2vm + 2vq_0 - q^2}{2l(m - v)^2}.$$

Подставляя получившуюся дробь в подинтегральное выражение, получим рациональную дробь перед логарифмом и простейшую рациональную дробь под логарифмом:

$$R_2 = \int_{q_0-|\mathbf{q}|}^{k_0-|\mathbf{k}|} \frac{dm}{2lv} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m-v} - \frac{1}{m+q^2/v-2q_0} \right) \ln \frac{m(m-v)}{vm+q^2-2vq_0}. \quad (6.152)$$

Добавим к выражению в скобках член $2/(m-v)$, тогда оно приобретает вид

$$\frac{m(m-v)}{vm+q^2-2vq_0} - \frac{2}{m-v}.$$

Тогда

$$R_2 = \frac{1}{4lv} \ln^2 \frac{m(m-v)}{m+q^2/v-2q_0} \Big|_{q_0-|\mathbf{q}|}^{k_0-|\mathbf{k}|} - \frac{1}{lv} \int_{q_0-|\mathbf{q}|}^{k_0-|\mathbf{k}|} \frac{dm}{m-v} \ln \frac{m(m-v)}{vm+q^2-2vq_0}.$$

Первое выражение после упрощения

$$\frac{1}{4lv} \left(\ln^2 \frac{p_{10} - |\mathbf{p}_1|}{p_{10} + |\mathbf{p}_1|} - \ln^2 \frac{p_{20} - |\mathbf{p}_2|}{p_{20} + |\mathbf{p}_2|} \right). \quad (6.153)$$

обращается в нуль, а оставшийся интеграл берется с применением техники работы [272].

Конечная часть L_{12}^f в результате приобретает вид:

$$L_{12}^f = \frac{2\pi\alpha}{vl} \left(\text{Li}_2 \frac{u_0 + |\mathbf{u}| - v}{-v} + \text{Li}_2 \frac{u_0 - |\mathbf{u}| - v}{-v} \right) \Big|_{u=q}^{u=k}. \quad (6.154)$$

Наконец, целиком интеграл выглядит так:

$$L_{12} = \frac{4\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)m^2} \left(\ln \alpha^2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} + \text{Li}_2 \left[1 - \frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{v} \right] - \text{Li}_2 \left[1 - \frac{q_0 + |\mathbf{q}|}{v} \right] + \right. \\ \left. + \text{Li}_2 \left[1 - \frac{k_0 - |\mathbf{k}|}{v} \right] - \text{Li}_2 \left[1 - \frac{q_0 - |\mathbf{q}|}{v} \right] \right). \quad (6.155)$$

Нетрудно убедиться, что в УРП этот результат воспроизводит (6.145). Также следует сказать, что в таком виде его можно использовать для расчёта и других случаев, в частности, интерференции амплитуд ISR и FSR, выбрав соответствующие случаю величины (α, k, q) .

Табл. 6.3: Коэффициенты для расчёта L_{ij} ($i \neq j$) в УРП

случай	α	$\frac{2\pi\alpha}{vl}$	$1 - \frac{k_0+ \mathbf{k} }{v}$	$1 - \frac{q_0+ \mathbf{q} }{v}$	$1 - \frac{k_0- \mathbf{k} }{v}$	$1 - \frac{q_0- \mathbf{q} }{v}$
12, 34	$\frac{s}{m^2}$	$\frac{4\pi}{s}$	$-\frac{s}{m^2}$	0	0	1
13, 24	$-\frac{t}{m^2}$	$-\frac{4\pi}{t}$	$-\frac{s}{m^2}$	$-\frac{u}{t}$	0	1
14, 23	$-\frac{u}{m^2}$	$-\frac{4\pi}{u}$	$-\frac{s}{m^2}$	$-\frac{t}{u}$	0	1

Приведем рассчитанные для разных случаев коэффициенты в выражении (6.155), сведя их в табл. 6.3:

Приведем интегралы для всех случаев в УРП, после упрощения и применения формулы (6.17):

$$\begin{aligned}
 L_{12} = L_{34} &= \frac{4\pi}{s} \left(2L_s \ln \frac{2\omega}{\lambda} - \frac{1}{2}L_s^2 - \frac{1}{3}\pi^2 \right), \\
 L_{13} = L_{24} &= \frac{4\pi}{-t} \left(2L_t \ln \frac{2\omega}{\lambda} - \frac{1}{2}L_s^2 - \frac{1}{3}\pi^2 - \text{Li}_2 \left[-\frac{u}{t} \right] \right), \\
 L_{14} = L_{23} &= \frac{4\pi}{-u} \left(2L_u \ln \frac{2\omega}{\lambda} - \frac{1}{2}L_s^2 - \frac{1}{3}\pi^2 - \text{Li}_2 \left[-\frac{t}{u} \right] \right). \quad (6.156)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (6.134), получим требуемую поправку (2.144).

6.8 Вывод выражения для σ_K

Сечение процесса с одним мягким фотоном имеет вид

$$\sigma_R = \sigma_0 \frac{\alpha}{\pi} L(\lambda, \omega), \quad L(\lambda, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{k_0 < \omega} \frac{d^3\mathbf{k}}{k_0} T^\alpha(k) T_\alpha(k). \quad (6.157)$$

Для излучения из конечного состояния характерна комбинация

$$T^\alpha(k) = \frac{k_1^\alpha}{k_1 k} - \frac{k_2^\alpha}{k_2 k}, \quad (6.158)$$

где k – 4-импульс тормозного фотона.

Общее выражение для сечения процесса с двумя мягкими фотонами по области A имеет вид

$$\sigma_A^{\gamma\gamma} = \sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int_A \frac{d^3\mathbf{k}}{k_0} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} T^\alpha(p) T_\alpha(p) T^\beta(k) T_\beta(k). \quad (6.159)$$

Согласно введенным обозначениям очевидно, что

$$\sigma_D = \sigma_{k_0 < \omega, p_0 < \omega}^{\gamma\gamma}. \quad (6.160)$$

Видно также, что

$$\sigma_K = \sigma_{k_0 < \omega, p_0 < \omega}^{\gamma\gamma} - \sigma_{k_0 + p_0 < \omega}^{\gamma\gamma}. \quad (6.161)$$

Рассчитаем σ_K точно, для этого введем обозначение:

$$I(a_1, a_2; b_1, b_2) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int_{a_1 < k_0 < a_2, b_1 < p_0 < b_2} \frac{d^3\mathbf{k}}{k_0} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} T^\alpha(p) T_\alpha(p) T^\beta(k) T_\beta(k). \quad (6.162)$$

Очевидно, что если $\lambda \ll a, b$, то выполняется условие

$$I(0, a; 0, b) = L(\lambda, a) L(\lambda, b). \quad (6.163)$$

Далее, если $da, db \ll a, b$, из простых геометрических соображений следует

$$I(a, a + da; b, b + db) = I(0, a + da; 0, b + db) + I(0, a; 0, b) - I(0, a; 0, b + db) - I(0, a + da; 0, b).$$

Упрощая с помощью (6.163) и явного вида $L(\lambda, \omega) = 2(L - 1) \ln \frac{2\omega}{\lambda} + \dots$ (см. формулу (4.88)), получим:

$$\begin{aligned} I(a, a + da; b, b + db) &= 4(L - 1)^2 \ln \frac{a + da}{a} \ln \frac{b + db}{b} \approx \\ &\approx 4(L - 1)^2 \frac{da}{a} \frac{db}{b}. \end{aligned} \quad (6.164)$$

Наконец, находим искомую разницу в сечениях:

$$\begin{aligned} \sigma_K &= \sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \sum_{\Omega} I(a, a + da; b, b + db) = \\ &= \sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} 4(L - 1)^2 \int_0^\omega \frac{da}{a} \int_{\omega - a}^\omega \frac{db}{b} = \\ &= \sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} 4(L - 1)^2 \text{Li}_2\left(\frac{a}{\omega}\right) \Big|_0^\omega = \sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2}{3} (L - 1)^2, \end{aligned} \quad (6.165)$$

где область определения (см. рис. 6.6) в плоскости энергий двух фотонов, соответствующих сечению σ_K , задаётся пересечением простых областей:

$$\Omega = \{a < \omega\} \cap \{b < \omega\} \cap \{a + b > \omega\}.$$

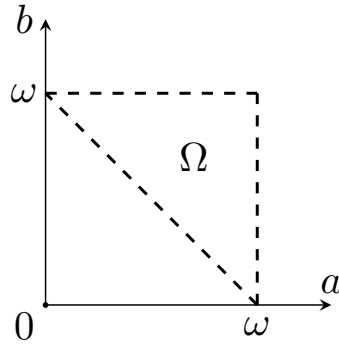


Рис. 6.6: Область энергий двух мягких тормозных фотонов

6.9 Метод спиральных амплитуд

Рассчитаем методом спиральных амплитуд процесс, описываемый диаграммами на рис. 6.7 (они совпадают с приведенными на рис. 3.2, но более подробно подписаны).

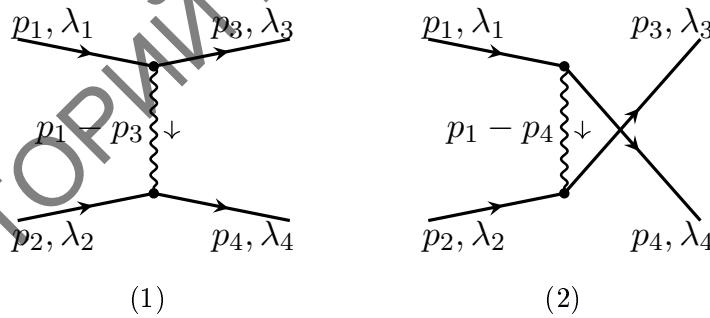


Рис. 6.7: Фейнмановские диаграммы мёллеровского процесса $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ с безрадиационной кинематикой: (1) – t -канальная, (2) – u -канальная. На линиях указаны 4-импульсы частиц и их спиральности

Выпишем амплитуду t -канальной диаграммы с обменом j -бозоном (будем пользоваться обозначениями и правилами Фейнмана, как в главе 3):

$$\mathcal{M}_t^j = i \frac{\alpha}{\pi} D^{jt} \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (v^j - a^j \gamma_5) u(p_1) \cdot \bar{u}(p_4) \gamma_\mu (v^j - a^j \gamma_5) u(p_2).$$

Спиральности частиц присутствуют в такой записи амплитуды в том смысле, что каждой биспинорной амплитуде соответствует индекс спиральности, например, $u(k) \rightarrow u^\lambda(k)$, где λ – спиральность частицы с 4-импульсом k . Чтобы задать определённую спиральность начальных и конечных частиц, поступаем так:

$$u(k) \rightarrow u^\lambda(k) = \omega_\lambda u(k), \quad \bar{u}(k) \rightarrow \bar{u}^\lambda(k) = \bar{u}(k)\omega_{-\lambda}, \quad (6.166)$$

где спиральности могут быть: $\lambda = -1$ (левая, L), $\lambda = +1$ (правая, R), а операторы проектирования (поле фермиона Дирака проецируется этими операторами в левую или правую составляющую) имеют вид:

$$\omega_{\pm 1} \equiv \omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \quad (6.167)$$

Полезны следующие свойства:

$$\omega_\mp \gamma_\mu = \gamma_\mu \omega_\pm, \quad \omega_\pm^2 = \omega_\pm. \quad (6.168)$$

Следует отметить и то, что векторное взаимодействие частиц можно представить через смешивание векторного взаимодействия левых и правых компонент:

$$\bar{u}^- \gamma_\mu u^- + \bar{u}^+ \gamma_\mu u^+ = \bar{u}(\omega_+ \gamma_\mu \omega_- + \omega_- \gamma_\mu \omega_+) u = \bar{u} \gamma_\mu u,$$

иными словами: взаимодействие всегда векторное, факторы ω_\pm характеризуют саму частицу (левую или правую).

Выпишем последовательно все спиральные амплитуды, начиная со случая процесса $e_R + e_R \rightarrow e_R + e_R$ в t -канале:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t^{j,++++} &= i \frac{\alpha}{\pi} D^{jt} \cdot \bar{u}(p_3) \omega_- \gamma_\mu (v^j - a^j \gamma_5) \omega_+ u(p_1) \times \\ &\quad \times \bar{u}(p_4) \omega_- \gamma_\mu (v^j - a^j \gamma_5) \omega_+ u(p_2). \end{aligned}$$

Используя свойства (6.168), а также важные соотношения:

$$\omega_\mp (v^j - a^j \gamma_5) = \omega_\mp (v^j \pm a^j), \quad (6.169)$$

получим упрощенное выражение (мы также возвращаемся к записи биспиноров с фиксированной спиральностью):

$$\mathcal{M}_t^{j,++++} = i \frac{\alpha}{\pi} (v^j - a^j)^2 D^{jt} \cdot \bar{u}^+(p_3) \gamma_\mu u^+(p_1) \cdot \bar{u}^+(p_4) \gamma_\mu u^+(p_2).$$

Видно, что такая простая структура предполагает беспроблемное суммирование амплитуд с обменом γ и Z -бозоном:

$$\sum_{j=\gamma,Z} (v^j - a^j)^2 D^{jt} = D^{\gamma t} + \frac{s_W^2}{c_W^2} D^{Zt}. \quad (6.170)$$

Тогда

$$\mathcal{M}_t^{\gamma+Z,++++} = i \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=\gamma,Z} (v^j - a^j)^2 D^{jt} \cdot \bar{u}^+(p_3) \gamma_\mu u^+(p_1) \cdot \bar{u}^+(p_4) \gamma_\mu u^+(p_2).$$

Далее проведём тождественное преобразование (домножим и разделим на произведение чисел $a \cdot b$):

$$\mathcal{M}_t^{\gamma+Z,++++} = i \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=\gamma,Z} (v^j - a^j)^2 D^{jt} \frac{\bar{u}^+(p_3) \gamma_\mu u^+(p_1) \cdot a \cdot \bar{u}^+(p_4) \gamma_\mu u^+(p_2) \cdot b}{ab},$$

числа a и b подберем такими:

$$a = \bar{u}^+(p_1) \hat{p}_2 u^+(p_4), \quad b = \bar{u}^+(p_2) \hat{p}_1 u^+(p_3)$$

(a и b – числа, поскольку имеют структуру $\bar{u} \dots u$, то есть строка умноженная на столбец). Основанием для такого выбора чисел a и b служит то, что числитель сворачивается в один след, так что выражение в числителе амплитуды приобретает (после перестановки $u(p_3)$ в начало произведения и таким образом “замыкания” фермионной линии) вид:

$$\text{Sp} [u^+(p_3) \bar{u}^+(p_3) \gamma_\mu u^+(p_1) \bar{u}^+(p_1) \hat{p}_2 u^+(p_4) \bar{u}^+(p_4) \gamma_\mu u^+(p_2) \bar{u}^+(p_2) \hat{p}_1].$$

Воспользуемся тем, что для безмассового фермиона с 4-импульсом k выполняется условие полноты:

$$u^\lambda(k) \bar{u}^\lambda(k) = \omega_\lambda \hat{k}.$$

Тогда получим для числителя амплитуды:

$$\text{Sp} [\omega_+ \hat{p}_3 \gamma_\mu \omega_+ \hat{p}_1 \hat{p}_2 \omega_+ \hat{p}_4 \gamma_\mu \omega_+ \hat{p}_2 \hat{p}_1].$$

Произведение матриц можно упростить, используя свойства (6.168):

$$\text{Sp} [\hat{p}_3 \gamma_\mu \hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_4 \gamma_\mu \hat{p}_2 \hat{p}_1 \omega_+] = 2s^2 t.$$

Нетрудно посчитать получившийся след вручную, достаточно применить следующие элементарные свойства:

$$\gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma_\mu = -2\hat{c} \hat{b} \hat{a}, \quad \hat{a} \hat{b} = 2ab - \hat{b} \hat{a}.$$

Вычислить этот след нетрудно и с помощью компьютерной алгебры, приведём соответствующую программу на языке FORM [258].

```
v p1,p2,p3,p4; i mu,nu;
g NUM = g_(1,p3,mu,p1,p2,p4,mu,p2,p1)*1/2*(1+g5_(1));
trace4,1;
repeat;
  id p4 = p1+p2-p3;
  id p1.p1 = 0;
  id p2.p2 = 0;
  id p3.p3 = 0;
endrepeat;
print NUM;
.end
```

Вычислить значения a и b возможным не представляется, однако в наблюдаемые величины входят только их квадраты, которые как раз посчитать несложно:

$$\begin{aligned} aa^* &= \bar{u}^+(p_1)\hat{p}_2u^+(p_4) \cdot \bar{u}^+(p_4)\hat{p}_2u^+(p_1) = \\ &= \text{Sp}[u^+(p_1)\bar{u}^+(p_1)\hat{p}_2u^+(p_4)\bar{u}^+(p_4)\hat{p}_2] = \\ &= \text{Sp}[\omega_+\hat{p}_1\hat{p}_2\omega_+\hat{p}_4\hat{p}_2] = -st. \end{aligned}$$

Аналогично квадратируется и b , ответ получается такой же: $bb^* = -st$.

Разберём по порядку структуру сечений со всеми конфигурациями поляризации LL, RR, LR, RL.

1. В сечение σ_{LL} даст вклад только процесс $e_L + e_L \rightarrow e_L + e_L$ (другие конечные состояния запрещены законом сохранения момента). Запишем это условно так: $\sigma_{LL} \sim |\mathcal{M}^{----}|^2$.

2. Аналогично в сечение σ_{RR} даст вклад только процесс $e_R + e_R \rightarrow e_R + e_R$, тогда: $\sigma_{RR} \sim |\mathcal{M}^{++++}|^2$.

3. В сечение σ_{LR} дают вклад два процесса: $e_L + e_R \rightarrow e_L + e_R$ и $e_L + e_R \rightarrow e_R + e_L$, тогда: $\sigma_{LR} \sim |\mathcal{M}^{-++}|^2 + |\mathcal{M}^{-+-}|^2$.

4. Сечение $\sigma_{RL} \sim |\mathcal{M}^{+-+}|^2 + |\mathcal{M}^{+--}|^2$, благодаря принципу Паули, легко получить из равенства: $\sigma_{RL} \equiv \sigma_{LR}$.

Интерференционных вкладов нет, так как все состояния (и начальные, и конечные) разные.

Применяя вышеописанную технику, вычислим и выпишем все нужные

спиральные амплитуды:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^{j,++++} &= i\frac{\alpha}{\pi}(v^j - a^j)^2 D^{jt} \cdot \bar{u}^+(p_3)\gamma_\mu u^+(p_1) \cdot \bar{u}^+(p_4)\gamma_\mu u^+(p_2), \\ \mathcal{M}_t^{j,+--+} &= i\frac{\alpha}{\pi}(v^{j^2} - a^{j^2}) D^{jt} \cdot \bar{u}^+(p_3)\gamma_\mu u^+(p_1) \cdot \bar{u}^-(p_4)\gamma_\mu u^-(p_2), \\ \mathcal{M}_t^{j,+---} &= i\frac{\alpha}{\pi}(v^{j^2} - a^{j^2}) D^{jt} \cdot \bar{u}^-(p_3)\gamma_\mu \omega_{-\omega_+} u^-(p_1) \cdot \bar{u}^-(p_4)\gamma_\mu \omega_{-\omega_+} u^-(p_2), \\ \mathcal{M}_t^{j,----} &= i\frac{\alpha}{\pi}(v^j + a^j)^2 D^{jt} \cdot \bar{u}^-(p_3)\gamma_\mu u^-(p_1) \cdot \bar{u}^-(p_4)\gamma_\mu u^-(p_2).\end{aligned}$$

Из-за того, что $\omega_{-}\omega_{+} = 0$, t -канальная спиральная амплитуда для случая “+ - - +” равна нулю.

Далее производим суммирование фотонной и Z -бозонной диаграмм, а затем домножение и деление на ab . Числа a и b для различных случаев приведены в табл. 6.4.

Табл. 6.4: Комплексные числа a и b , а также их квадраты для различных спиральных состояний и каналов

	++++	+--+	+---	----
a	$\bar{u}^+(p_1)\hat{p}_2 u^+(p_4)$	$\bar{u}^+(p_1)u^-(p_4)$	-	$\bar{u}^-(p_1)\hat{p}_2 u^-(p_4)$
\hat{a}	$\bar{u}^+(p_1)\hat{p}_2 u^+(p_3)$	-	$\bar{u}^+(p_1)u^-(p_4)$	$\bar{u}^-(p_1)\hat{p}_2 u^-(p_3)$
b	$\bar{u}^+(p_2)\hat{p}_1 u^+(p_3)$	$\bar{u}^-(p_2)u^+(p_3)$	-	$\bar{u}^-(p_2)\hat{p}_1 u^-(p_3)$
\hat{b}	$\bar{u}^+(p_2)\hat{p}_1 u^+(p_4)$	-	$\bar{u}^-(p_2)u^+(p_3)$	$\bar{u}^-(p_2)\hat{p}_1 u^-(p_4)$
aa^*	$-st$	$-u$	-	$-st$
bb^*	$-st$	$-u$	-	$-st$
$\hat{a}\hat{a}^*$	$-su$	-	$-t$	$-su$
$\hat{b}\hat{b}^*$	$-su$	-	$-t$	$-su$

Наконец, u -канальные диаграммы получаем из t -канальных перестановками $p_3 \leftrightarrow p_4$, $\lambda_3 \leftrightarrow \lambda_4$. Числа a и b после такой перестановки будем обозначать величиной со “шляпкой”, например, для случая “++++”:

$$\hat{a} = a(p_3 \leftrightarrow p_4) = \bar{u}^+(p_1)\hat{p}_2 u^+(p_3).$$

В интерференционном члене ($t \times u$) для случаев “++++” и “----” нужно также выражение: $a\hat{a}^*b\hat{b}^* = -s^2tu$.

Приведем получившиеся в результате квадраты спиральных амплитуд:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}^{++++}|^2 &= \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left| \sum_{j=\gamma, Z} (v^j - a^j)^2 D^{jt} \cdot \frac{2s^2 t}{ab} - (p_3 \leftrightarrow p_4) \right|^2 = \\
&= \frac{4\alpha^2}{\pi^2} s^2 \left[\sum_{j=\gamma, Z} (v^j - a^j)^2 (D^{jt} + D^{ju}) \right]^2, \\
|\mathcal{M}^{----}|^2 &= \frac{4\alpha^2}{\pi^2} s^2 \left[\sum_{j=\gamma, Z} (v^j + a^j)^2 (D^{jt} + D^{ju}) \right]^2, \\
|\mathcal{M}^{+--+}|^2 &= \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left| \sum_{j=\gamma, Z} (v^{j^2} - a^{j^2}) D^{jt} \cdot \frac{2u^2}{ab} - 0 \text{ (нет } u\text{-канала)} \right|^2 = \\
&= \frac{4\alpha^2}{\pi^2} u^2 \left[\sum_{j=\gamma, Z} (v^{j^2} - a^{j^2}) D^{jt} \right]^2, \\
|\mathcal{M}^{+--+}|^2 &= \frac{4\alpha^2}{\pi^2} t^2 \left[\sum_{j=\gamma, Z} (v^{j^2} - a^{j^2}) D^{ju} \right]^2.
\end{aligned}$$

Сконструируем из получившегося поляризационную асимметрию (3.11):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\sigma_{LL} - \sigma_{RR}}{\sigma_{LL} + 2\sigma_{RL} + \sigma_{RR}} = \\
&= \frac{|\mathcal{M}^{----}|^2 - |\mathcal{M}^{++++}|^2}{|\mathcal{M}^{----}|^2 + 2|\mathcal{M}^{+--+}|^2 + 2|\mathcal{M}^{+--+}|^2 + |\mathcal{M}^{++++}|^2}. \quad (6.171)
\end{aligned}$$

Произведя несложные алгебраические выкладки, получим в LE-режиме для числителя и знаменателя, соответственно:

$$\frac{4\alpha^2}{\pi^2} \frac{s^3}{m_Z^2 t u} \frac{1 - 4s_W^2}{c_W^2 s_W^2} \quad \text{и} \quad \frac{8\alpha^2}{\pi^2} \frac{s^4 + t^4 + u^4}{t^2 u^2}. \quad (6.172)$$

Как видно, в отношении этих выражений получаем уже знакомую борновскую асимметрию (3.12).

6.10 Кварковая асимметрия вперёд-назад

Рассмотрим асимметрию вперёд-назад в реакции $q\bar{q} \rightarrow l^- l^+$. На борновском уровне она формируется из сечения (5.31) с неполяризованными кварками:

$$d\sigma_0^{q\bar{q}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} \sum_{a,b=\gamma, Z} D_a(q) D_b^*(q) [t^2 f_{q^-}^{ab} + u^2 f_{q^+}^{ab}] dt \quad (6.173)$$

следующим образом

$$A_{\text{FB}}^{q\bar{q}} = \frac{\sigma_0^{q\bar{q}}|_F - \sigma_0^{q\bar{q}}|_B}{\sigma_0^{q\bar{q}}|_F + \sigma_0^{q\bar{q}}|_B}. \quad (6.174)$$

Сечение “вперёд” (индекс F, forward) получается интегрированием по t в интервале $[-s/2, 0]$, а “назад” (B, backward) аналогично – в интервале $[0, s/2]$. Тогда, произведя несложный расчёт:

$$\int_{-s/2}^0 t^2 dt = \int_{-s}^{-s/2} u^2 dt = \frac{1}{24}s^3, \quad \int_{-s/2}^0 u^2 dt = \int_{-s}^{-s/2} t^2 dt = \frac{7}{24}s^3,$$

получим

$$\sigma_0^{q\bar{q}}|_{(F,B)} = \frac{1}{12}\pi\alpha^2 s \sum_{a,b=\gamma,Z} D_a(q)D_b^*(q) [f_{q-,q+}^{ab} + 7f_{q+,q-}^{ab}].$$

Асимметрия вперёд-назад в результате имеет вид:

$$A_{\text{FB}}^{q\bar{q}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sum_{a,b} D_a(q)D_b^*(q) [f_{q+}^{aac} - f_{q-}^{aac}]}{\sum_{a,b} D_a(q)D_b^*(q) [f_{q+}^{aac} + f_{q-}^{aac}]} = \frac{3}{4} \frac{\sum_{a,b} D_a(q)D_b^*(q) \lambda_{q-}^{ab} \lambda_{l-}^{ab}}{\sum_{a,b} D_a(q)D_b^*(q) \lambda_{q+}^{ab} \lambda_{l+}^{ab}}.$$

Зависимости от \sqrt{s} асимметрий $A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}$ ($q = u, d$) при стандартных значениях электрослабых параметров изображены на рис. 6.8.

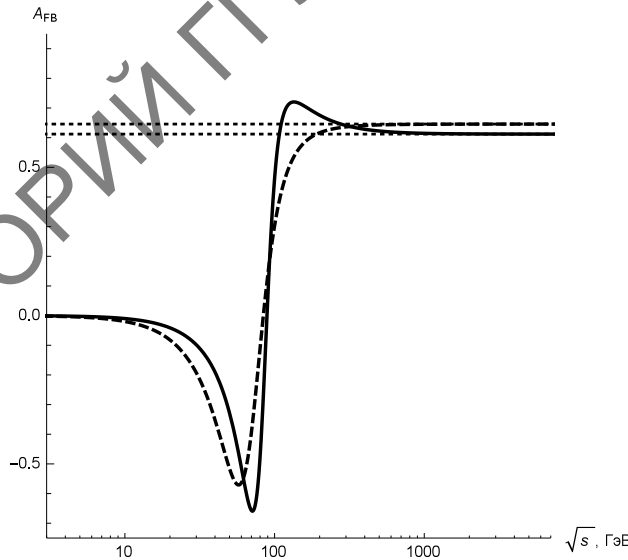


Рис. 6.8: Асимметрии $A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}$ в зависимости от \sqrt{s} . Сплошная линия – $u\bar{u}$ -случай, штриховая – $d\bar{d}$ -случай. Точечные линии – приближенные выражения в HE-режиме (6.176)

В LE-режиме асимметрия крайне мала, покажем это. Так как в этом режиме $D_\gamma \gg D_Z$, а $\lambda_{f-}^{\gamma\gamma} = 0$, после упрощения получим для асимметрии

следующее выражение:

$$\begin{aligned} A_{\text{FB}}^{q\bar{q}} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2D_Z(q)\lambda_{q-}^{\gamma Z}\lambda_{l-}^{\gamma Z}}{D_\gamma(q)\lambda_{q+}^{\gamma\gamma}\lambda_{l+}^{\gamma\gamma}} = -\frac{3s}{2m_Z^2} \cdot \frac{a_q^Z a_l^Z}{v_q^\gamma v_l^\gamma} = \frac{3s}{2m_Z^2} \cdot \frac{a_q^Z a_l^Z}{Q_q} = \\ &= \frac{3s}{2m_Z^2} \cdot \frac{I_q^3 I_l^3}{4s_W^2 c_W^2 Q_q} = -\frac{3s}{16m_W^2} \cdot \frac{I_q^3}{s_W^2 Q_q}. \end{aligned} \quad (6.175)$$

В HE-режиме, где масса Z -бозона “вымирает” и, следовательно, выполняется приближенное равенство $D_\gamma \approx D_Z$, получим:

$$A_{\text{FB}}^{q\bar{q}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sum_{a,b} \lambda_{q-}^{ab} \lambda_{l-}^{ab}}{\sum_{a,b} \lambda_{q+}^{ab} \lambda_{l+}^{ab}}. \quad (6.176)$$

Подставляя значения зарядов и компонент изоспина, получим:

$$A_{\text{FB}}^{u\bar{u}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3 - 4s_W^2 + 16s_W^4}{9 - 12s_W^2 + 88s_W^4} = 0.6120, \quad (6.177)$$

$$A_{\text{FB}}^{d\bar{d}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3 - 8s_W^2 + 8s_W^4}{9 - 24s_W^2 + 40s_W^4} = 0.6458. \quad (6.178)$$

Асимметрия вперед-назад является весьма интересной наблюдаемой величиной с точки зрения возможности обнаружения новых нейтральных бозонов [292]. В этой работе показано поведение $A_{\text{FB}}^{q\bar{q}}$ в зависимости от энергии реакции в с.ц.м. \sqrt{s} при условии наличия одного из дополнительных нейтральных бозонов: Z_χ , Z_ψ , Z_I (они имеют массу 500 ГэВ). Z_I -бозон не взаимодействует с u -кварками и не меняет значений, предсказываемых СМ.

6.11 Интегралы для жёсткого тормозного излучения

Инфракрасно расходящиеся интегралы для разд. 4.3.3 выглядят так:

$$\begin{aligned} B_1 &= J\left[\frac{m_e^2}{z_1^2}\right] = \frac{1}{x} + \frac{c_T}{s_T}, & B_2 &= J\left[\frac{m_e^2}{v_1^2}\right] = \frac{1}{x} + \frac{c_U}{s_U}, \\ B_3 &= J\left[\frac{m_\mu^2}{z^2}\right] = \frac{1}{x}, & B_4 &= J\left[\frac{m_\mu^2}{v^2}\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{s}, \\ B_5 &= J\left[\frac{1}{vz_1}\right] = \frac{1}{c_U s x} \ln \frac{c_U^2 s^2}{m_e^2 m_\mu^2}, & B_6 &= J\left[\frac{1}{zv_1}\right] = \frac{1}{c_U s_1 x} \ln \frac{c_U^2 s_1^2}{m_e^2 m_\mu^2}, \\ B_7 &= J\left[\frac{1}{zz_1}\right] = \frac{1}{c_T s_1 x} \ln \frac{c_T^2 s_1^2}{m_e^2 m_\mu^2}, & B_8 &= J\left[\frac{1}{vv_1}\right] = \frac{1}{c_T s x} \ln \frac{c_T^2 s^2}{m_e^2 m_\mu^2}. \end{aligned}$$

Приведём список инфракрасно конечных интегралов для разд. 4.3.3:

$$\begin{aligned}
A_0 &= J\left[1\right] = \ln \frac{s}{s_1}, & A_1 &= J\left[\frac{m_e^2 z^3}{z_1^2}\right] = \frac{c_T^3 s s_1^3 x^2}{s_T^4}, \\
A_2 &= J\left[\frac{m_e^2 z^2}{z_1^2}\right] = \frac{c_T^2 s s_1^2 x}{s_T^3}, & A_3 &= J\left[\frac{m_e^2 z}{z_1^2}\right] = \frac{c_T s s_1}{s_T^2}, \\
A_4 &= J\left[\frac{z^3}{z_1}\right] = \frac{-x^3}{6s_T^4} \sum_{i=0}^3 d_i c_T^i s^{3-i} x^i + \frac{c_T^3 s_1^3 x^3}{s_T^4} \ln \frac{s_T^2}{s_1 m_e^2}, & d_2 &= 51c_T - 18, \\
& & d_0 &= 22c_T^3 - 6c_T^2 - 3c_T - 2, \quad d_1 = 3(-20c_T^2 + 6c_T + 3), \quad d_3 = -11, \\
A_5 &= J\left[\frac{z^2}{z_1}\right] = \frac{-x^2}{2s_T^3} \sum_{i=0}^2 e_i c_T^i s^{2-i} x^i + \frac{c_T^2 s_1^2 x^2}{s_T^3} \ln \frac{s_T^2}{s_1 m_e^2}, \\
& & e_0 &= 6c_T^2 - 2c_T - 1, \quad e_1 = 2(2 - 5c_T), \quad e_2 = 3, \\
A_6 &= J\left[\frac{z}{z_1}\right] = \frac{(s_T - c_T s_1)x}{s_T^2} + \frac{c_T s_1 x}{s_T^2} \ln \frac{s_T^2}{s_1 m_e^2}, \\
A_7 &= J\left[\frac{m_e^2 z^3}{v_1^2}\right] = \frac{c_U^3 s s_1^3 x^2}{s_U^4}, & A_8 &= J\left[\frac{m_e^2 z^2}{v_1^2}\right] = \frac{c_U^2 s s_1^2 x}{s_U^3}, \\
A_9 &= J\left[\frac{m_e^2 z}{v_1^2}\right] = \frac{c_U s s_1}{s_U^2}, & A_{10} &= J\left[\frac{z^3}{v_1}\right] = A_4|_{T \leftrightarrow U}, \\
A_{11} &= J\left[\frac{z^2}{v_1}\right] = A_5|_{T \leftrightarrow U}, & A_{12} &= J\left[\frac{z}{v_1}\right] = A_6|_{T \leftrightarrow U}, \\
A_{13} &= J\left[\frac{m_\mu^2 v_1^2}{z^2}\right] = x c_U^2, & A_{14} &= J\left[\frac{m_\mu^2 v_1}{z^2}\right] = c_U, \\
A_{15} &= J\left[\frac{v_1^2}{z}\right] = \frac{-x^2(6c_T^2 - 10c_T + 3)}{2s_1} + \frac{c_U^2 x^2}{s_1} \ln \frac{s_1^2}{m_\mu^2 s}, \\
A_{16} &= J\left[\frac{v_1}{z}\right] = \frac{x}{s_1} \left(c_U \ln \frac{s_1^2}{m_\mu^2 s} - c\right), & A_{17} &= J\left[\frac{v_1^2}{v}\right] = \frac{-e_0 x^2}{2s} + \frac{c_T^2 x^2}{s} \ln \frac{s}{m_\mu^2}, \\
A_{18} &= J\left[\frac{v_1}{v}\right] = \frac{x}{s} \left(c_T \ln \frac{s}{m_\mu^2} + c\right), & A_{19} &= J\left[\frac{1}{z_1}\right] = \frac{1}{s_T} \ln \frac{s_T^2}{m_e^2 s_1}, \\
A_{20} &= J\left[\frac{1}{v_1}\right] = \frac{1}{s_U} \ln \frac{s_U^2}{m_e^2 s_1}, & A_{21} &= J\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{1}{s_1} \ln \frac{s_1^2}{m_\mu^2 s}, \\
A_{22} &= J\left[\frac{1}{v}\right] = \frac{1}{s} \ln \frac{s}{m_\mu^2}, & A_{23} &= J\left[v_1\right] = cx - (s_1 c_U - s c_T) \ln \frac{s}{s_1}, \\
A_{24} &= J\left[z\right] = x - s_1 \ln \frac{s}{s_1}.
\end{aligned}$$

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Автор приложил все усилия к тому, чтобы детально изложить в данной монографии наиболее важные приложения теории возмущений в квантовой теории поля и подробно объяснить основные методы пертурбативных расчётов. Такие вопросы, как, например:

1. векторное и тензорное интегрирование,
2. расчёт и перенормировка двух- и трёхточечных скалярных функций,
3. зависимость вкладов в наблюдаемые величины от выбора ренормализационных условий,
4. безрадиационная и радиационная кинематика,
5. новая методика использования относительных поправок к наблюдаемым сечениям и асимметриям,
6. два новых асимптотических метода: для LE-режима и для HE-режима,
7. расчёт фазового объёма (двух и трёхчастичного),
8. классический метод Мо – Тсаи и новый W -метод для учёта событий с тормозным излучением,
9. методика расчёта интегралов для мягкого тормозного излучения,
10. метод спиральных амплитуд

разобраны весьма детально и изложены доступным языком. Автор надеется, после их проработки не останется ощущения, что теоретическая физика слишком сложна для понимания. Безусловно, при самостоятельном пересчёте (или перепроверке) приведённых результатов могут проявиться тонкости, которые автор не предусмотрел. Не исключено, что потребуется кое-что дополнительно прочитать в учебниках или оригинальной литературе.

Специфика текста не предполагает последовательного – главу за главой – изучения материала. Главы монографии дополняют друг друга, демонстрируют разнообразие обозначений и спектр задач, которые можно решить в рамках изложенных методов. Автор надеется, что читатель, который поймёт логику применявшихся подходов, будет, в основном, готов к самостоятельной работе в области пертурбативных расчётов для экспериментов физики высоких энергий.

Пользуясь случаем, выскажу слова искренней благодарности преподавателям Гомельского государственного университета им. Франциска Скорины, в котором мне посчастливилось учиться и, впоследствии, работать – в первую очередь Валерию Николаевичу Капшаю, замечательному педагогу и физику, заинтересовавшему наукой не одно поколение студентов, в их числе и меня.

Хочу вспомнить Николая Максимовича Шумейко (1942–2016) – основателя белорусской научной школы физики частиц и высоких энергий, моего научного консультанта по докторской диссертации – за многолетнюю поддержку и внимание к моей работе. Выражаю глубокую признательность моим коллегам из ЛТФ ОИЯИ Эдуарду Алексеевичу Кураеву (1940–2014), Андрею Борисовичу Арбузову и Юрию Михайловичу Быстрицкому за то, что долгие годы они разделяли со мной глубокую заинтересованность в разрешении насущных проблем физики высоких энергий и бесценную помощь.

Я благодарен коллегам по группе RDMS CMS и всем соавторам в научных публикациях за обсуждение решённых нами задач и сотрудничество. Благодарю моих коллег в CERN, DESY, GSI, ICTP, IHEP, JINR, SLAC, университетах Acadia и Memorial за гостеприимство во время визитов в эти научные центры и всестороннюю поддержку.

Большое спасибо за помощь в работе с текстом Светлане Александровне Соловьёвой и Марии Дмитриевне Никитиной, благодаря которой портреты великих физиков последнего столетия, сформировавших облик современной науки, обрели новую жизнь.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rubbia C. Experimental observation of the intermediate vector bosons W^\pm and Z^0 / C. Rubbia // Rev. Mod. Phys. – 1985. – Vol. 57. – P. 699–722.
- [2] Perl, M.L. Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation / M. L. Perl [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 35. – P. 1489–1492.
- [3] Kodama, K. Observation of tau neutrino interactions / DONUT Collaboration // Phys. Lett. B – 2001. – Vol. 504. – P. 218–224, FERMILAB-PUB-00-335-E, hep-ex/0012035.
- [4] Herb, S.W. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5-GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions / Fermilab Collab. // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 39. – P. 252–255.
- [5] Abachi, S. Search for High Mass Top Quark Production in p p-bar Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV / D0 Collaboration. S. Abachi [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 2422–2426.
- [6] Abe, F. Observation of top-quark production in anti-p p collisions / CDF Collaboration. F. Abe [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 2626–2631.
- [7] Ahmad, Q. R. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory / SNO Collaboration // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89. – P. 011301, arXiv: nucl-ex/0204008.
- [8] Aad, G. Observation of a New Particle in the Search for the Standard Model Higgs Boson with the ATLAS Detector at the LHC / ATLAS Collaboration // Phys. Lett. B – 2012. – Vol. 716. – P. 1–29, arXiv:1207.7214 [hep-ex].
- Chatrchyan, S. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with

- the CMS Experiment at the LHC / CMS Collaboration // Phys. Lett. B – 2012. – Vol. 716. – P. 30–61, arXiv:1207.7235 [hep-ex].
- [9] Glashow, S.L. Partial-symmetries of weak interactions / S. L. Glashow // Nucl. Phys. – 1961. – Vol. 22. – P. 579–588.
- [10] Weinberg, S. A model of leptons / S. Weinberg // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. – P. 1264–1266.
- [11] Salam, A. Elementary Particle Theory / A. Salam. – Stockholm, Ed: N. Svartholm Almquist and Wiksell, 1968. – 367 p.
- [12] Greiner, W. Quantum Chromodynamics / W. Greiner, A. Schäfer. – Springer, 1994. – 414 p.
- [13] Arnison, G. Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV / G. Arnison [et al.] // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol. 122. – P. 103–116; Banner, M. Observation of single isolated electrons of high transverse momentum in events with missing transverse energy at the CERN anti-p p collider / M. Banner [et al.] // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol. 122. – P. 476–485.
- [14] Arnison, G. Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around $95 \text{ GeV}/c^2$ at CERN SPS collider / G. Arnison [et al.] // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol. 126. – P. 398–410; Bagnaia, P. Evidence for $Z_0 \rightarrow e^+e^-$ at the CERN anti-p p collider / P. Bagnaia [et al.] // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol. 129. – P. 130–140.
- [15] Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 656 с.
- [16] Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Дифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1989. – 728 с.
- [17] Москалёв, А.Н. Релятивистская теория поля / А.Н. Москалёв // Санкт-Петербург: ПИЯФ РАН, 2006. – 206 с.
- [18] Griffiths, D. Introduction to Elementary Particles // D. Griffiths / WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008. – 454 p.
- [19] Биленький С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электро-слабого взаимодействия. С.М. Биленький / М.: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.

- [20] Бюклинг, Е. Кинематика элементарных частиц / Е. Бюклинг, К. Каянти. – Москва : Мир, 1975. – 343 с.
- [21] Aaltonen, T. Evidence for a particle produced in association with weak bosons and decaying to a bottom-antibottom quark pair in Higgs boson search at the Tevatron / CDF and D0 Coll. // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – P. 071804.
- [22] Кляйн, Д.Б. Обнаружение нейтральных слабых токов / Д.Б. Кляйн, А. Манн, К. Руббиа // УФН. – 1976. – Т. 120. – С. 97–130.
- [23] Yan, T.-M. Naive Drell–Yan and Its Successor / T.-M. Yan. – 1998. – 13 p. (Preprint / CLNS 98/1580) [hep-ph/9810268v1].
- [24] Christenson, J. H. Observation of muon pairs in high-energy hadron collisions / J. H. Christenson [et al.] // Phys. Rev. D. – 1972. – Vol. 8. – P. 2016–2034.
- [25] Drell, S. D. Massive Lepton Pair Production in Hadron-Hadron Collisions at High Energies / S. D. Drell, T. M. Yan. – SLAC, 1970 (Preprint / SLAC-PUB-0755); Phys. Rev. Lett. – 1970. – Vol. 25. – P. 316–320; Phys. Rev. Lett. – 1970. – Vol. 25. – P. 902 (erratum).
- [26] Drell, S. D. Partons and Their applications at high energies / S. D. Drell, T. M. Yan // Annals of Phys. – 1971. – Vol. 66. – P. 578–623.
- [27] Матвеев, В. А. Рождение мюонных пар в сильных взаимодействиях и асимптотические правила сумм / В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе. – Дубна, 1969. – 23 с. (Препринт / ОИЯИ P2-4543).
- [28] Palestini, S. Pion structure as observed in the reaction $\pi N \rightarrow \mu^+ \mu^- X$ at 80 GeV/c / S. Palestini [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 55. – P. 2649–2661.
- [29] Badier, J. Experimental determination of the antiproton structure function by the Drell–Yan mechanism / J. Badier [et al.] // Phys. Lett. B. – 1980. – Vol. 96. – P. 422–433.
- [30] Berger, E. L. Probing gluon polarization in hadronic direct photon production / E. L. Berger, J. Qui // Phys. Rev. D. – 1989. – Vol. 40. – P. 778–786.

- [31] Cheng, H.-Y. Spin asymmetry in proton-proton collisions as a probe of sea and gluon polarization in a photon / H.-Y. Cheng, S.-N. Lai // *Phys. Rev. D.* – 1989. – Vol. 41. – P. 95–99.
- [32] Kunszt, Z. Determination of the mass of the W boson / Z. Kunszt [et al.] // *Proc. of the 2nd CERN Workshop on LEP2 Physics, CERN Yellow Report-96-01.* – CERN, 1996. – P. 101–122.
- [33] Abbott, B. A Measurement of the W Boson Mass / D0 Collaboration. Abbott B. [et al.]. – 1997. – 48 p. (Preprint / hep-ex/9712029).
- [34] Keller, S. Measurement of the W Boson Mass at the LHC / S. Keller, J. Womersley. – 1997. – 7 p. (Preprint hep-ph/9711304v2).
- [35] Arkani-Hamed, N. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter / N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G.R. Dvali // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 429. – P. 263–272; Antoniadis, I. New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV / I. Antoniadis [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 436. – P. 257–263; Randall, L. A Large mass hierarchy from a small extra dimension / L. Randall, R. Sundrum // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 83. – P. 3370–3373; Randall, L. An Alternative to compactification / L. Randall, R. Sundrum // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 83. – P. 4690–4693; Kokorelis, C. Exact standard model structures from intersecting D5-branes / C. Kokorelis // *Nucl. Phys. B.* – 2004. – Vol. 677. – P. 115–163.
- [36] Leike, A. The Phenomenology of extra neutral gauge bosons / A. Leike // *Phys. Rept.* – 1999. – Vol. 317. – P. 143–250. [hep-ph/9805494].
- [37] Aleksejevs, A. NLO radiative corrections for forward-backward and left-right asymmetries at a B-factory / A. Aleksejevs, S. Barkanova, C. Miller, J.M. Roney, V. Zykunov // *Phys. Rev. D* – 2020. – Vol. 101, 053003, arXiv:1801.08510 [hep-ph].
- [38] Heusch, C.A. The international linear collider in its electron-electron version / C.A. Heusch // *Int. J. Mod. Phys A.* – 2005. – Vol. 20. – P. 7289–7293; The electron electron version of the linear collider – A millennium update / C.A. Heusch // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2000. – Vol. 15. – P. 2347–2353; Electron-electron collisions at the international linear collider / C.A. Heusch // *Int. J. Mod. Phys A.* – 2003. – Vol. 18. – P. 2733–2737.

- [39] Алексеев, А.Г. Адронные радиационные поправки к наблюдаемым асимметриям экспериментов G0 и QWeak / А.Г. Алексеев, С.Г. Барканова, В.А. Зыкунов // ЯФ. – 2010. – Т. 73. – С. 2077–2081.
- [40] Anselmino, M. The Theory and Phenomenology of Polarized Deep Inelastic Scattering / M. Anselmino, A. Efremov, E. Leader. – CERN, 1994. – 139 p. – (Preprint/CERN-TH.7216/94).
- [41] Фосс, Р. Кварк-спиновая структура нуклона: 20 лет сотрудничества ОИЯИ-ЦЕРН / Р. Фосс // УФН. – 1996. – Т. 166, № 9. – С. 927–942.
- [42] Bjorken, J.D. Inelastic electron-proton and γ -proton scattering and the structure of the nucleons / J.D. Bjorken, E.A. Pashos // Phys. Rev. Lett. – 1969. – Vol. 18, № 5. – P. 1975–1982.
- [43] Feynman, R.P. Very high-energy collisions of hadrons / R.P. Feynman // Phys. Rev. Lett. – 1969. – Vol. 23. – P. 1415–1417.
- [44] Фейнман, Р. Взаимодействие фотонов с адронами / Р. Фейнман. – Москва: Мир, 1975. – 340 с.
- [45] Bjorken, J.D. Inequality for electron and muon scattering from nucleons / J.D. Bjorken // Phys. Rev. Lett. – 1969. – Vol. 16, № 10. – P. 408–410.
- [46] Fritzsche, H. Advantages of the color octet gluon picture / H. Fritzsche, M. Gell-Mann, H. Leutwyler // Phys. Lett. B. – 1973. – Vol. 47. – P. 365–370.
- [47] Nambu, Y. Preludes in theoretical physics // Y. Nambu. – Amsterdam: North-Holland, 1966. – 103 p.
- [48] Politzer, H.D. Reliable perturbative results for strong interactions? / H. D. Politzer // Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 30. – P. 1346–1349.
- [49] Gross, D.J. Asymptotically free gauge theories / D.J. Gross, F. Wilczek // 1. Phys. Rev. D. – 1973. – Vol. 8. – P. 3638–3651; 2. Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9. – P. 980–982.
- [50] Altarelli, G. Asymptotic freedom in parton language / G. Altarelli, G. Parisi // Nucl. Phys. B. – 1977. – Vol. 126. – P. 298–313.
- [51] Alguard, M.J. Deep inelastic scattering of polarized electrons on polarized protons / M.J. Alguard [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 37. – P. 1261–1265.

- [52] Alguard, M.J. Deep inelastic scattering e-p asymmetry measurements and comparison with Bjorken sum rule and models of proton spin structure / M.J. Alguard [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1978. – Vol. 41. – P. 70–73.
- [53] Ashman, J. Measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function g_1 in deep inelastic muon-proton scattering / J. Ashman [et al.] // Phys. Lett. B. – 1988. – Vol. 206. – P. 364–370.
- [54] Ashman, J. An investigation of the spin structure of the proton in deep inelastic scattering of polarized muons on polarized protons / J. Ashman [et al.] // Nucl. Phys. B. – 1989. – Vol. 328. – P. 1–35.
- [55] Ellis, J. Sum rule for deep inelastic electroproduction from polarized protons / J. Ellis, R. L. Jaffe // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9. – P. 1414–1423.
- [56] Adams, D. Measurement of the spin dependent structure function $G_1(x)$ of the proton / SMC Collaboration. D. Adams [et al.] // Phys. Lett. B. – 1994. – Vol. 329. – P. 399–406.
- [57] Anthony, P.L. Determination of the nucleon structure function / E142 Collaboration. P. L. Anthony [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 71. – P. 959–962.
- [58] Abe, K. Precision measurement of proton spin structure function g_1^p / E143 Collaboration. K. Abe [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 346–350; Precision measurement of deuteron spin structure function g_1^d / Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 75. – P. 25–28; Measurement of the proton and deuteron spin structure function g_2 and asymmetry A_2 / Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 76. – P. 587–591.
- [59] Abe, K. Next-to-Leading Order QCD Analysis of Polarized Deep Inelastic Scattering Data / E154 Collaboration. Abe K. [et al.]. – 1997. – 12 p. (Preprint / hep-ph/9705344).
- [60] Ackerstaff, K. Measurement of the Neutron Spin Structure Function g_1^n with a Polarized ^3He Internal Target / The HERMES Collaboration. Ackerstaff K. [et al.]. – 1997. – 12 p. (Preprint / hep-ex/9703005).
- [61] Abbon, P. The COMPASS experiment at CERN / P. Abbon [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. – 2007. – Vol. 577. – P. 455–518 [hep-ex/0703049].

- [62] Jaffe, R. L. The g_1 problem: fact and fantasy on the spin of the proton / R. L. Jaffe, A. Manohar // Nucl. Phys. B. – 1990. – Vol. 337. – P. 509–546.
- [63] Ансельмино, М. О возможном разрешении “спинового кризиса” в партонной модели / М. Ансельмино, Б. Л. Иоффе, Э. Лидер // ЯФ. – 1989. – Т. 49. – С. 214–222.
- [64] Higgs, P. W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields / P. W. Higgs // Phys. Lett. – 1964. – Vol. 12. – P. 132–133.
- [65] Hollik, W. Radiative corrections in the standard model and their role for precision tests of the electroweak theory / W. Hollik // Fortschr. Phys. – 1990. – Vol. 38. – P. 165–260.
- [66] Böhm, M. On the 1-loop renormalization of the electroweak standard model and its application to leptonic processes / M. Böhm, H. Spiesberger, W. Hollik // Fortschr. Phys. – 1986. – Vol. 34. – P. 687–751.
- [67] Denner, A. Techniques for the calculation of electroweak radiative corrections at the one-loop level and results for W -physics at LEP200 / A. Denner // Fortschr. Phys. – 1993. – Vol. 41. – P. 307–419.
- [68] Romao, J. C. A resource for signs and Feynman diagrams of the Standard Model / Jorge C. Romao, Joao P. Silva // Int. J. Mod. Phys. A. – 2012. – Vol. 27. – 1230025, e-Print: arXiv:1209.6213.
- [69] Kobayashi, M. CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction / M. Kobayashi, K. Maskawa // Prog. Theor. Phys. – 1973. – Vol. 49. – P. 652–657.
- [70] Maki, Z. Remarks on the unified model of elementary particles / Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata // Prog. Theor. Phys. – 1962. – Vol. 28. – P. 870–880.
- [71] Mattig, P. The structure of jets in e^+e^- collisions / P. Mattig // Phys. Rep. – 1989. – Vol. 177. – P. 141–317.
- [72] Киселев, А.Б. Рождение адронов в жестких процессах / А.Б. Киселев, В.А. Петров // ЭЧАЯ. – 1988. – Т. 719. – С. 91–110.
- [73] Georgi, H. Unity of All Elementary Particle Forces / H. Georgi, S. L. Glashow // Phys. Rev. Lett. – 1974. – Vol. 32. – P. 438–441.

- [74] Shiozawa, M. Search for proton decay via $p \rightarrow e^+\pi_0$ in a large water Cherenkov detector / Super-Kamiokande Collab. M. Shiozawa [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 3319–3323, arXiv:hep-ex/9806014.
- [75] Wess, J. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations / J. Wess, B. Zumino // Phys. Lett. B. – 1974. – Vol. 49. – P. 52–60.
- [76] Швебер, С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
- [77] Schweber S.S. QED and the men who made it: Dyson, Schwinger, Feynman and Tomonaga. – Princeton University Press, 1994.
- [78] Tomonaga, S. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields / S. Tomonaga // Prog. Theor. Phys. – 1946. – Vol. 1. – P. 27–42.
- [79] Feynman, R. Space-time approach to quantum electrodynamics / R. Feynman // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 76. – P. 769–789.
- [80] Dyson, F.J. The Radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman / F.J. Dyson // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 75. – P. 486–502.
- [81] Brown, L.M. Radiative corrections to Compton scattering / L.M. Brown, R.P. Feynman // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 85. – P. 231–244.
- [82] Kroll, N.M. Radiative Corrections to the Hyperfine Structure and the Fine Structure Constant / N.M. Kroll, F. Pollock // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84. – P. 594–595.
- [83] Schwinger, J. On Radiative Corrections to Electron Scattering / J. Schwinger // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 75. – P. 898–899.
- [84] 't Hooft, G. Renormalization of massless Yang-Mills fields / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 33. – P. 173–199.
- [85] 't Hooft, G. Renormalizable lagrangians for massive Yang–Mills fields / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 35. – P. 167–188.
- [86] 't Hooft, G. Regularization and renormalization of gauge fields / G. 't Hooft, M. Veltman // Nucl. Phys. B. – 1972. – Vol. 44. – P. 189–213.

- [87] Высоцкий, М.И. Электрослабые радиационные поправки в распадах Z -бозона / М.И. Высоцкий [и др.] УФН. – 1996. – Т. 166, № 5. – С. 539–574.
- [88] Bardin, D. The Standard Model in the Making: Precision Study of the Electroweak Interactions / D. Bardin, G. Passarino. – Oxford University Press, USA, 1999. – 704 pp.
- [89] Bloch, F., and Nordsieck, A. Note on the Radiation Field of the Electron / F. Bloch and A. Nordsieck // Phys. Rev. 52. – 1937. – P. 54.
- [90] Bollini, C.G. Dimensional renormalization: the number of dimensions as a regularizing parameter / C.G. Bollini, J.J. Giambari // Nuovo Cimento. B. – 1972. – Vol. 12. – P. 259–264.
- [91] Marciano, W.J. Dimensional regularization of infrared divergences / W.J. Marciano, A. Sirlin // Nucl. Phys. B. – 1975. – Vol. 88. – P. 86–98.
- [92] 't Hooft, G. Dimensional regularization and the renormalization group / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 61. – P. 455–468;
- [93] 't Hooft, G. An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 62. – P. 444–460.
- [94] Bardeen, W.A. Deep-inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories / W.A. Bardeen [et al.] // Phys. Rev. D. – 1978. – Vol. 18. – P. 3998–4017.
- [95] Ross, D. Renormalization Of A Unified Theory Of Weak And Electromagnetic Interactions / D. Ross, J. Taylor // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 51. – P. 125–144; Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 58. – P. 643.
- [96] Sirlin, A. Radiative corrections in the $SU_L(2) \times U(1)$ theory: a simple renormalization framework / A. Sirlin // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22. – P. 971–981.
- [97] Marciano, W.J. Radiative corrections to neutrino-induced neutral current phenomena in $SU_L(2) \times U(1)$ theory / W.J. Marciano, A. Sirlin // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22. – P. 2695–2717.
- [98] Aoki, K.I. Electroweak theory / K.I. Aoki [et al.] // Suppl. Progr. Theor. Phys. – 1982. – Vol. 73. – P. 1–225.

- [99] Kahane, J. Radiative corrections to $\pi - e$ scattering / J. Kahane // Phys. Rev. B. – 1964. – Vol. 135. – P. 975–1004.
- [100] Van Nieuwenhuizen, P. Muon-electron scattering cross section to order α^3 / P. van Nieuwenhuizen // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 28. – P. 429–454.
- [101] Mo, L.W. Radiative corrections to elastic and inelastic ep and μp scattering / L.W. Mo, Y.S. Tsai // Rev. Mod. Phys. – 1969. – Vol. 41. – P. 205–235.
- [102] Tsai, Y.S. Radiative corrections to electron scattering / Y.S. Tsai. – SLAC, 1971. – 59 p. (Preprint / SLAC-PUB-848).
- [103] Bloom, E.D. High-energy inelastic ep scattering at 6° and 10° / E.D. Bloom [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1969. – Vol. 23, № 16. – P. 930–934.
- [104] Breidenbach, M. Observed behavior of highly inelastic electron-proton scattering / M. Breidenbach [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1969. – Vol. 23, № 16. – P. 935–939.
- [105] Gordon, B.A. Measurement of the nucleon structure function / B.A. Gordon [et al.] // Phys. Rev. D. – 1979. – Vol. 20, № 11. – P. 2645–2691.; Aubert, J.J. Measurement of the proton structure function F_2 in muon-hydrogen interactions at 120 and 280 GeV / J.J. Aubert, G. Bassompierre [et al.] // Phys. Lett. B. – 1981. – Vol. 105, № 4. – P. 315–321.
- [106] Кужир, П.П. О двух подходах к расчету радиационных поправок в глубоконеупругом IN -рассеянии / П.П. Кужир, Н.М. Шумейко // ЯФ. – 1992. – Т. 55. – С. 1958–1962.
- [107] Бардин, Д.Ю. О точном вычислении электромагнитной поправки низшего порядка к упругому рассеянию / Д.Ю. Бардин, Н.М. Шумейко. – Дубна, 1976. – 20 с. (Препринт / ОИЯИ P2-10113).
- [108] Бардин, Д.Ю. Точное вычисление радиационной поправки низшего порядка к процессам рассеяния точечных частиц со спинами 0 и $1/2$ / Д.Ю. Бардин, О.М. Федоренко, Н.М. Шумейко. – Дубна, 1976. – 16 с. (Препринт / ОИЯИ P2-10114).
- [109] Bardin, D.Yu. On an exact calculation of the lowest - order electromagnetic correction to the point particle elastic scattering / D.Yu. Bardin, N.M. Shumeiko // Nucl. Phys. B. – 1977. – Vol. 127. – P. 242–258.

- [110] Ахундов, А.А. Электромагнитные поправки к глубоконеупругому μ - p рассеянию / А.А. Ахундов, Д.Ю. Бардин, Н.М. Шумейко // ЯФ. – 1977. – Т. 26. – С. 1251–1257.
- [111] Akhundov, A.A. Electromagnetic corrections to deep inelastic lepton-nucleon scattering at high energies. 1. Contribution of the radiative tail of elastic peak / A.A. Akhundov, D.Yu. Bardin, N.M. Shumeiko. – Dubna, 1976. – 24 p. (Preprint / JINR E2-10147).; Akhundov, A.A. Electromagnetic corrections to deep inelastic lepton-nucleon scattering at high energies. 2. Corrections to continuous spectrum / A.A. Akhundov, D.Yu. Bardin, N.M. Shumeiko. – Dubna, 1976. – 28 p. (Preprint / JINR E2-10205).
- [112] Кухто, Т.В. Электромагнитные эффекты в глубоконеупругом рассеянии поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах / Т.В. Кухто, Н.М. Шумейко // ЯФ. – 1982. – Т. 36. – С. 707–721.
- [113] Akushevich, I.V. Radiative effects in deep inelastic scattering of polarized leptons by polarized light nuclei / I.V. Akushevich, N.M. Shumeiko // J. Phys. G. – 1994. – Vol. 20. – P. 513–531.
- [114] Сороко, А.В. Радиационные эффекты в глубоконеупругом лептон-нуклонном рассеянии в полуинклюзивной постановке эксперимента / А. В. Сороко, Н. М. Шумейко // ЯФ. – 1989. – Т. 49. – С. 1348–1358.
- [115] Сороко, А.В. Радиационные эффекты в полуинклюзивном глубоконеупругом рассеянии поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах / А. В. Сороко, Н. М. Шумейко // ЯФ. – 1991. – Т. 53. – С. 1015–1020.
- [116] Akushevich, I. Radiative effects in the processes of hadron electroproduction / I. Akushevich, N. Shumeiko, A. Soroko // Eur. Phys. J. C. – 1999. – Vol. 10. – P. 681–687 [hep-ph/990332].
- [117] Shumeiko, N.M. The lowest order total electromagnetic correction to the deep inelastic scattering of polarized leptons on polarized nucleons / N.M. Shumeiko, S.I. Timoshin // J. Phys. G. – 1991. – Vol. 17. – P. 1145–1157.
- [118] Зыкунов, В.А. О влиянии радиационных поправок к адронному току на наблюдаемые величины в глубоконеупругом рассеянии поля-

- ризованных лептонов на поляризованных нуклонах / В. А. Зыкунов, С. И. Тимошин, Н. М. Шумейко // ЯФ. – 1995. – Т. 58. – С. 2021–2028.
- [119] Hearn, A. C. REDUCE User's Manual for Version 3.4.1 / A. C. Hearn // RAND, Santa Monica, CA 90407-2138. – 1992.
- [120] Akushevich, I. POLRAD2.0 FORTRAN code for the radiative corrections calculation to deep inelastic scattering of polarized particles / I. Akushevich [et al.]. // Comput. Phys. Commun. – 1997. – Vol. 104. – P. 201–244.
- [121] Akushevich, I. RADGEN 1.0. Monte Carlo Generator for Radiative Events in DIS on Polarized and Unpolarized Targets / I. Akushevich, H. Boettcher, D. Ryckbosch // Workshop “Monte Carlo Generators for HERA Physics”, Hamburg, 1998/99. – С. 99–111 [hep-ph/9906408].
- [122] Akushevich, I. Radiative effects in processes of diffractive vector meson electroproduction / I. Akushevich // Eur. Phys. J. C. – 1999. – Vol. 8. – P. 457–463 [hep-ph/9808309].
- [123] Akushevich, I. QED radiative correction to spin-density matrix elements in exclusive vector meson production / I. Akushevich, P. Kuzhir // Phys. Lett. B. – 2000. – Vol. 474. – P. 411–415.
- [124] Afanasev, A.V. Model independent radiative corrections in processes of polarized electron nucleon elastic scattering / A.V. Afanasev, I.V. Akushevich, N.P. Merenkov // Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 64. – P. 113009–113019.
- [125] Afanasev, A.V. QED radiative corrections to asymmetries of elastic ep scattering in hadronic variables / A.V. Afanasev [et al.] // Phys. Lett. B. – 2001. – Vol. 514. – P. 269–278.
- [126] Ilyichev, A.N. Lowest order QED radiative corrections to longitudinally polarized Møller scattering / A.N. Ilyichev, V.A. Zykunov // Phys. Rev. D – 2005. – Vol. 72, 033018. – P. 1–10. [hep-ph/0504191].
- [127] Afanasiev, A. MERADGEN 1.0: Monte Carlo generator for the simulation of radiative events in parity conserving doubly-polarized Møller scattering / A. Afanasiev, Eu. Chudakov, A. Ilyichev and V. Zykunov // Comput. Phys. Commun. – 2007. – Vol. 176. – P. 218–231. [JLAB-PHY-06-456, hep-ph/0603027].

- [128] Spiesberger, H. QED radiative corrections for the parton distributions / H. Spiesberger // Phys. Rev. D. – 1995. – Vol. 52, № 9. – P. 4936–4940. [hep-ph/9412286].
- [129] Martin, A.D. Parton distributions incorporating QED contributions / A. D. Martin [et al.] // Eur. Phys. J. C. – 2005. – Vol. 39. – P. 155–161 [hep-ph/0411040].
- [130] Thorne, R. S. Status of MRST/MSTW PDF sets / R. S. Thorne, A. D. Martin, W. J. Stirling, G. Watt // arXiv:0907.2387 [hep-ph].
- [131] Кураев, Э.А. О радиационных поправках к e^+e^- аннигиляции в одиночный фотон при высоких энергиях / Э.А. Кураев, В.С. Фадин // ЯФ. – 1985. – Т. 41. – С. 733–742.
- [132] Кураев, Э.А. Вычисление радиационных поправок к сечению электрон-нуклонного рассеяния методом структурных функций / Э.А. Кураев, Н.Р. Меренков, В.С. Фадин // ЯФ. – 1988. – Т. 47. – С. 1593–1601.
- [133] Кураев, Э.А. Эффективный комптоновский тензор с тяжелым фотоном / Э.А. Кураев, Н.Р. Меренков, В.С. Фадин // ЯФ. – 1987. – Т. 45. – С. 782–789.
- [134] Akushevich, I. V. Compton tensor with heavy photon in the case of longitudinally polarized fermion / I. V. Akushevich, A. B. Arbuzov, E. A. Kuraev // Phys. Lett. B. – 1998. – Vol. 432. – P. 222–229.
- [135] Akhundov, A.A. Contribution of the Radiative Tail From the Elastic Peak to Deep Inelastic Scattering at HERA / A. A. Akhundov [et al.] // Z. Phys. – 1990. – Vol. C45. – P.645–661.
- [136] Sudakov, V.V. Vertex parts at very high-energies in quantum electrodynamics / V.V. Sudakov // Sov. Phys. JETP. – 1956. – Vol. 3. – P. 65–71.
- [137] Ciafaloni, P. Sudakov effects in electroweak corrections / P. Ciafaloni, D. Comelli // Phys. Lett. B. – 1999. – Vol. 446. – P. 278–284.
- [138] Fujimoto, J. Radiative corrections to e^+e^- reactions in electroweak theory / J. Fujimoto [et al.] // Suppl. Progr. Theor. Phys. – 1990. – Vol. 100. – P. 1–379.

- [139] Berends, F. A. Hard photon corrections for Bhabha scattering / F. A. Berends, K. J. F. Gaemers, and R. Gastmans // Nucl. Phys. B. – 1974. – Vol. 68. – P. 541–550.
- [140] Bohm, M. Radiative corrections to Bhabha scattering at high energies (I). Virtual and soft photon corrections / M. Bohm, A. Denner, W. Hollik // Nucl. Phys. B. – 1988. – Vol. 304. – P. 687–711.
- [141] Berends, F. A. Radiative corrections to Bhabha scattering at high energies (II). Hard photon corrections and Monte Carlo treatment / F. A. Berends, R. Kleiss, W. Hollik // Nucl. Phys. B. – 1988. – Vol. 304. – P. 712–748.
- [142] Алексеев, А. Г. Приложение асимптотических методов к расчёту электрослабых поправок в поляризационном Баба-рассеянии / А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, Ю. М. Быстрицкий, В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2020. – Т. 83. №2. – С. 159–185.
- [143] Алексеев, А. Г. Электрослабые поправки с учетом жесткого тормозного излучения в поляризационном Баба-рассеянии / А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, Ю. М. Быстрицкий, В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2020. – Т. 83. №3. – С. 1–17.
- [144] Arbuzov, A. Effects of higher orders in large angle Bhabha scattering / A. Arbuzov, E. Kuraev, B. Shaikhatdenov // ЭЧАЯ. – 2002. – Т. 22, В. 1. – С. 5–71.
- [145] Denner, A. Electroweak radiative corrections to polarized Møller scattering at high energies / A. Denner, S. Pozzorini // Eur. Phys. J. C. – 1999. – Vol. 7. – P. 185–195, [hep-ph/9807446].
- [146] Зыкунов, В. А. Электрослабые радиационные эффекты в поляризационном мёллеровском рассеянии / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2004. – Т. 67. – С. 1366–1379.
- [147] Зыкунов, В. А. Полный расчёт электрослабых поправок для поляризационного мёллеровского рассеяния при высоких энергиях / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2009. – Т. 72. – С. 1540–1554.
- [148] Aleksejevs, A. Electroweak radiative corrections for polarized Møller scattering at future 11 GeV JLab experiment / A. Aleksejevs, S. Barkanova, A. Ilyichev, V. Zykunov // Phys. Rev. D – 2010. – Vol. 82. – 093013, arXiv:1008.3355 [hep-ph].

- [149] Алексеев, А. Г. Прецизионный расчёт наблюдаемых поляризационного мёллеровского рассеяния: от энергии JLab до ILC / А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2012. – Т. 75. – С. 231–248.
- [150] Алексеев, А. Г. Оценка двухпетлевых радиационных эффектов в эксперименте MOLLER // А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, В. А. Зыкунов, Э. А. Кураев // ЯФ. – 2013. – Т. 76. – С. 942–954.
- [151] Bohm, M. Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ / M. Bohm, T. Sack // Z. Phys. C. – 1986. – Vol. 33. – P. 157–165.
- [152] Bohm, M. Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow \gamma Z^0$ / M. Bohm, Th. Sack // Z. Phys. C. – 1987. – Vol. 35. – P. 119–128.
- [153] Denner, A. Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow Z^0 Z^0$ / A. Denner, T. Sack // Nucl. Phys. B. – 1988. – Vol. 306. – P. 221–238.
- [154] Denner, A. The top width / A. Denner, T. Sack // Nucl. Phys. B. – 1991. – Vol. 358. – P. 46–58.
- [155] Bohm, M. Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ / M. Bohm [et al.] // Nucl. Phys. B. – 1988. – Vol. 304. – P. 463–499.
- [156] Denner, A. Leading electroweak logarithms at the loop / A. Denner, S. Pozzorini // Proc. of the 5th Int. Symposium on radiative corrections RADCOR-2000. – Carmel CA, USA, 2000. – P. 99–115. [hep-ph/0101213].
- [157] Denner, A. Radiative corrections to $ZZ \rightarrow ZZ$ / A. Denner, S. Dittmaier, T. Hahn // Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 56. – P. 117–134.
- [158] Denner, A. Radiative corrections to $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$ / A. Denner, T. Hahn // Nucl. Phys. B. – 1998. – Vol. 525. – P. 27–50.
- [159] Arbuzov, A. B. Radiative corrections to the process $\mu^+\mu^- \rightarrow H\gamma$ / A. B. Arbuzov [et al.] // 1998. – 8 p. – (Preprint / hep-ph/9803474v2).
- [160] Bystritskiy, Y. M. Radiative corrections in proton-antiproton annihilation to electron-positron and their application to the PANDA experiment / Y. M. Bystritskiy, V. A. Zykunov, A. Dbeyssi, M. Zambrana, F. Maas and E. Tomasi-Gustafsson // Eur. Phys. J. A. – 2020. – Vol. 56, №2, P. 58–74, arXiv:1911.04137 [hep-ph].

- [161] Berends, F.A. Hard photon corrections for the process $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ / F.A. Berends, K.J.F. Gaemers, R. Gastmans // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 57. – P. 381–400, Erratum-ibid. Nucl. Phys. B. – 1974. – Vol. 75. – P. 546.
- [162] Bohm, M. Radiative corrections to polarized e^-e^+ annihilation in the standard electroweak model / M. Bohm, W. Hollik // Nucl. Phys. B. – 1982. – Vol. 204. – P. 45–77.
- [163] Bohm, M. Model dependence of the electromagnetic corrections to lepton pair production in electron-positron collisions / M. Bohm, W. Hollik // Z. Phys. C. – 1984. – Vol. 23. – P. 31–38.
- [164] Novikov, V.A. On the Electroweak one loop corrections / V.A. Novikov, L.B. Okun, M.I. Vysotsky // Nucl. Phys. B. – 1993. – Vol. 397. – P. 35–83.
- [165] Montagna, G. TOPAZ0 4.0: A new version of a computer program for evaluation of deconvoluted and realistic observables at LEP1 and LEP2 / G. Montagna [et al.] // Comput. Phys. Commun. – 1999. – Vol. 117. – P. 278–289.
- [166] Bardin, D. ZFITTER v. 6.21: A semianalytical program for fermion pair production in e^+e^- annihilation / D. Bardin [et al.] // Comput. Phys. Commun. – 2001. – Vol. 133. – P. 229–395.
- [167] Bardin, D.Yu. Electroweak one-loop corrections to the decay of the charged vector boson / D.Yu. Bardin, S. Rieman, T. Rieman // Z. Phys. – 1986. – Vol. 32. – P. 121–125.
- [168] Andonov, A. Update of one-loop corrections for $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$, first run of SANC system / A. Andonov [et al.] // ЭЧАЯ. – 2003. – Т. 34, В. 5. – С. 1125–1195.
- [169] Andonov, A. SANCscope - v.1.00 / A. Andonov [et al.] // Comput. Phys. Commun. – 2006. – Vol. 174. – P. 481–517 [hep-ph/0411186]; SANC project website: <http://sanc.jinr.ru>, <http://pcphsanc.cern.ch>
- [170] Jadach, S. The Precision Monte Carlo event generator KK for two fermion final states in e^+e^- collisions / S. Jadach [et al.] // Comput. Phys. Commun. – 2000. – Vol. 130. – P. 260–325.

- [171] Jadach, S. Coherent exclusive exponentiation for precision Monte Carlo calculations / S. Jadach, B. F. L. Ward, and Z. Was. // Phys. Rev. D 63. – 2001. – 113009.
- [172] Bardin, D. Electroweak Working Group Report / D. Bardin [et al.] // 1997. – 158 p. (Preprint CERN-95-03A / hep-ph/9709229).
- [173] Møller, C. Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie / C. Møller // Annalen der Physik – 1932. – Vol. 406. – P. 531–585.
- [174] Redhead, M. Radiative corrections to Møller scattering / M. Redhead // Proc. R. Soc. – 1953. – Vol. A 220. – P. 219–231.
- [175] Половин, Р.В. Радиационные поправки к рассеянию электрона на электроне и позитроне / Р.В. Половин // ЖЭТФ. – 1956. – Т. 31. – С. 449–458.
- [176] Tsai, Yu. High-Energy Electron-Electron Scattering / Yu. Tsai // Phys. Rev. – 1960. – Vol. 120. – P. 269–286.
- [177] DeRaad Jr., L. Electron-Electron Scattering. III. Helicity cross section for Electron-Electron Scattering / L. DeRaad Jr., Y.J. Ng // Phys. Rev. D – 1975. – Vol. 11. – P. 1586–1590.
- [178] DeRaad Jr., L. Polarized Møller scattering / L. DeRaad Jr. // Phys. Rev. D – 1975. – Vol. 11. – P. 3328–3330.
- [179] Gastmans, R. Møller scattering and weak neutral currents / R. Gastmans, Y. Van Ham // Phys. Rev. D – 1974. – Vol. 10. – P. 3629–3633.
- [180] Кураев, Э.А. Процессы квантовой электродинамики с поперечнополяризованными $e^{\pm}e^{-}$ -пучками / Э.А. Кураев, М.Ю. Лельчук, В.С. Нанин, Ю.П. Пересунько // ЯФ. – 1980. – Т. 32. – С. 1059–1065.
- [181] Baier, V. Inelastic processes in high energy quantum electrodynamics / V. Baier, V. Fadin, V. Khoze, E. Kuraev // Phys. Rep. – 1981. – Vol. 78. – P. 294–393.
- [182] Swartz, M. Observation of target electron momentum effects in single-arm Møller polarimetry / M. Swartz [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. – 1995. – Vol. 363. – P. 526–537.

- [183] Steiner, P. A high-rate coincidence Møller polarimeter / P. Steiner [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. – 1998. – Vol. 419. – P. 105–120.
- [184] Band, H. A Møller polarimeter for high energy electron beams / H. Band [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. – 1997. – Vol. 400. – P. 24–33.
- [185] Hauger, M. A high-precision polarimeter / M. Hauger [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. – 2001. – Vol. 462. – P. 382–392.
- [186] Arrington, J. A variable energy Møller polarimeter at the MIT-Bates Linear Accelerator Center / J. Arrington [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A. – 1992. – Vol. 311. – P. 39–48.
- [187] Alexander, G. Møller scattering polarimetry for high-energy e^+e^- linear colliders / G. Alexander, I. Cohen // Nucl. Instrum. Meth. A. – 2002. – Vol. 486. – P. 552–567 [hep-ex/0006007].
- [188] Shumeiko, N.M. The QED lowest-order radiative corrections to the two polarized identical fermion scattering / N.M. Shumeiko, J.G. Suarez // J. Phys. G. – 2000. – Vol. 26. – P. 113–127.
- [189] Kumar, K.S. Precision low-energy weak neutral current experiments / K.S. Kumar [et al.] // Mod. Phys. Lett. A. – 1995. – Vol. 10. – P. 2979–2992.
- [190] Kumar, K.S. The E158 experiment / K.S. Kumar // Eur. Phys. J. A. – 2007. – Vol. 32. – P. 531–532.
- [191] Anthony, P.L. Observation of parity nonconservation in Møller scattering / SLAC E158 Collab.: P.L. Anthony [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92, 181602 [hep-ex/0312035v3].
- [192] Anthony, P.L. Precision measurement of the weak mixing angle in Møller scattering / SLAC E158 Collab.: P.L. Anthony [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 95, 081601. [hep-ex/0504049].
- [193] Erler, J. The Weak mixing angle at low energies / J. Erler and M. J. Ramsey-Musolf // Phys. Rev. D. – 2005. – Vol. 72. – 073003, [hep-ph/0409169].
- [194] The MOLLER Experiment. Measurement Of a Lepton Lepton Electroweak Reaction. An Ultra-precise Measurement of the Weak Mixing Angle using Møller Scattering. An MIE proposal to The

- United States Department of Energy [Electronic resource] / J. Benesch [et al.] – The MOLLER Collaboration, 2011. – Mode of access: http://hallaweb.jlab.org/12GeV/Moller/downloads/DOE_Proposal/DOE_Moller.pdf – Date of access: 12.09.2011.
- [195] Ramsey-Musolf, M.J. Low Energy Precision Test of Supersymmetry / M.J. Ramsey-Musolf and S. Su // Phys. Rept. – 2008. – Vol. 456. – P. 1–88, [arXiv:hep-ph/0612057].
- [196] Feng, J.L. Physics at e^-e^- colliders / J.L. Feng // Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – Vol. 15. – P. 2355–2364, [arXiv:hep-ph/0002055].
- [197] Czarnecki, A. Electroweak radiative corrections to polarized Møller scattering asymmetries / A. Czarnecki, W. Marciano // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 53. – P. 1066–1072.
- [198] Зельдович, Я. Несохранение четности в первом порядке по константе слабого взаимодействия в рассеянии электронов и другие эффекты / Я. Зельдович // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 36. – С. 964–966.
- [199] Petriello, F.J. Radiative corrections to fixed target Møller scattering including hard bremsstrahlung effects / F.J. Petriello // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67, 033006 [hep-ph/0210259].
- [200] Kolomensky, Yu. Electroweak radiative corrections to parity-violating asymmetry in Møller scattering / Yu. Kolomensky, N. Shumeiko, J. Suarez, V. Zykunov // Int. J. Modern Phys. A. – 2005. – Vol. 20. – P. 7365–7374.
- [201] Ahmadov, A.I. One-loop chiral amplitudes of Møller scattering process / A.I. Ahmadov, Yu.M. Bystritskiy, E.A. Kuraev, A.N. Ilyichev, V.A. Zykunov // Eur. Phys. J. C – 2012. – Vol. 72:1977. – P. 1–8, arXiv:1201.0460 [hep-ph].
- [202] Aleksejevs, A.G. Double-box contributions to Møller scattering in the Standard Model / A.G. Aleksejevs, S.G. Barkanova, Yu.M. Bystritskiy, A.N. Ilyichev, E.A. Kuraev, V.A. Zykunov // Eur. Phys. J. C – 2012. – Vol. 72. – P. 2249–2269, arXiv:1202.0378 [hep-ph].
- [203] Aleksejevs, A. One-loop electroweak corrections for polarized Moller scattering at different renormalization schemes and conditions / A. Aleksejevs, S. Barkanova, A. Ilyichev, Yu. Kolomensky, V. Zykunov

- // Physics of Particles and Nuclei – 2013. – Vol. 44. – P. 161–174, arXiv:1010.4185 [hep-ph].
- [204] Aleksejevs, A. NNLO Electroweak Corrections for Polarized Møller Scattering: One-Loop Insertions to Boxes / A. Aleksejevs, S. Barkanova, Yu. Bystritskiy, E. Kuraev, V. Zykunov // Physics of Particles and Nuclei Letters – 2015. – Vol. 12. – P. 645–656, arXiv:1504.03560 [hep-ph].
- [205] Aleksejevs, A. Two-loop electroweak vertex corrections for polarized Møller scattering / A. G. Aleksejevs, S. G. Barkanova, Yu. M. Bystritskiy, E. A. Kuraev, V. A. Zykunov // Physics of Particles and Nuclei Letters – 2016. – Vol.13. – P. 310–317, arXiv:1508.07853 [hep-ph]
- [206] Hahn, T. Automated one-loop calculations in four and D dimensions / T. Hahn, M. Perez-Victoria // Comput. Phys. Commun. – 1999. – Vol. 118. – P. 153–165, hep-ph/9807565.
- [207] Bardin, D.Yu. Electroweak radiative corrections to deep inelastic scattering at HERA. Neutral current scattering / D.Yu. Bardin [et al.] // Z. Phys. – 1989. – Vol. 42. – P. 679–692.
- [208] Акушевич, И. В. Однопетлевая электрослабая поправка к глубоко-неупругому рассеянию поляризованных частиц / И. В. Акушевич, А. Н. Ильичев, Н. М. Шумейко // ЯФ. – 1995. – Т. 58. – С. 2029–2040.
- [209] Akushevich, I. Radiative electroweak effects in deep inelastic scattering of polarized leptons by polarized nucleons / I. Akushevich, A. Ilyichev, N. Shumeiko // J. Phys. G. – 1998. – Vol. 24. – P. 1995–2007.
- [210] Акушевич, И. В. О приближенном вычислении радиационных поправок первого и второго порядка к глубоконеупругому рассеянию на поляризованных ядрах / И. В. Акушевич, А. Н. Ильичев, Н. М. Шумейко // ЯФ. – 1998. – Т. 61. – С. 2268–2278.
- [211] Böhm, M. Radiative corrections to neutral current deep inelastic lepton nucleon scattering at HERA energies / M. Böhm, H. Spiesberger // Nucl. Phys. B. – 1987. – Vol. 294. – P. 1081–1110.
- [212] Bardin, D.Yu. Electroweak Radiative Corrections to Deep Inelastic Scattering at HERA. Charged Current Scattering / D.Yu. Bardin [et al.] // Dubna, 1989. – 16 p. – (Preprint / JINR: E2-89-145).

- [213] Böhm, M. Radiative corrections to charged current deep inelastic electron-proton scattering at HERA / M. Böhm, H. Spiesberger // Nucl. Phys. B. – 1988. – Vol. 304. – P. 749–759.
- [214] Shumeiko, N.M. Investigation of the proton spin by electron-proton colliders / N.M. Shumeiko, S.I. Timoshin, V.A. Zykunov // J. Phys. G. – 1997. – Vol. 23. – P. 1593–1608.
- [215] Бардин, Д.Ю. О радиационных поправках к процессу $\nu N \rightarrow \nu N$ / Д.Ю. Бардин, В.А. Докучаева // ЯФ. – 1981. – Т. 36. – С. 482–486.
- [216] Kuzhir, P.P. The one-loop electroweak correction to the processes of deep inelastic scattering of (anti)neutrino on polarized target / P.P. Kuzhir, N.M. Shumeiko // Proc. of X International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. – Zvenigorod, 1995. – P. 207–210.
- [217] Зыкунов, В.А. Электрослабая поправка к поляризованному глубоко-неупругому рассеянию (анти)нейтрино на нуклонах. Заряженный слабый ток / В.А. Зыкунов, С.И. Тимошин, Н.М. Шумейко // ЯФ. – 1997. – Т. 60. – С. 1415–1424.
- [218] Зыкунов, В.А. Электрослабая поправка к поляризованному глубоконеупругому рассеянию (анти)нейтрино на нуклонах. Нейтральный слабый ток / В.А. Зыкунов, С.И. Тимошин, Н.М. Шумейко // ЯФ. – 1999. – Т. 62. – С. 723–727.
- [219] Berends, F.A. Hard photon effects in W^\pm and Z_0 / F.A. Berends, R. Kleiss // Z. Phys. C. – 1985. – Vol. 27. – P. 365–372.
- [220] Wackerth, D. Electroweak radiative corrections to resonant charged gauge boson production / D. Wackerth, W. Hollik // Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 55. – P. 6788–6818.
- [221] Baur, U. Electroweak radiative corrections to W boson production in hadronic collisions / U. Baur, S. Keller, D. Wackerth // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 59, 013002. – P. 1–38. [hep-ph/9807417].
- [222] Dittmaier, S. Electroweak radiative corrections to W-boson production at hadron colliders / S. Dittmaier, M. Kramer. – DESY, 2001. – 37 P. – (Preprint / 01-121). [hep-ph/0109062v1].

- [223] Arbuzov, A. One-loop corrections to the Drell–Yan process in SANC. (I). The charged current case / A. Arbuzov [et al.] // Eur. Phys. J. C. – 2006. – Vol. 46. – P. 407–412. (Erratum-ibid. Eur. Phys. J. C. – 2007. – Vol. 50. – P. 505.)
- [224] Zykunov, V.A. Electroweak corrections to the observables of W -boson production at RHIC / V.A. Zykunov // Eur. Phys. J. direct C. – 2001. – Vol. 9. – P. 1–26. [hep-ph/0107059].
- [225] Зыкунов, В. А. Радиационные поправки к наблюдаемым величинам рождения W -бозонов в столкновениях поляризованных адронов / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2003. – Т. 66. – С. 910–924.
- [226] Mosolov, V. A. Electromagnetic effects in Drell–Yan processes / V. A. Mosolov, N. M. Shumeiko // Nucl. Phys. B. – 1981. – Vol. 186, P. 397–411.
- [227] Мосолов, В. А. Электромагнитные эффекты в процессах Дрелла – Яна / В. А. Мосолов, Н. М. Шумейко // Доклады АН БССР. – 1981. – Т. XXV, № 3. – С. 221–224.
- [228] Сороко, А. В. Об электромагнитных поправках к процессам Дрелла – Яна в кварк-партонной модели / А. В. Сороко, Н. М. Шумейко // ЯФ. – 1990. – Т. 52. – С. 514–523.
- [229] Baur, U. Electroweak radiative corrections to neutral-current Drell–Yan process at hadron colliders / U. Baur [et al.] // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65, 033007, P. 1–19. [hep-ph/0108274].
- [230] Baur, U. QED radiative corrections to Z boson production and the forward-backward asymmetry at hadron colliders / U. Baur, S. Keller, W. K. Sakumoto // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 57. – P. 199–215 [hep-ph/9707301v1].
- [231] Baur, U. Weak boson emission in hadron collider processes / U. Baur // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 75, 013005. [hep-ph/0611241].
- [232] Buttar, C. Standard Model Handles and Candles Working Group: Tools and Jets Summary Report / C. Buttar [et al.] // Proc. of Les Houches 2007, Physics at TeV colliders, 121 p., arXiv:0803.0678 [hep-ph].

- [233] Arbuzov, A. One-loop corrections to the Drell–Yan process in SANC. (II). The neutral current case / A. Arbuzov [et al.] // Eur. Phys. J. C. – 2008. – Vol. 54. – P. 451–460, arXiv:0711.0625 [hep-ph].
- [234] Зыкунов, В. А. Радиационные поправки к процессу Дрелла – Яна при больших инвариантных массах дилептонной пары / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2006. – Т. 69. – С. 1557–1571.
- [235] Zykunov, V. A. Weak radiative corrections to Drell–Yan process for large invariant mass of di-lepton pair / V. A. Zykunov // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 75, 073019, P. 1–11. [arXiv:hep-ph/0509315].
- [236] Зыкунов, В. А. Полный расчёт электрослабых поправок к процессу Дрелла – Яна для коллайдера LHC / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2008. – Т. 71. – С. 757–770.
- [237] Зыкунов, В. А. Электрослабые поправки лидирующего порядка к процессу Дрелла – Яна в эксперименте CMS на LHC / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2010. – Т. 73. – С. 1617–1637.
- [238] Shumeiko, N. M. Two-photon creation of low-mass e^+e^- pairs in $p\bar{p}$ collisions at Tevatron energy / N. M. Shumeiko, A. V. Soroko, P. M. Starovoitov // J. Phys. G. – 2001. – Vol. 27. – P. 1735–1742.
- [239] Denner, A. One loop leading logarithms in electroweak radiative corrections. 1. Results / A. Denner, S. Pozzorini // Eur. Phys. J. C. – 2001. – Vol 18. – P. 461–480, [hep-ph/0010201].
- [240] Denner, A. One loop leading logarithms in electroweak radiative corrections. 2. Factorization of collinear singularities / A. Denner, S. Pozzorini // Eur. Phys. J. C. – 2001. – Vol 21. – P. 63–79, [hep-ph/0104127].
- [241] Jantzen, B. Two-loop electroweak logarithms in four-fermion processes at high energy / B. Jantzen [et al.] // Nucl. Phys. B. – 2005. – Vol. 731. – P. 188–212, (Erratum-ibid. Nucl. Phys. B. – 2006. – Vol. 752. – P. 327–328, [hep-ph/0509157].
- [242] Denner, A. Two-loop electroweak next-to-leading logarithmic corrections to massless fermionic processes / A. Denner, B. Jantzen, S. Pozzorini // Nucl. Phys. B. – 2007. – Vol. 761. – P. 1–62, [hep-ph/0608326].

- [243] Carloni Calame, C.M. Multiple photon corrections to the neutral-current Drell-Yan process / C.M. Carloni Calame [et al.] // JHEP. – 2005. – Vol. 0505. – P. 19–35, [hep-ph/0502218]. Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 718. – P. 752–772, arXiv:1207.3973 [hep-ex]
- [244] Hamberg, R. A Complete calculation of the order α_s^2 correction to the Drell-Yan K factor / R. Hamberg, W.L. van Neerven, T. Matsuura // Nucl.Phys. B. – 1991. – Vol. 359. – P. 343–405, Erratum-ibid. – 2002. – Vol. 644. – P. 403–404.
- [245] Baer, H. A Next-to-leading Logarithm Calculation Of Direct Photon Production / H. Baer, J. Ohnemus, J. F. Owens // Phys. Rev. D. – 1990. – Vol. 42. – P. 61–71; Giele, W.T. Higher order corrections to jet cross-sections in e^+e^- annihilation / W.T. Giele, E.W. Nigel Glover // Phys. Rev. D. – 1992. – Vol. 46. – P. 1980–2010.
- [246] Anastasiou, C. Dilepton rapidity distribution in the Drell-Yan process at NNLO in QCD / C. Anastasiou, L.J. Dixon, K. Melnikov, F. Petriello // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91. – P. 182002; High precision QCD at hadron colliders: Electroweak gauge boson rapidity distributions at NNLO / Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 69. – P. 094008; Melnikov, K. Electroweak gauge boson production at hadron colliders through $O(\alpha_s^2)$ / K. Melnikov, F. Petriello // Phys. Rev. D. – 2006. Vol. 74. – P. 114017.
- [247] Catani, S. Vector boson production at hadron colliders: A Fully exclusive QCD calculation at NNLO / S. Catani [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – P. 082001, arXiv:0903.2120 [hep-ph].
- [248] Arbuzov, A.B. Inverse bremsstrahlung contributions to Drell-Yan like processes / A.B. Arbuzov, R.R. Sadykov // JETP. – 2008. – Vol. 106. – P. 488–494, arXiv:0707.0423 [hep-ph].
- [249] Baer, H. $O(\alpha_s)$ corrections to observables from $p\bar{p} \rightarrow W^+X \rightarrow e^+\nu X$ / H. Baer, M. Reno // Phys. Rev. D. – 1991. – Vol. 43. – P. 2892–2899.
- [250] Andonov, A. NLO QCD corrections to Drell-Yan processes in the SANC framework / A. Andonov [et al.] // Phys. Atom. Nucl. – 2010. – Vol. 73. – P. 1761–1769, arXiv:0901.2785 [hep-ph].

- [251] Balossini, G. Electroweak & QCD corrections to Drell Yan processes / G. Balossini [et al.] // *Acta Phys. Polon. B.* – 2008. – Vol. 39. – P. 1675–1684, arXiv:0805.1129 [hep-ph].
- [252] Зыкунов, В. А. КХД-поправки к процессу Дрелла–Яна для коллайдера ЛHC. Вершинные функции и глюонное тормозное излучение / В. А. Зыкунов // *ЯФ.* – 2010. – Т. 73. – С. 1269–1284.
- [253] Зыкунов, В. А. Вклад инверсного глюонного излучения в КХД-поправки к процессу Дрелла–Яна для экспериментов на ЛHC / В. А. Зыкунов // *ЯФ.* – 2011. – Т. 74. – С. 72–84.
- [254] Zykunov, V.A. Electroweak and QCD Radiative Corrections to Drell–Yan Process for Experiments at the Large Hadron Collider / V.A. Zykunov // *J. Phys. C. G.* – 2014. – Vol. 523. 012053 – P. 1–9.
- [255] Bhabha, H. J. The Scattering of Positrons by Electrons with Exchange on Dirac’s Theory of the Positron / H. J. Bhabha // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1935. – Vol. 154, no. 881. – P. 195–206.
- [256] Balossini, G. Mini-review on Monte Carlo programs for Bhabha scattering / G. Balossini, C. Bignamini, C.M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, and F. Piccinini // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* – 2008. – Vol. 183. – P. 168–173; arXiv: 0806.4909 [hep-ph].
- [257] Strubbe, H. Manual for Schoonschip: A CDC 6000 / 7000 program for symbolic evaluation of algebraic expressions / H. Strubbe // *Comput. Phys. Commun.* 8. – 1974. – P. 1–30.
- [258] Kuipers, J. FORM version 4.0 / J. Kuipers, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren, and J. Vollinga // *Comput. Phys. Commun.* 184. – 2013. – 1453, [arXiv:1203.6543 [cs.SC]].
- [259] Amsler, C. Review of Particle Physics / C. Amsler [et al.]. // *Phys. Lett. B.* – 2008. – Vol. 667. – P. 1–1340.
- [260] Jegerlehner, F. Hadronic contributions to the photon vacuum polarization and their role in precision physics / F. Jegerlehner // *J. Phys. G.* – 2003. – Vol. 29. – P. 101–110, [hep-ph/0104304].
- [261] Eidelman, S. Hadronic contributions to $(g - 2)$ of the leptons and to the effective fine structure constant $\alpha(M_Z^2)$ / S. Eidelman, F. Jegerlehner // *Z. Phys. C.* – 1995. – Vol. 67. – P. 585–602.

- [262] Actis, S. Quest for precision in hadronic cross sections at low energy: Monte Carlo tools vs. experimental data / S. Actis [et al.] // Eur. Phys. J. C. – 2010. – Vol. 66. – P. 585–686.
- [263] Зыкунов, В.А. Радиационное мёллеровское рассеяние с поляризованными частицами / В.А. Зыкунов // ЯФ. – 2015. – Т. 78. – С. 489–498.
- [264] Lepage, P.G. A new algorithm for adaptive multidimensional integration / P.G. Lepage // J. Comput. Phys. – 1978. – Vol. 27. – P. 192–211.
- [265] Ishikawa, T. GRACE manual: automatic generation of tree amplitudes in standard models. Version 1.0 / T. Ishikawa [et al.] MINAMI-TATEYA Group Collab. // KEK report; 92–19.
- [266] Bardin, D. One-loop electroweak radiative corrections to polarized Bhabha scattering / D. Bardin [et al.] // Phys. Rev. D 98 №1. – 2018. – 013001, arXiv:1801.00125 [hep-ph].
- [267] Aleksejevs, A. Quadratic electroweak corrections for polarized Møller scattering / A. Aleksejevs, S. Barkanova, Y. Kolomensky, E. Kuraev, V. Zykunov // Phys. Rev. D – 2012. – Vol. 85. – 013007, arXiv:1110.1750 [hep-ph].
- [268] Cuypers, F. Polarization and the weak mixing angle in high energy $e^{\pm}e^{-}$ collisions / F. Cuypers, P. Gambino // Phys. Lett. B. – 1996. – Vol. 388. – P. 211–218.
- [269] Czarnecki, A. Polarized Møller scattering asymmetries / A. Czarnecki, W. Marciano // Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – Vol. 15. – P. 2365–2376, [hep-ph/0003049].
- [270] Chew, G. Unstable particles as targets in scattering experiments / G. Chew, F. Low // Phys. Rev. – 1959. – Vol. 113. – P. 1640–1648.
- [271] Зыкунов, В. А. Новый метод учета радиационных событий в инклюзивном эксперименте MOLLER // В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2017. – Т. 80. – С. 388–395.
- [272] 't Hooft, G. Scalar one-loop integrals / G. 't Hooft, M. Veltman // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 153. – P. 365–401.
- [273] Skrzypek, M. Leading logarithmic calculations of QED corrections at LEP / M. Skrzypek // Acta Phys. Polon. B. – 1992. – Vol. 23. – P. 135–172.

- [274] Грибов, В.Н. Deep inelastic ep -scattering in perturbation theory // В.Н. Грибов, Л.Н. Липатов // ЯФ. – 1972. – Т. 15. – С. 438–450; Dokshitzer, Yu. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics / Yu. Dokshitzer // Sov. Phys. JETP. – 1977. – Vol. 46. – P. 641–653; Altarelli, G. Asymptotic Freedom in Parton Language / G. Altarelli, G. Parisi // Nucl. Phys. B. – 1977. – Vol. 126. – P. 298–331.
- [275] Aleksejevs, A.G. Low and High Energy Asymptotic Behavior of Electroweak Corrections in Polarized $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Process // A. G. Aleksejevs, S. G. Barkanova, Yu. M. Bystritskiy, V. A. Zykunov // Can. J. Phys. – 2018. – V. 96, №4. – P. 445–453.
- [276] Алексеев, А. Г. Техника учета излучения жестких фотонов в четырехфермионном процессе // А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2016. – Т. 79. – С. 20–36.
- [277] Berends, F. A. Higher Order Radiative Corrections at LEP Energies / F. A. Berends, W. L. van Neerven, and G. J. H. Burgers // Nucl. Phys. B 297. – 1988. – P. 429; Erratum: Nucl. Phys. B 304. – 1988. – P. 921.
- [278] Зыкунов, В. А. Двухпетлевые радиационные поправки конечного состояния к процессу Дрелла–Яна на LHC в мягкофотонном приближении / В. А. Зыкунов // ЯФ. – 2019. – Т. 82. – С. 177–184.
- [279] Chatrchyan, S. Forward-Backward Asymmetry of Drell–Yan Lepton Pairs in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / CMS Collaboration // Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 718 P. 752–772. CMS-EWK-11-004, CERN-PH-EP-2012-187, e-Print: arXiv:1207.3973.
- [280] Gao, J. CT10 next-to-next-to-leading order global analysis of QCD / Jun Gao [et al.] // Phys. Rev. D 89. – 2014. – 033009, arXiv:1302.6246 [hep-ph]; Lai, H.L. New parton distributions for collider physics / H.L. Lai [et al.] // arXiv:1007.2241 [hep-ph].
- [281] Harland-Lang, L.A. Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs / L.A. Harland-Lang, A.D. Martin, P. Motylinski, R.S. Thorne // Eur. Phys. J. C 75. – 2015. – P. 204, arXiv:1412.3989 [hep-ph].

- [282] Bayatian, G.L. CMS technical design report, volume II: Physics performance / CMS Collaboration // J. Phys. G. – 2007. – Vol. 34. – P. 995–1579.
- [283] de Rújula, A. Radiative corrections to high-energy neutrino scattering / A. de Rujula, R. Petronzio, A. Savoy-Navarro // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 154. – P. 394–426.
- [284] Pumplin, J. New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis / J. Pumplin [et al.] // JHEP. – 2002. – Vol. 0207. – P. 12–46, [hep-ph/0201195].
- [285] Carloni Calame, C. M. Precision electroweak calculation of the production of a high transverse-momentum lepton pair at hadron colliders / C.M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, A. Vicini // JHEP. – 2007. – Vol. 10. – P. 109, arXiv:0710.1722.
- [286] Дыдышко, Е. В. Электрослабые поправки высших порядков для процесса Дрелла–Яна на LHC / Е. В. Дыдышко, В. Л. Ермольчик, В. А. Зыкунов, Х. Г. Суарес, С. В. Шматов // ЭЧАЯ. – 2018. – Т. 49. – С. 1267–1272.
- [287] Gavin, R. FEWZ 2.0: A code for hadronic Z production at next-to-next-to-leading order / R. Gavin, Ye Li, F. Petriello, S. Quackenbush // Comput. Phys. Commun. – 2011. – Vol. 182. – P. 2388, arXiv:1011.3540 [hep-ph].
- [288] Buhayeuskaya, M. P. NLO radiative corrections to the Drell – Yan process at LHC Run3 / M. P. Buhayeuskaya and V. A. Zykunov // J. Phys.: Conf. Series. – 2020. – Vol. 1435, 012029
- [289] Окунь, Л. Б. Понятие массы (Масса, энергия, относительность) / Л. Б. Окунь // УФН. – 1989. – Т. 158. – С. 511–530.
- [290] Spence, W. An essay on the theory of the various orders of logarithmic transcendents / W. Spence. – London : London and Edinburgh, 1809.
- [291] Passarino, G. One Loop Corrections for e^+e^- Annihilation Into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg Model / G. Passarino and M. J. G. Veltman // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 160. – P. 151–207.
- [292] Rosner, J.L. Forward-backward asymmetries in hadronically produced lepton pairs / J. L. Rosner // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 54. – P. 1078–1082, hep-ph/9512299.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

AC – approximate calculation
BSE – boson self energies
CL – collinear logarithms
SL – Sudakov logarithms
EC – exact calculation
EWC – electroweak radiative corrections
FSR – final state radiation
ISR – initial state radiation
NLO – next-to-leading order
NNLO – next-to-next-to-leading order
QCD – quantum chromodynamics
QED – quantum electrodynamics
QS – quark singularity
SM – standard model
ГНР – глубоконеупругое рассеяние
ИКР – инфракрасная расходимость
КПМ – кварк-партоновая модель
КХД – квантовая хромодинамика
КЭД – квантовая электродинамика
МР – мёллеровское рассеяние
НФ – Новая физика
РП – радиационные(ая) поправки(а)
РУД – ренормализационные условия Деннера
РУХ – ренормализационные условия Холлика
СМ – Стандартная модель электрослабых и сильных взаимодействий
ТИ – тормозное излучение
УРП – ультрарелятивистское приближение
ЭСР – электрослабые(ая) поправки(а)
ЭМП – электромагнитные(ая) поправки(а)

Научное издание

Зыкунов Владимир Александрович

**ПЕРТУРБАТИВНЫЕ РАСЧЁТЫ
В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ**

Подписано в печать 26.03.2020. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 16,28.
Уч.-изд. л. 17,8. Тираж 100 экз. (1-й з-д 1–50). Заказ 174.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

“Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель

Для заметок

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для заметок

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ