

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. И. АЛИХАНОВ, А. А. БОЧВАР, А. П. ВИНОГРАДОВ, Н. А. ВЛАСОВ (зам. главного редактора), И. Н. ГОЛОВИН, Н. А. ДОЛЛЕЖАЛЬ, А. П. ЗЕФИРОВ, В. Ф. КАЛИНИН, Н. А. КОЛОКОЛЬЦОВ (зам. главного редактора), А. К. КРАСИН, А. И. ЛЕЙПУНСКИЙ, В. В. МАТВЕЕВ, М. Г. МЕЩЕРЯКОВ, М. Д. МИЛЛИОНЩИКОВ (главный редактор), П. Н. ПАЛЕЙ, Д. Л. СИМОНЕНКО, В. И. СМЕРНОВ, В. С. ФУРСОВ, В. Б. ШЕВЧЕНКО.

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

- В. И. Баранов. Развитие радиогеологии в СССР . . . 419
- Я. Богач, П. Квиттнер, Э. Сабо. Определение некоторых примесей в кремнии высокой чистоты методом активационного анализа без разрушения образцов . . . . . 421
- Я. Божик, Е. Кубовский, С. Лягак. Измерение материального параметра критической сборки «Анна» . . . . . 425
- Н. Г. Ваданина, Ю. П. Сайков. Критерий сравнения состояния твэлов активной зоны реактора . . . . . 429
- Ю. В. Чушкин, Е. Ф. Давыдов, В. Н. Сюзьв, Т. М. Гусева, В. В. Колесов, М. Д. Дерибизов. Радиационная стойкость пластинчатых твэлов реактора СМ-2 . . . . . 432
- Б. Г. Егызаров, В. А. Зюбка, А. И. Новиков. Выбор оптимальной аналитической методики при инструментальном активационном анализе . . . . . 435
- В. И. Субботин, Д. М. Овечкин, Д. Н. Сорокин, А. П. Кудрявцев. Теплоотдача при кипении натрия в условиях свободной конвекции . . . . . 437
- В. П. Бобков, М. Х. Ибрагимов, В. И. Субботин. Расчет коэффициента турбулентного переноса тепла при течении жидкости в трубе . . . . . 442
- В. Я. Кудяков, М. В. Смирнов, Н. Я. Чукреев, Ю. В. Посохин. Образование двухвалентного тория в среде расплавленного хлористого калия . . . . . 448
- Н. М. Зуева, Л. С. Соловьев. Равновесие и устойчивость плазмы в аксиально симметричных тороидальных системах . . . . . 453

ПЕРСОНАЛИЯ

Исаак Константинович Кикоин (к 60-летию со дня рождения) . . . . . 460

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ

Н. Е. Врежнева, Ю. И. Капшанинов, С. Н. Озипанер. Изучение кинетики электролитического выделения гидроокисных осадков редкоземельных элементов . . . . . 462

- А. С. Тшечкин. Вычислительное устройство для обработки  $\gamma$ -спектров . . . . . 462
- В. Е. Дроздов, Ю. С. Рябухин. К расчету мощностей поглощенных доз полого цилиндрического облучателя с неравномерным распределением активности . . . . . 463
- М. Задубан, Л. Медвидь. Определение суммарной  $\beta$ -активности долгоживущих продуктов деления при помощи  $K^{40}$  . . . . . 464
- Г. П. Березина, Я. Б. Файнберг, А. К. Березин. Экспериментальное исследование потоков быстрых ионов, образующихся в системе пучок — плазма . . . . . 465

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

- М. А. Сарычев, Ю. Н. Алексеенко, Н. В. Звонов, В. И. Буйницкая, И. В. Рогожкин, А. А. Баташов, Ю. В. Александров. Распределение потока тепловых нейтронов в различных отражателях с каналами . . . . . 467
- Т. М. Гусева, Е. Ф. Давыдов, В. Н. Сюзьв, Ю. В. Чушкин. О возможном характере изменения объема тепловыделяющих композиций при твердом распухании . . . . . 469
- Е. М. Лобанов, Н. В. Зиновьев. Определение необходимой статистики при бескорреляционной расшифровке данных активационного анализа . . . . . 471
- С. Н. Вотвинов, Т. М. Гусева, В. И. Клименков. О радиационной стойкости сплава циркония с 1% ниобия в условиях работы реактора СМ-2 . . . . . 473
- А. Э. Шемьл-заде. О сухих выпадениях продуктов ядерных испытаний . . . . . 474
- К. П. Захарова, Г. М. Иванов, В. В. Куличенко, Н. В. Крылова, Ю. В. Сорокин, М. И. Федорова. Об использовании тепла химических реакций для термической переработки жидких радиоактивных отходов . . . . . 475

225381/м



п

## Равновесие и устойчивость плазмы в аксиально симметричных тороидальных системах

Н. М. ЗУЕВА, Л. С. СОЛОВЬЕВ

УДК 533.9

В настоящей работе рассматривается равновесие и устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем в аксиально симметричных системах типа «Токамак». Рассмотрение проводится в рамках магнитогидродинамического приближения для идеально проводящей плазмы. При этом равновесная магнитная конфигурация представляет собой систему вложенных тороидальных магнитных поверхностей, окружающих круговую магнитную ось  $r = R$ . В качестве исследуемых равновесных конфигураций взяты магнитные конфигурации с заданной внешней магнитной поверхностью  $\Sigma$ . Рассмотрены три случая, когда поверхность  $\Sigma$  является тороидальной поверхностью эллиптического, полуэллиптического и прямоугольного поперечного сечения. В таких системах гидромагнитная устойчивость плазмы оказывается существенно зависящей от эллиптичности  $\epsilon$  сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси и относительного изменения продольного магнитного поля  $\delta B/B_0$  по сечению плазмы.

При рассмотрении равновесных плазменных конфигураций используется метод функций потока [1], существование которых обусловлено наличием аксиальной симметрии задачи. При исследовании устойчивости применяется необходимый критерий локальной устойчивости [2–5] для произвольной геометрии плазмы, который, как показано в работе [6], является необходимым и достаточным при условии квазиоднородности магнитного поля. В настоящей работе изучается влияние тороидальности и формы поперечного сечения плазменного тора на его равновесие и устойчивость. Рассматривается случай, когда «меридиональные» сечения плазменного тора симметричны относительно «экваториальной» плоскости  $z = 0$ , так что нормальные сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси представляют собой в общем случае эллипсы, которые ориентированы вдоль или поперек оси симметрии  $z$ .

### Общие соотношения

**Равновесие.** Равновесные плазменные конфигурации, определяемые уравнениями

$$\nabla p = [j\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

( $p$  — давление плазмы,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\mathbf{B}$  — напряженность магнитного поля), при условии аксиальной симметрии задачи удобно описывать в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  с помощью функций  $\psi = rA_\varphi$  ( $A_\varphi$  — компонента векторного потенциала),  $I_A(\psi) = rB_\varphi$  и  $p(\psi)$ . Компоненты векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  при этом равны [1]:

$$B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_\varphi = \frac{I_A}{r}, \quad (2)$$

$$j_z = \frac{I_A'}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad j_r = -\frac{I_A'}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad j_\varphi = rp' + \frac{I_A I_A'}{r}, \quad (3)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\psi$ . Функция потока  $\psi(r, z)$  удовлетворяет уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r^2 p' - I_A I_A'. \quad (4)$$

При заданных функциях  $p' \equiv -a(\psi)$  и  $I_A I_A' \equiv -R^2 b(\psi)$  решение уравнения (4) определяет систему магнитных поверхностей равновесной конфигурации  $\psi(r, z) = \text{const}$ .

Представим  $p(\psi)$  и  $I_A^2(\psi)$  в виде разложений по степени  $\psi$  в окрестности магнитной оси  $r = R, z = 0$ :

$$p = p_0 + p'(\psi - \psi_0) + \dots;$$

$$I_A^2 = I_{A0}^2 + 2I_A I_A'(\psi - \psi_0) + \dots, \quad (5)$$

где  $\psi_0 = \psi(R, 0)$ . Пусть давление  $p(\psi)$  обращается в нуль на некоторой магнитной поверхности  $\psi_\sigma$ , тогда согласно выражениям (2) и (5)

$$\frac{b}{a} = -\frac{I_{A\sigma}^2 - I_{A0}^2}{2p_0 R^2} = -\frac{B_\sigma^2 - B_0^2}{2p_0}. \quad (6)$$

Таким образом, отношение  $b/a$  является характеристикой диамагнетизма плазмы. Введем обозначения

$$\beta_0 = \frac{2p_0}{B_0^2}; \quad \delta B^2 = B_\sigma^2 - B_0^2; \quad N = \frac{j_0 R}{B_0} \quad (7)$$

(индекс нуль означает, что данная величина берется на магнитной оси), тогда из уравнений (3), (6) получим

$$\frac{b}{a} \beta_0 = -\frac{\delta B^2}{B_0^2}; \quad (8)$$

$$\frac{b}{a} \left( \frac{\psi_\sigma - \psi_0}{aR^4} \right) N^2 + \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^2 \frac{\delta B^2}{2B_0^2} = 0. \quad (9)$$

Исключив из этих уравнений отношения  $b/a$ , при известном  $\psi(r, z)$  получим уравнение равновесия, связывающее величины  $\beta_0$ ,  $N^2$  и  $\delta B^2/B_0^2$ .

Решение уравнения (4) с точностью до кубических по  $z$  и  $r - R$  членов не зависит от производных функций  $a(\psi)$  и  $b(\psi)$  и определяется выражением

$$\psi = \frac{a+b}{1+\varepsilon^2} \left[ \frac{R^2}{2} \left( 1 + c \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) z^2 + \frac{\varepsilon^2}{8} (r^2 - R^2)^2 - \frac{(1+\varepsilon^2)b - (1-c)(a+b)}{24R^2(a+b)} (r^2 - R^2)^3 \right]. \quad (10)$$

Сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси  $r = R$ ,  $z = 0$  имеют вид эллипса с отношением полуосей  $l_z/l_r = \varepsilon$ . Для нахождения параметров  $\varepsilon$  и  $c$  необходимо решить уравнение (4) с заданной формой граничной магнитной поверхности  $\psi_s$ , после чего  $\varepsilon$  и  $c$  можно определить через производные  $\psi$  на магнитной оси  $r = R$ :

$$\varepsilon^2 = \frac{\partial^2 \psi / \partial r^2}{\partial^2 \psi / \partial z^2}; \quad c = \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial^3 \psi / \partial z \partial r^2}{\partial^2 \psi / \partial z^2}. \quad (11)$$

При этом положение магнитной оси определяется равенствами  $\partial \psi / \partial r = 0$ ,  $\partial \psi / \partial z = 0$ .

**Устойчивость.** Для исследования устойчивости используем критерий локальной устойчивости [2-4], который можно представить в виде [5]

$$\left\langle \frac{S}{2} + \frac{jB}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \Omega + \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \geq 0. \quad (12)$$

Как показано в работе [6], критерий (12) является необходимым и достаточным условием гидромагнитной устойчивости для плазменных конфигураций, удерживаемых квазиоднородным магнитным полем\*. Входящие в выражение (12) величины  $\Omega$  и  $S$ , как и  $p$ , зависят только от текущего объема  $V$  системы вложенных магнитных поверхностей и определяются формулами

$$\dot{p} = \dot{I}\dot{\phi} - \dot{J}\dot{\chi}, \quad \Omega = \dot{I}\ddot{\phi} - \dot{J}\ddot{\chi}, \quad S = \dot{\chi}\ddot{\phi} - \dot{\phi}\ddot{\chi}, \quad (13)$$

где  $\phi$  и  $\chi$  — продольный и поперечный магнитные потоки соответственно;  $J$  и  $I$  — продольный и поперечный токи внутри магнитной поверхности, ограничивающей объем  $V$ ; точкой обозначено дифференцирование по  $V$ ,

\* При отброшенном члене  $S^{2/4}$  критерий (12) является достаточным для устойчивости плазмы низкого давления. Ц

а угловыми скобками — усреднение по замкнутой силовой линии  $\langle f \rangle = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}$ . Для аксиально симметричных систем это усреднение эквивалентно усреднению по объему слоя между соседними магнитными поверхностями.

В окрестности магнитной оси  $r = R$  аксиально симметричных плазменных конфигураций условие устойчивости (12) определяется выражением [6]

$$B_0^2 p' \frac{V''}{V'} - p'^2 \left\{ 1 + \frac{16\pi^2 B_0^2}{\chi'^2} \left\langle \frac{(r-R)^2}{|\nabla \psi|^2} \right\rangle \right\} \geq 0, \quad (14)$$

где штрихи означают производные по  $\phi$ . Если воспользоваться разложением (10), то неравенство (14), после вычисления соответствующих интегралов, можно преобразовать к виду [5]

$$N^2 \leq \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \times \left[ \frac{2}{1+\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} - \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} (1+2c) \right]. \quad (15)$$

Отметим, что полученное условие устойчивости в случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей ( $\varepsilon = 1$ ) не зависит от параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  и имеет универсальную форму  $N = \frac{Rj_0}{B_0} < 2$ .

Если давление плазмы обращается в нуль на магнитной поверхности  $\psi_0$ , минимальное расстояние которой от оси  $z$  равно  $R_1$ , то согласно выражению (15) можно записать следующее ограничение на  $\beta_0$ :

$$\beta_0 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \times \left[ \frac{1-R_1^2/R^2}{1+b/a} \left[ 1 + \frac{1-R_1^2/R^2}{3\varepsilon^2} \left( c - \frac{1-\varepsilon^2 b/a}{1+b/a} \right) \right] \right] N^2. \quad (16)$$

Отметим, что поверхностные функции  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $J$  и  $I$  связаны с  $\psi$  и  $I_A(\psi)$  соотношениями [5]:

$$\chi = -2\pi\psi; \quad I = -2\pi I_A; \quad (17)$$

$$2\pi d\phi = I_A dU; \quad 2\pi dJ = p' dV + I_A I_A' dU, \quad (18)$$

где  $V$  и  $U$  определяются интегралами по поперечному сечению магнитной поверхности:

$$V = 2\pi \int r dr dz; \quad U = 2\pi \int r^{-1} dr dz. \quad (19)$$

Рассмотрим равновесие и устойчивость плазмы при некоторых заданных формах внешней магнитной поверхности  $\psi_s$ .

Плазма в торе эллиптического сечения

Пусть внешняя магнитная поверхность  $\psi_\Sigma$  имеет эллиптическое поперечное сечение  $z^2 + \varepsilon_0^2 (r - R_0)^2 = \varepsilon_0^2 \rho^2$  с центром при  $r = R_0$  и с отношением полуосей  $\varepsilon_0$  (рис. 1). Решение уравнения равновесия

$$r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = ar^2 + bR^2 + (a'r^2 + b'R^2) \psi + \dots \quad (20)$$

будем искать в виде ряда по степеням малых параметров  $z/R_0$  и  $(r - R_0)/R_0$ . Приняв  $x = r - R_0$  и обозначив через  $\rho$  полуширину эллиптического сечения граничной магнитной поверхности  $\psi = 0$ , запишем

$$\psi = (A + Bx + Cx^2 + Dz^2 + E\rho^2 + \dots) \times (z^2 + \varepsilon_0^2 x^2 - \varepsilon_0^2 \rho^2). \quad (21)$$

Подставив в уравнение (20) и приравняв члены при одинаковых степенях  $x$ ,  $z$  и  $\rho^2$ , получим значения коэффициентов разложения (21):

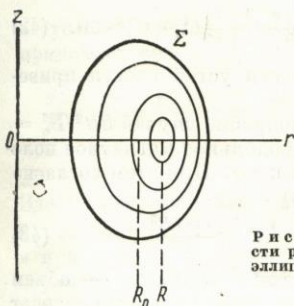
$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{aR_0^2 + bR^2}{1 + \varepsilon_0^2}; \quad B = \frac{1}{2R_0} \cdot \frac{(2 + 3\varepsilon_0^2) aR_0^2 + \varepsilon_0^2 bR^2}{(1 + \varepsilon_0^2)(1 + 3\varepsilon_0^2)}; \\ C = \frac{B}{2R_0} - \frac{A\varepsilon_0^2}{4R_0^2} \cdot \frac{6 + \varepsilon_0^2 - (5 + \varepsilon_0^2)(a'R_0^2 + b'R^2)R_0^2/3}{1 + 6\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^4}; \quad (22)$$

$$D = \frac{A}{4R_0^2} \cdot \frac{\varepsilon_0^2 + (1 + 5\varepsilon_0^2)(a'R_0^2 + b'R^2)R_0^2/3}{1 + 6\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^4};$$

$$E = -\frac{5 + \varepsilon_0^2}{1 + \varepsilon_0^2} \varepsilon_0^2 D.$$

При достаточно малой тороидальности, ограничиваясь в  $\psi$  членами  $\sim \rho^3/R_0^3$ , можно записать

$$\psi = (A + Bx)(z^2 + \varepsilon_0^2 x^2 - \varepsilon_0^2 \rho^2), \quad (25)$$



Р и с. 1. Магнитные поверхности равновесной плазмы в торе эллиптического сечения.

где

$$A = \frac{R_0^2}{2} \cdot \frac{a + b}{1 + \varepsilon_0^2}; \quad B = \frac{R_0}{2} \cdot \frac{(2 + 3\varepsilon_0^2) a + \varepsilon_0^2 b}{(1 + \varepsilon_0^2)(1 + 3\varepsilon_0^2)}. \quad (26)$$

Приравняв к нулю производные  $\psi$  по  $x$  и  $z$ , найдем смещение магнитной оси  $x_0 = R - R_0$  от центра сечения  $r = R_0$ :

$$\frac{x_0}{R_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 3\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2 b/a}{(1 + b/a)(1 + 3\varepsilon_0^2)} \cdot \frac{\rho^2}{R_0^2}. \quad (27)$$

При вычислении с той же точностью отношения полуосей эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси  $r = R$  получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( 1 + 2 \frac{x_0^2}{\rho^2} \right). \quad (28)$$

Отсюда видно, что относительные отличия  $R$  от  $R_0$  и  $\varepsilon$  от  $\varepsilon_0$  малы ( $\sim \rho^2/R^2$ ).

Отметим, что при  $b/a < 0$  может возникнуть вторая магнитная ось и внутри тороида  $\psi_\Sigma$  образуется два семейства вложенных магнитных поверхностей, разделенных «перегородкой»  $r - R_0 = -A/B$ .

Пренебрегая членами  $\sim \rho^2/R^2$ , находим величину  $c$ , входящую в условие устойчивости (15):

$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^2 b/a}{(1 + b/a)(1 + 3\varepsilon^2)}. \quad (29)$$

Отношение  $b/a$  можно определить из уравнения (9), приняв  $\psi_\sigma = 0$ :

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{\delta B^2}{B_0^2}}{\frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cdot \frac{\rho^2}{R^2} N^2}. \quad (30)$$

Подставив (30) в выражение (8), получим уравнение равновесия:

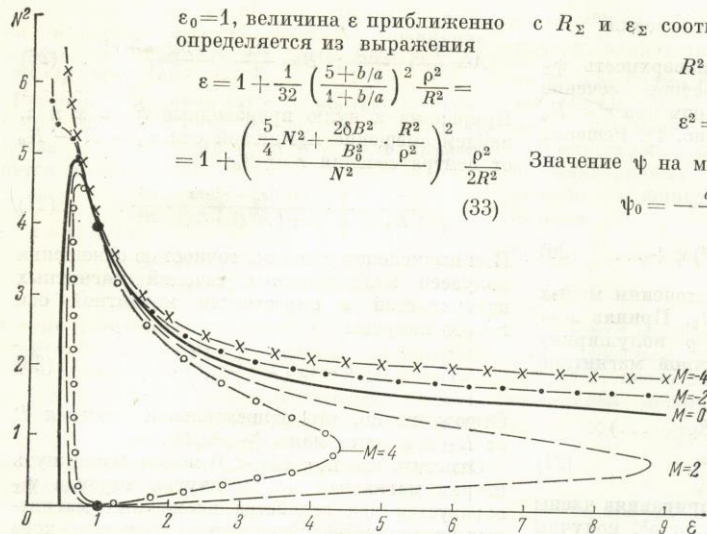
$$\beta_0 = \frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cdot \frac{\rho^2}{R^2} N^2. \quad (31)$$

Теперь условие устойчивости (15) можно записать в виде

$$N^4 - \frac{(1 + \varepsilon^2)(3\varepsilon^4 + 15\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2 + 9\varepsilon - 4)}{\varepsilon^3(1 + \varepsilon)(1 + 3\varepsilon^2)} N^2 + \frac{4(1 - \varepsilon)^2(1 + \varepsilon^2)^3}{\varepsilon^5(1 + \varepsilon)(1 + 3\varepsilon^2)} \cdot \frac{\delta B^2}{B_0^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} \leq 0. \quad (32)$$

Соответствующие области устойчивости показаны на рис. 2.

В случае, когда внешняя магнитная поверхность  $\psi_\Sigma$  имеет круглое поперечное сечение



Р и с. 2. Области устойчивости плазмы для различных значений параметра  $M = \frac{4\delta B^2}{B_0^2} \frac{R^2}{\rho^2}$  (области устойчивости находятся внутри замкнутых или под незамкнутыми кривыми).

$\epsilon_0=1$ , величина  $\epsilon$  приближенно с  $R_\Sigma$  и  $\epsilon_\Sigma$  соотношениями определяется из выражения

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{32} \left( \frac{5+b/a}{1+b/a} \right)^2 \frac{\rho^2}{R^2} = 1 + \left( \frac{5}{4} N^2 + \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} \right)^2 \frac{\rho^2}{2R^2} \quad (33)$$

$$R^2 = \frac{R_\Sigma^2}{2 + (1 + 4\epsilon_\Sigma^2) b/a}; \quad (36)$$

$$\epsilon^2 = \frac{4\epsilon_\Sigma^2}{1 + (1 + 4\epsilon_\Sigma^2) b/a}. \quad (37)$$

Значение  $\psi$  на магнитной оси  $r=R'$  равно

$$\psi_0 = -\frac{aR^4}{8} \cdot \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \cdot \frac{(1+b/a)^3}{(1-\epsilon^2 b/a)^2}. \quad (38)$$

Предположим, что максимальное расстояние поверхности плазмы от оси  $z$  есть  $R_2$ , тогда согласно выражению (9) найдем

$$\frac{b}{a} = \frac{\delta B^2 / B_0^2}{\frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\epsilon^2 N^2}{1 + \epsilon^2} \left( \frac{R_2^2 - R^2}{2R^2} \right)^2}. \quad (39)$$

Подставив это выражение в (8), получим уравнение равновесия:

$$\beta_0 = \frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\epsilon^2 N^2}{1 + \epsilon^2} \left( \frac{R_2^2 - R^2}{2R^2} \right)^2. \quad (40)$$

и условие устойчивости (32) имеет вид

$$N^4 - 4N^2 + \left( \frac{5}{4} N^2 + \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} \right)^4 \frac{\delta B^2}{B_0^2} \cdot \frac{\rho^2}{R^2} < 0. \quad (34)$$

Согласно выражению (34) при  $\delta B^2 > 0$  плазма становится неустойчивой при малых токах.

#### Плазма в торе полуэллиптического сечения

При постоянных  $a$  и  $b$  существует простое точное решение уравнения равновесия (4), удовлетворяющее граничному условию  $\psi = 0$  на поверхности эллипсоида вращения, отношение полуосей которого  $\epsilon_\Sigma$ :

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{ar^2}{1+4\epsilon_\Sigma^2} + bR^2 \right) (z^2 + \epsilon_\Sigma^2 r^2 - \epsilon_\Sigma^2 R_\Sigma^2), \quad (35)$$

где  $R_\Sigma$  — максимальный радиус граничной поверхности  $\psi_\Sigma$ . Магнитные поверхности равновесной конфигурации (35) показаны на рис. 3. Радиус магнитной оси  $R$  и отношение полуосей эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси  $\epsilon$  связаны

Величина  $c$ , входящая в критерий устойчивости (15), для рассматриваемой равновесной конфигурации определяется выражением

$$c = \frac{1 - \epsilon^2 \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}. \quad (41)$$

Полученные соотношения позволяют выразить критерий устойчивости (15), аналогично (32), в виде

$$N^4 - 2 \frac{1 + \epsilon^2}{\epsilon^3} \frac{\epsilon^2 + 3\epsilon - 2}{1 + \epsilon} N^2 + \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \left( \frac{2R^2}{R_2^2 - R^2} \right)^2 \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^5} \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} (1 + \epsilon^2)^3 < 0. \quad (42)$$

Соответствующие области устойчивости приведены на рис. 4.

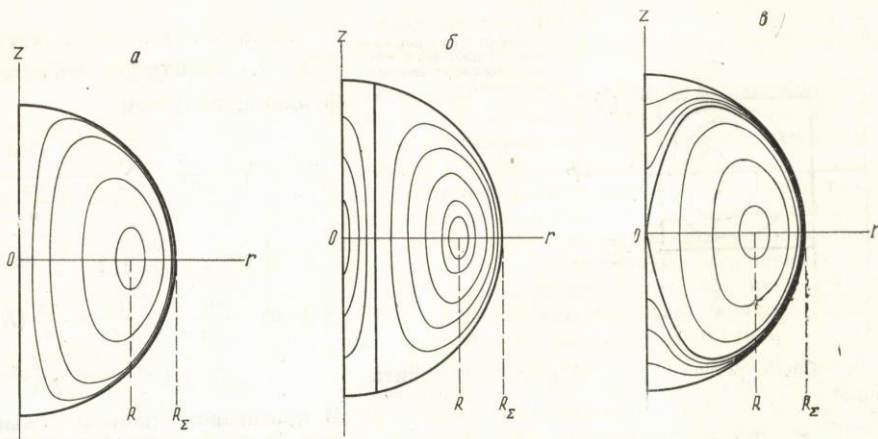
Рассмотрим более подробно случай  $\delta B^2 / B_0^2 = 0$ , когда  $b = 0$  и продольное магнитное поле  $B_\varphi = I_A / r$  спадает как  $1/r$ . При этом согласно выражениям (17), (18)

$$p' = \frac{2\pi J}{V}; \quad N = \frac{4\pi^2 J R^3}{IV}, \quad (43)$$

где  $J$  — продольный ток в плазме;  $V$  — объем плазмы;  $I$  — полный ток, который течет

Рис. 3. Магнитные поверхности равновесной плазмы в торе полуэллиптического сечения:

$a - b = 0$ ;  $\delta - R^2 b/a = -0,008$ ;  $\epsilon - R^2 b/a = 0,008$ .



в соленоиде, создающем продольное магнитное поле.

При малой тороидальности плазменного тора ( $V \approx 2\pi^2 \rho^2 R \epsilon$ ) равновесное значение  $\beta_0$  совпадает с уравнением (31):

$$\beta_0 = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \cdot \frac{\rho^2}{R^2} N^2 = \frac{4}{1+\epsilon^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} \cdot \frac{J^2}{I^2}, \quad (44)$$

а условие устойчивости сводится к ограничению на отношение токов  $J/I$ :

$$\frac{J^2}{I^2} \leq \frac{\rho^4}{R^4} \cdot \frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} \cdot \frac{\epsilon^2+3\epsilon-2}{1+\epsilon}. \quad (45)$$

При предельно большой тороидальности, когда плазменный тор занимает почти весь объем ( $V_{\Sigma} = 4\pi \epsilon_{\Sigma} R_{\Sigma}^3/3$ ) внутри граничного эллипсоида вращения  $z^2 + \epsilon_{\Sigma}^2 r^2 = \epsilon_{\Sigma}^2 R_{\Sigma}^2$

$$\beta_0 = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \cdot \frac{N^2}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{9\pi^2}{1+\epsilon^2} \cdot \frac{J^2}{I^2}, \quad (46)$$

а условие устойчивости (43) принимает вид

$$\frac{J^2}{I^2} \leq \frac{8}{9\pi^2} \cdot \frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} \cdot \frac{\epsilon^2+3\epsilon-2}{1+\epsilon}. \quad (47)$$

Здесь максимальное значение  $\beta_0$  соответствует  $\epsilon = 1 + \sqrt{2}$ , а при  $\epsilon \approx 9/16$  правая часть неравенства (47) обращается в нуль.

Таким образом, если реализуется случай квазиоднородного продольного магнитного поля ( $b = 0$ ), то в случае предельно большой тороидальности условие гидромагнитной устойчивости приводит к возможности получения достаточно больших токов в плазме. Например, при  $\epsilon \approx 1$  критерий устойчивости допускает  $\beta_0 \approx 1/2$ ,  $J/I \approx 1/3$ .

Плазма в торе прямоугольного сечения

Ограничимся случаем  $p' = -a = \text{const}$ ,  $R^2 b = -I_A I_A' = \text{const}$  и будем искать решение уравнения (4), удовлетворяющее условию  $\psi = 0$  на поверхности тора  $\Sigma$  прямоугольного сечения (рис. 5). В качестве частного решения неоднородного уравнения (4) выберем функцию

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (ar^2 + bR^2) (z^2 - d^2/4), \quad (48)$$

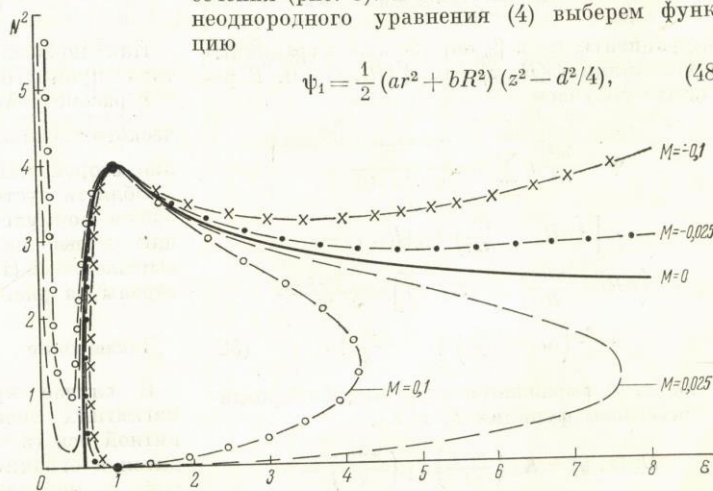
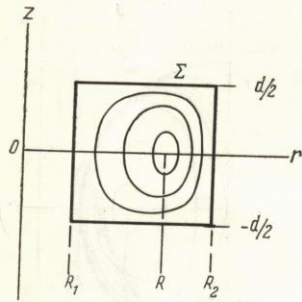


Рис. 4. Области устойчивости для различных значений параметра  $M = \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \left( \frac{2R^2}{R^2 - R_0^2} \right)^2$ .



Р и с. 5. Магнитные поверхности равновесной плазмы в торе прямоугольного сечения.

тогда общее решение (4) можно представить в виде

$$\psi = r \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_n I_1 \left( \frac{n\pi z}{d} \right) + \beta_n K_1 \left( \frac{n\pi z}{d} \right) \right] \cos \frac{n\pi z}{d} + \psi_1. \quad (49)$$

Разлагая функцию

$$f(z) = \begin{cases} z^2 - \frac{d^2}{4} & \text{при } 0 < z < \frac{d}{2}; \\ - \left[ (z-d)^2 - \frac{d^2}{4} \right] & \text{при } \frac{d}{2} < z < d \end{cases} \quad (50)$$

в ряд Фурье на двойном интервале  $(-d, d)$ , находим

$$f(z) = - \frac{8d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3} \cos \frac{n\pi z}{d}. \quad (51)$$

Коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  определяются граничными условиями  $\psi(R_1, z) = 0$ ,  $\psi(R_2, z) = 0$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{4d^2}{\pi^3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3 D_n(R_1, R_2)} \times \\ & \times \left[ \left( aR_2 + \frac{bR^2}{R_2} \right) D_n(R_1, r) - \right. \\ & \left. - \left( aR_1 + \frac{bR^2}{R_1} \right) D_n(R_2, r) \right] \cos \frac{n\pi z}{d} + \\ & + \frac{r}{2} \left( ar + \frac{bR^2}{r} \right) \left( z^2 - \frac{d^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (52)$$

где  $D_n(x, y)$  выражается через модифицированные бesselовы функции  $I_1$  и  $K_1$ :

$$\begin{aligned} D_n(x, y) = & K_1 \left( \frac{n\pi x}{d} \right) I_1 \left( \frac{n\pi y}{d} \right) - \\ & - I_2 \left( \frac{n\pi x}{d} \right) K_1 \left( \frac{n\pi y}{d} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

При достаточно малой тороидальности, когда  $\frac{\pi R_1}{d} \gg 1$ , используя асимптотику бesselовых функций, получаем

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{4d^2}{\pi^3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{d} (R_2 - R_1)} \times \\ & \times \left[ \left( aR_2 + \frac{bR^2}{R_2} \right) \sqrt{\frac{R^2}{r}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{d} (r - R_1) + \right. \\ & \left. + \left( aR_1 + \frac{bR^2}{R_1} \right) \sqrt{\frac{R_1}{r}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{d} (R_2 - r) \right] \cos \frac{n\pi z}{d} + \\ & + \frac{r}{2} \left( ar + \frac{bR^2}{r} \right) \left( z^2 - \frac{d^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

В противоположном предельном случае большой тороидальности (при  $R_1 \rightarrow 0$ ) функция потока  $\psi$  принимает вид

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{4d^2}{\pi^3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3} \times \\ & \times \left\{ \left( aR_2 + \frac{bR^2}{R_2} \left[ 1 - \frac{n\pi R_2}{d} K_1 \left( \frac{n\pi R_2}{d} \right) \right] \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{I_1 \left( \frac{n\pi r}{d} \right)}{I_1 \left( \frac{n\pi R_2}{d} \right)} - \frac{bR^2 n\pi}{d} K_1 \left( \frac{n\pi r}{d} \right) \right\} \cos \frac{n\pi z}{d} + \\ & + \frac{r}{2} \left( ar + \frac{bR^2}{r} \right) \left( z^2 - \frac{d^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Как показал численный расчет, в случае тора прямоугольного сечения, так же как и в рассмотренном выше случае тора эллиптического сечения, при  $\frac{b}{a} < 0$  возможно появление второй магнитной оси.

Область устойчивости рассчитывалась по общей формуле (15), причем значения входящих в нее параметров  $\epsilon$  и  $c$  определялись выражениями (11). Полученные результаты приведены на рис. 6.

#### Заключение

В случае круговых нормальных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси ( $\epsilon = 1$ ) условие устойчивости сводится к ограничению на отношение плотности тока к магнитному полю на магнитной оси  $j_0 R / B_0 < 2$ . В предположении об однородности продольного тока это условие эквивалентно

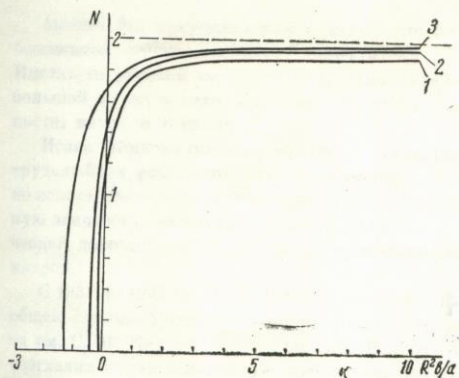


Рис. 6. Области устойчивости плазмы в торе квадратного сечения при различных значениях  $R_1/d$ : 1 —  $R_1/d = 0,1$ ; 2 —  $R_1/d = 0,5$ ; 3 —  $R_1/d = 1$ .

критерию устойчивости Шафранова — Крускала  $\frac{RB_0(a)}{aB_\phi(a)} < \frac{1}{m}$  для первой моды колебаний  $m = 1$ . Если при удалении от магнитной оси плотность тока падает, то условие устойчивости, представленное в форме критерия Шафранова — Крускала, будет соответствовать  $m > 1$ . Например, для параболического распределения плотности тока  $j_\phi = j_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)$  получается  $m = 2$ .

Для исследования влияния эллиптичности сечений магнитных поверхностей были рассмотрены два случая, когда внешняя магнитная поверхность  $\Sigma$  имеет эллиптическое и полуэллиптическое сечения. Как видно из рис. 2 и 4, предельное значение  $j_0R/B_0$  резко падает при уменьшении отношения полуосей  $\epsilon = l_z/l_r$ .

эллиптических сечений магнитных поверхностей и более плавно падает, когда  $\epsilon$  становится больше единицы.

В случае предельно большой тороидальности, когда внешняя граница плазмы имеет полуэллиптическое сечение с отношением полуосей  $\epsilon_\Sigma = 1/2$  (что соответствует  $\epsilon = 1$ ), предельное значение отношения продольного тока в плазме к току в обмотках соленоида, создающего продольное магнитное поле, составляет  $J/I \approx 1/3$ , что соответствует отношению давления плазмы к магнитному давлению  $\beta \approx 1/2$ .

Для исследования влияния тороидальности на устойчивость был рассмотрен также случай плазменного тора, внешняя магнитная поверхность которого имеет прямоугольное поперечное сечение. Как видно из рис. 6, в случае, когда продольное магнитное поле при удалении от магнитной оси падает ( $b/a > 0$ ), предельное значение отношения  $N = j_0R/B_0$  немного уменьшается с ростом тороидальности, причем это уменьшение  $N$  связано с соответствующим увеличением  $\epsilon$ .

Таким образом, с точки зрения условий гидромагнитной устойчивости при заданном магнитном поле увеличение тороидальности должно приводить к увеличению предельного тока и давления плазмы.

Поступила в Редакцию 16/VIII 1967 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Шафранов. ЖЭТФ, 33, 710 (1967).
2. J. Green, J. Johnson. Phys. Fluids, 5, 510 (1962).
3. C. Mercier. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Paper 95. Salzburg, 1961.
4. M. Binen. Ibidem, Paper 35.
5. Л. С. Соловьев. ЖЭТФ, 53, 626 (1967).
6. Л. С. Соловьев. ЖЭТФ, 53, 2063 (1967).