распада на компоненты. Средние результаты для полиэтилена низкого давления (образец № 4) и высокого давления (образец № 2) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Содержание обнаруженных элементов в 1 г полиэтилена, %

Элемент	Полиэтилен НД	Полиэтилен ВД
Mn	$2{,}8\cdot 10^{-5}$	$2{,}6\cdot 10^{-6}$
Na+Cu	$3{,}7\cdot 10^{-4}$	$3{,}3\cdot 10^{-5}$
Br	$5{,}7\cdot 10^{-4}$	
Al	$8{,}9\cdot 10^{-3}$	$2{,}0\cdot 10^{-4}$
Cl	$1{,}8\cdot 10^{-2}$	$2{,}1\cdot 10^{-4}$

В настоящей работе не преследовалась цель точного определения содержания примесей. Экспериментальная ошибка составляет 30—40%.

Предварительное знакомство с технологией производства полиэтилена позволяет сделать предположение о загрязнении полиэтилена указанными выше элементами при использовании катализаторов полимеризации, а также при очистке сырья и продукта полимеризации.

Поступило в Редакцию 30/III 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Meinke. Nucleonics, **17**, No. 9, 86 (1959).
2. P. Stallowood, W. Mott, D. Fanale. Anal. Chem., **35**, 6 (1963).
3. F. C. Acderscheld. Proceedings of a Seminar. Production and use of Shert Lived Radioizotopes from Heactors. Vienna, 1963, p. 31.
4. W. W. Meinke. Ibiden, p. 93.

УДК 621.039.51.12

Асимптотическое решение кинетического уравнения и диффузионные характеристики

Я. И. Грановский, А. А. Кострица

Диффузионную теорию обычно отождествляют с P_1-приближением метода сферических гармоник. Однако те же свойства наблюдаются и в точных решениях кинетического уравнения, которое исследовалось только для простейших функций рассеяния. Мы попытаемся полнее проанализировать диффузионные свойства асимптотической части решения кинетического уравнения в общем случае анизотропии рассеяния и источников. Оказывается, что эти свойства по существу являются неотъемлемым качеством функции Грина кинетического уравнения.

Линейность кинетического уравнения переноса нейтронов позволяет записать его решение в виде

$$N(\mathbf{r},\ t,\ \mathbf{n}) = \int e^{i(\mathbf{qr}-\omega t)}\, S(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n})\, G(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n})\, d\mathbf{q}\, d\omega, \quad (1)$$

где $S(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n})$ — фурье-образ источника нейтронов; $G(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n})$ — функция Грина.

Поведение плотности нейтронов на далеких расстояниях (асимптотика) определяется расположением особых точек $G(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n})$ в окрестности $\mathbf{q}=0$. Если ближайшей к нулю особенностью является полюс, то асимптотические плотность и поток подчиняются диффузионным уравнениям.

В свою очередь особые точки функции Грина совпадают с теми значениями $\mathbf{q}$, при которых однородное кинетическое уравнение

$$\left(-i\omega + i\mathbf{qv} + \frac{v}{l}\right) N(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n}) = \frac{v}{4\pi l_s} \int N(\mathbf{q},\ \omega,\ \mathbf{n})\, \mu(\Phi)\, d\Omega' \quad (2)$$

имеет нетривиальное решение. Здесь v — скорость нейтронов; l, l_s — длина свободного пробега и длина рассеяния соответственно.

Если функция рассеяния $\mu(\Phi)$ разложена в ряд по полиномам Лежандра

$$\mu(\Phi) = \sum_j \mu'_j P_j(\cos\Phi), \quad (3)$$

то интеграл по углам берется с помощью теоремы сложения и получается

$$N = \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{\mu_j P_j(\cos\theta)\, N_j}{z - \cos\theta}, \quad (4)$$

где

$$\mu_j = \frac{i\mu'_j}{q l_s}; \quad (5а)$$

$$z = \frac{\omega}{qv} + \frac{i}{ql}. \quad (5б)$$

Величины

$$N_j = \int N P_j(\cos\theta)\, d\Omega \quad (6)$$

удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$N_k = \sum_j \mu_j C_{jk} N_j, \quad (7)$$

следующей из (4). Коэффициенты C_{jk} выражаются через функции Лежандра второго рода

$$C_{jk} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{P_j(\cos\theta)\, P_k(\cos\theta)\, d\Omega}{z - \cos\theta} = P_j(z)\, Q_k(z) \quad (j \leqslant k). \quad (8)$$

Уравнение диффузионной длины

Нетривиальное решение однородной системы (7) существует, если ее определитель равен нулю

$$\Delta = |\delta_{jk} - \mu_j C_{jk}| = 0. \tag{9}$$

Это условие фиксирует величину z — единственный свободный параметр в уравнении (9) — или q, если ограничиться стационарным случаем $\omega = 0$. Величина q связана с длиной затухания асимптотической части потока нейтронов с диффузионной длиной L.

В развернутом виде уравнение (9) имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\mu_0 Q_0 & -\mu_1 Q_1 & -\mu_2 Q_2 & -\mu_3 Q_3 \ldots \\ -\mu_0 Q_1 & 1-\mu_1 P_1 Q_1 & -\mu_2 P_1 Q_2 & -\mu_3 P_1 Q_3 \ldots \\ -\mu_0 Q_2 & -\mu_1 P_1 Q_2 & 1-\mu_2 P_2 Q_2 & -\mu_3 P_2 Q_3 \ldots \\ -\mu_0 Q_3 & -\mu_1 P_1 Q_3 & -\mu_2 P_2 Q_3 & 1-\mu_3 P_3 Q_3 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= 0. \tag{10}$$

Это уравнение можно записать значительно проще, если из n-й строки вычесть первую, умноженную на P_n:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\mu_0 Q_0 & -\mu_1 Q_1 & -\mu_2 Q_2 & -\mu_3 Q_3 \ldots \\ \mu_0 W_{10} - P_1 & 1 & 0 & 0 \ldots \\ \mu_0 W_{20} - P_2 & \mu_1 W_{21} & 1 & 0 \ldots \\ \mu_0 W_{30} - P_3 & \mu_1 W_{31} & \mu_2 W_{32} & 1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

где

$$W_{ik} = P_i Q_k Q_i \tag{12}$$

является полиномом степени $|i-k|-1$.

С помощью соотношения

$$Q_k(z) = P_k(z) Q_0(z) - W_{k-1}(z), \tag{13}$$

взятого из работы [1], из уравнения (11) можно выделить все логарифмические члены, содержащиеся в Q_0:

$$\mu_0 Q_0(z) = \frac{\Delta(W)}{\Delta(P)}. \tag{14}$$

Входящие сюда определители отличаются от определителя в уравнении (11) только первой строкой, которая имеет вид:

в $\Delta(W): 1 \quad \mu_1 W_0 \quad \mu_2 W_1 \quad \mu_3 W_2 \ \ldots$

в $\Delta(P): 1 \quad \frac{\mu_1}{\mu_0} P_1 \frac{\mu_2}{\mu_0} P_2 \frac{\mu_3}{\mu_0} P_3 \ \ldots$

Все элементы этих определителей, а следовательно, и они сами являются полиномами относительно z.

Уравнение (14) представляет собой обобщение известных трансцендентных уравнений, из которых находят длину диффузии [см., например, в работе [2] формулы (32.27) и (32.36)]. Простой вид уравнение (14) принимает для полиномиальных законов рассеяния, так как в этих случаях $\mu_{j>n} = 0$ и оба определителя обрываются на $(n+1)$-й строке.

Рассмотрим два примера для стационарного случая.

1. Линейная анизотропия: $\mu_0' = 1$, $\mu_1' = 3c_1$, $\mu_{j\geqslant 2}' = 0$. Здесь

$$\Delta(W) = \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 \\ \mu_0 W_{10} - P_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \mu_1(\mu_0 - P_1);$$

$$\Delta(P) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mu_1}{\mu_0} P_1 \\ \mu_0 W_{10} - P_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} P_1(\mu_0 - P_1).$$

Вводя диффузионную длину равенством $i/q = L$, получаем $P_1(z) = L/l$, $\mu_0 = L/l_s$, $\mu_1 = 3c_1 L/l_s$. Наконец,

$$\mu_0 - P_1 = \frac{L}{l_s} - \frac{L}{l} = -\frac{L}{l_a}, \tag{15}$$

где l_a — длина поглощения.

Подставив эти величины в (14), найдем

$$\frac{L}{2l_s} \ln \frac{L+l}{L-l} = \frac{1 + \frac{3c_1 L^2}{l_s l_a}}{1 + \frac{3c_1 L^2}{l l_a}}, \tag{16}$$

что совпадает с (32.36) в работе [2]. При $L \gg l$ уравнение (16) приводит к выражению диффузионной длины, получаемому в транспортном приближении:

$$L_0^2 = \frac{l_a l_s}{3}\left(1 - c_1 \frac{l}{l_s}\right)^{-1}. \tag{17}$$

2. Квадратичная анизотропия: $\mu_0' = 1$, $\mu_1' = 0$, $\mu_2' = \beta$ $\mu_{j\geqslant 3} = 0$. Здесь

$$\frac{\Delta(W)}{\Delta(P)} = \frac{1 - \mu_2 W_1 (\mu_0 W_{20} - P_2)}{1 - \frac{\mu_2}{\mu_0} P_2 (\mu_0 W_{20} - P_2)}.$$

Учитывая, что $W_{20} = W_1 = \frac{3}{2} z$, получаем

$$\mu_0 W_{20} - P_2(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3L^2}{l l_a}\right),$$

так что

$$\frac{L}{2l_s} \ln \frac{L+l}{L-l} = \frac{1 - \beta \frac{3L^2}{4 l l_s}\left(1 - \frac{3L^2}{l l_a}\right)}{1 + \frac{\beta}{4}\left(1 - \frac{3L^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{3L^2}{l l_a}\right)}. \tag{18}$$

Важным частным случаем рассмотренного примера является рэлеевское рассеяние, для которого $\beta = 1/2$. Решая (18) относительно L^2 (при $L \gg l$), находим выражение для диффузионной длины в случае рэлеевского рассеяния:

$$L^2 = \frac{l l_a}{3}\left(1 + \frac{8 l_s}{9 l_a}\right)^{-1}. \tag{19}$$

О законе Фика в теории переноса нейтронов

Основным законом элементарной теории диффузии является пропорциональность потока нейтронов градиенту их плотности (закон Фика). Поскольку в асимптотике все N_k экспоненциально зависят от расстояния с длиной затухания L, то справедливость закона Фика очевидна. В случае плоской геометрии коэффициент диффузии

$$D=vL\frac{N_1}{N_0}\,. \tag{20}$$

В асимптотике можно считать, что все N_k удовлетворяют однородной системе (7) с определителем $\Delta=0$. Вследствие этого отношения N_k/N_0 фиксированы однозначно. Чтобы найти N_1/N_0, вычтем из второго уравнения системы (7) первое, умноженное на P_1:

$$N_1-P_1N_0=\sum_j \mu_j\,(C_{j1}-P_1C_{j0})\,N_j=$$

$$=\mu_0\,(Q_1-P_1Q_0)\,N_0=-\mu_0N_0. \tag{21}$$

Следовательно, $N_1/N_0=P_1-\mu_0$ и

$$D=vL\,(P_1-\mu_0). \tag{22}$$

В стационарном случае, учитывая уравнение (15), находим известное равенство

$$D=\frac{vL^2}{l_a}\,, \tag{23}$$

т. е. коэффициент пропорциональности между потоком и градиентом плотности нейтронов в асимптотике связан с длиной затухания так же, как и в диффузионном приближении. Влияние анизотропии рассеяния на коэффициент диффузии целиком сводится к изменению длины диффузии L, определяемой из (14). Анизотропия источников не сказывается на значениях L и D.

В нестационарном случае это важное свойство асимптотики [см. (23)] исчезает. Например, для равномерно движущегося источника

$$D=\frac{vL^2}{l_a}\left(1-\frac{ul_a}{vL}\right), \tag{24}$$

где u — скорость источника.

Поскольку все N_j/N_0 однозначно определены системой (7), легко прийти к другому свойству в распределении нейтронов, испытавших большое число столкновений: угловое распределение не зависит от анизотропии источника. Зависимость асимптотической плотности нейтронов N_{as} от интенсивности и углового распределения источника заключена в постоянном множителе N_0, который, разумеется, нельзя определить на основании однородного уравнения (2).

При наличии источников решение неоднородного уравнения приводит вместо (7) к системе уравнений

$$N_k=\sum_j \mu_jC_{jk}N_j+F_k \tag{25}$$

для фурье-образов, где

$$F_k=\frac{S\,(\mathbf{q},\,\omega)}{4\pi}\int\frac{f\,(\theta)\,P_k\,d\Omega}{-i\omega+i\mathbf{qv}+v/l}=\frac{i}{qv}\,S\,(\mathbf{q},\,\omega)\,\varphi_k, \tag{26}$$

а $f\,(\theta)$ — угловое распределение нейтронов источника.

Фурье-образ искомой функции имеет вид

$$N=\frac{iS\,(\mathbf{q},\,\omega)}{4\pi qv\,(z-\cos\theta)\,\Delta}\sum_j \mu_j\Delta_jP_j\,(\cos\theta)+$$

$$+\frac{iS\,(\mathbf{q},\,\omega)\,f\,(\theta)}{4\pi qv\,(z-\cos\theta)}\,, \tag{27}$$

где Δ_j отличается от Δ, определенного уравнением (11) подстановкой величин $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$ вместо j-го столбца.

Возвращаясь от фурье-образа (27) к плотности нейтронов, получаем решение задачи о распределении нейтронов вокруг источника. Рассмотрим асимптотическую часть решения, определяемую вкладом от полюса при $\Delta=0$, в частном случае источника, заданного выражением

$$S\,(\mathbf{q},\,\omega,\,\theta)=\frac{s_0}{2\pi}\,\delta\,(\omega-uq_x)\,\delta\,(q_y)\,\delta\,(q_z)\,f\,(\theta). \tag{28}$$

Из (27) получим асимптотическую плотность нейтронов перед движущимся источником в виде

$$N_{as}=Ae^{-(x-ut)/L}\,\frac{\sum\limits_j \mu_j\Delta_jP_j\,(\cos\theta)}{z-\cos\theta}\,. \tag{29}$$

Здесь

$$A=\frac{s_0}{8\pi^2}\cdot\frac{L}{v}\cdot\frac{2\pi i}{\delta}\,; \tag{30}$$

$$z=\frac{L}{l}+\frac{u}{v}\,, \tag{31}$$

причем $\delta=\Delta'\,(i/L)$ и в Δ_j взято $i/q=L$.

Из равенств

$$N_k=4\pi Ae^{-\frac{x-ut}{L}}\Delta_k \tag{32}$$

находим

$$j=vN_1=-vL\,\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\cdot\frac{dN_0}{dx} \tag{33}$$

и, следовательно,

$$D=vL\,\frac{\Delta_1}{\Delta_0}. \tag{34}$$

Чтобы вычислить отношение определителей в уравнении (34), заметим, что из (29) следуют выражения:

$$\left.\begin{aligned}
N_0\,(x,\,t)&=4\pi Ae^{-(x-ut)/L}\sum_j \mu_j\Delta_jQ_j\,;\\
N_1(x,\,t)&=4\pi Ae^{-(x-ut)/L}\,\Big(P_1\sum_j \mu_j\Delta_jQ_j-\mu_0\Delta_0\Big)\,;\\
N_2(x,\,t)&=4\pi Ae^{-(x-ut)/L}\,\Big(P_2\sum_j \mu_j\Delta_jQ_j-\frac{3}{2}P_1\mu_0\Delta_0-\frac{1}{2}\mu_1\Delta_1.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Из равенств (32) и (35) легко получить соотношения между определителями

$$\Delta_1=\Delta_0\,(P_1-\mu_0); \tag{36}$$

$$\Delta_2=\Delta_0\left[\,(P_1-\mu_0)\left(\frac{3}{2}P_1-\frac{1}{2}\mu_1\right)-\frac{1}{2}\,\right]. \tag{37}$$

Из (34) и (36) естественно получается уравнение (23), а из (36), (37) и им аналогичных после подстановки в (29) следует, что угловое распределение N_{as} не зависит от источника.

Наконец, из (36)—(37) вытекает, что при $u=0$

$$j=-\frac{\frac{vl}{3}}{1-c_1\frac{l}{l_s}}\left(1+2\frac{N_2}{N_0}\right)\frac{dN_0}{dx}. \qquad (38)$$

Выражение (38) является следствием обобщенного закона Фика [3], который получен для изотропных источников. Это соотношение справедливо в асимптотике и при неизотропных источниках. В методе сферических гармоник, обрывая бесконечную систему на P_1-приближении, принимают

$$2\frac{N_2}{N_0}=2\frac{\Delta_2}{\Delta_0}=\frac{L^2}{L_0^2}-1\ll 1, \qquad (39)$$

где L — точное выражение диффузионной длины, определяемое из (14), а L_0 — длина затухания решения в P_1-приближении.

Поступило в Редакцию 30/III 1964 г.
В окончательной редакции 28/VII 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
2. А. Д. Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
3. С. Глесстон, М. Эдлунд. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.

УДК.621.039.515

Взаимодействие жидкости и стержня СУЗ

Р. Р. Ионайтис

Стержни СУЗ (системы управления и защиты) реактора, представляющие собой гладкие или членистые круглые цилиндры, плоские пластины или крестообразные стержни (рис. 1), движутся, как правило, в жидкости. Следовательно, на них действует гидродинамическая сила [1], которая в системе СУЗ может

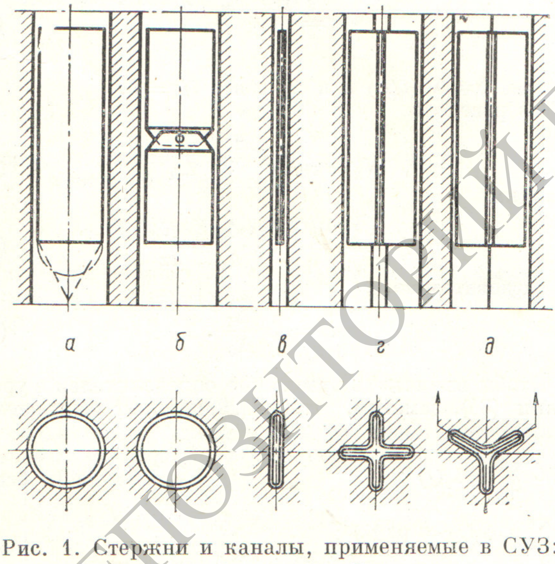

Рис. 1. Стержни и каналы, применяемые в СУЗ:
а — гладкий цилиндр; *б* — членистый цилиндр; *в* — пластина; *г*, *д* — крестообразные стержни.

изменять (увеличивать или уменьшать) нагрузку на привод, изменять продолжительность срабатывания, тормозить стержни в конце их движения, поднимать (взводить) стержни, увеличивать время подготовки системы к работе.

Поскольку стержни СУЗ движутся в каналах, то воздействующий на них поток жидкости стеснен. Литературы, освещающей вопросы движения удлиненного тела в таком потоке, немного, хотя она и содержит экспериментальные данные [2, 3], а также некоторые расчетные рекомендации [2, 4, 5]. Кроме того, в инженерной практике проводятся оценочные расчеты гидродинамической силы, причем перепад давлений в щели между каналом и движущимся стержнем СУЗ определяется как перепад давления в щели с неподвижными стенками.

Предлагаемая в настоящей работе методика расчета разработана в связи с необходимостью получения физически обоснованных простых и достаточно точных формул, с помощью которых можно рассчитывать гидродинамическую силу, действующую на стержень СУЗ, расход жидкости для вывода стержня из активной зоны, скорость ввода стержня в зону и т. д. Применение полученных результатов для расчета скорости

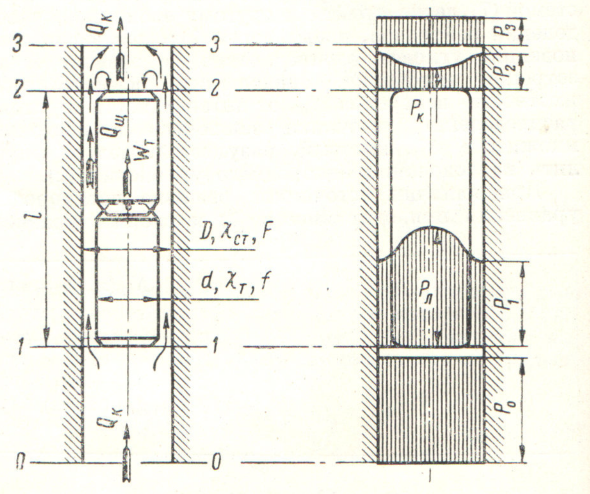

Рис. 2. Схема обтекания цилиндрического тела:
$p_к$, $p_л$ — кормовое и лобовое давления соответственно; $Q_к$, $Q_щ$ — расход в канале и в щели соответственно; d, D — внутренний и наружный диаметры щели; $\chi_т$, $\chi_{ст}$ — параметры тела и стенки; l — длина тела; f, F — площади поперечного сечения; $W_т$ — скорость тела.