

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. Ф. ШОЛОХ, А. Л. САМОФАЛОВ, Е. Л. ТИХОВА

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Практическое пособие

для студентов специальности
1–31 04 01 «Физика (по направлениям)»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2020

УДК 532(076)
ББК 22.25я73
Ш786

Рецензенты:

кандидат технических наук В. А. Банный,
кандидат физико-математических наук Д. Л. Коваленко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Шолох, В. Ф.

Ш786 **Механика сплошных сред** : практическое пособие /
В. Ф. Шолох, А. Л. Самофалов, Е. Л. Тихова ; Гомельский гос. ун-т
им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. – 26 с.
ISBN 978-985-577-639-1

Целью практического пособия является методическое обеспечение выполнения лабораторных работ по дисциплине «Механика» студентами специальности «Физика (по направлениям)». Пособие содержит описания лабораторных работ по темам: «Упругие деформации», «Тензор и эллипсоид инерции».

Издание адресовано студентам физических специальностей.

УДК 532(076)
ББК 22.25я73

ISBN 978-985-577-639-1 © Шолох В. Ф., Самофалов А. Л.,
Тихова Е. Л., 2020
© Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Тема 1. Упругие деформации.....	5
Лабораторная работа 1.1. Изучение явлений, сопутствующих упругой деформации.....	7
Лабораторная работа 1.2. Определение модуля Юнга из растяжения и изгиба.....	10
Лабораторная работа 1.3. Определение коэффициента Пуассона и частоты биений.....	13
Тема 2. Тензор и эллипсоид инерции.....	20
Лабораторная работа 2.1. Изучение тензора моментов инерции твердого тела.....	23
Литература	26

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с учебным планом специальности 1–31 04 01 «Физика (по направлениям)» изучение дисциплины обязательного компонента «Механика» включает в себя лекционные, практические и лабораторные занятия. На лабораторных занятиях студенты получают навыки выполнения физического эксперимента, являющегося основным источником знаний об окружающем мире. Для выполнения лабораторных работ используются типовые лабораторные установки, а также оборудование, разработанное в лабораториях ГГУ им. Ф. Скорины. Подготовка к лабораторным работам осуществляется студентами самостоятельно: в лабораториях или в домашних условиях.

Цель данного практического пособия – обеспечение студентов учебно-методической базой, необходимой для самостоятельной подготовки к лабораторному занятию, проведения лабораторного эксперимента, анализа полученных результатов.

Практическое пособие содержит описания лабораторных работ и краткие теоретические сведения по темам «Механики»: «Упругие деформации», «Тензор и эллипсоид инерции». Содержание теоретического материала и лабораторных работ соответствует учебной программе дисциплины «Механика». Каждая работа включает краткие теоретические сведения об изучаемых явлениях, экспериментальной установке, используемой в лабораторной работе, подробное описание методики проведения эксперимента, вопросы для самоконтроля. В вопросах сделан акцент на наиболее важные понятия и аспекты изучаемых тем.

Каждая лабораторная работа рассчитана на одно занятие продолжительностью четыре академических часа.

Данное пособие написано авторами на основании многолетнего опыта проведения лабораторных работ по дисциплине «Механика».

ТЕМА 1. УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ

1. Виды деформаций.
2. Закон Гука.
3. Упругий гистерезис.

Основные понятия по теме

Деформацией твёрдого тела называют изменение его размеров и формы, обычно сопровождающееся и изменением объёма тела. В некоторых случаях, например, при деформации изгиба, изменение объёма тела может и не наблюдаться.

Деформации тела вызываются изменением температуры или действием на него внешних сил. При деформации происходит смещение частиц, находящихся в узлах кристаллических решёток твёрдых тел из первоначальных положений равновесия в новые. Этому смещению препятствуют силы взаимодействия между частицами. В результате в деформированном теле возникают внутренние упругие силы.

Если после прекращения действия сил, вызывающих деформацию, она исчезает, то такую деформацию называют *упругой*. *Неупругие* деформации твёрдого тела сопровождаются необратимой перестройкой его кристаллической решётки. В этом случае наблюдаются остаточные или *пластические деформации*.

Упругие деформации имеют место тогда, когда внешние силы вызывающие деформации, не превосходят некоторого определённого для каждого тела предела, называемого *пределом упругости*.

Упругие деформации твёрдых тел описываются *законом Гука*

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (1.1)$$

где $\sigma = \frac{F}{S}$ – нормальное напряжение (отношение силы F , приложенной перпендикулярно поперечному сечению образца, к площади S этого сечения);

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – относительная деформация (отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине l образца);

E – модуль упругости (модуль Юнга).

Модуль Юнга характеризует упругие свойства твёрдых тел при деформации растяжения-сжатия. Он численно равен величине напряжения, ко-

торое вызывает изменение длины образца вдвое, если деформация при этом остаётся упругой.

Закон Гука справедлив лишь для идеально упругих тел. Для реальных тел наблюдаются отклонения от этого закона. Эти отклонения в области напряжений, не превосходящих предела упругости, объединяются общим понятием неупругости. Проявлением неупругости являются, например, упругое последствие и упругий гистерезис.

Явление упругого последствия заключается в изменении со временем деформированного состояния при неизменной величине напряжения. В этом случае после приложения нагрузки к образцу, деформация возникает не мгновенно, а продолжает увеличиваться с течением времени (прямое упругое последствие); также и после снятия нагрузки деформация образца исчезает не мгновенно, продолжает уменьшаться во времени (обратное упругое последствие).

Зависимость деформации от времени при разгрузке может быть приближённо описана выражением

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-t/\tau}, \quad (1.2)$$

где ε_0 – относительная деформация в момент снятия нагрузки;

ε – относительная деформация спустя промежуток времени t после снятия нагрузки;

τ – время релаксации.

Время релаксации τ – величина, характерная для данного материала. Она показывает, за какое время деформация, оставшаяся после мгновенного снятия нагрузки, уменьшается в e раз, т. е. уменьшается до величины

$$\varepsilon_\tau = \frac{\varepsilon_0}{e} = 0,37\varepsilon_0.$$

Если к образцу прикладывать сначала возрастающее напряжение, а затем производить разгрузку, то на графике $\sigma = f(\varepsilon)$ кривая разгрузки не будет совпадать с ветвью нагрузки. При полном цикле нагрузки-разгрузки график даёт петлю гистерезиса, как показано на рисунке 1.1.

Площадь петли пропорциональна доле энергии упругости ΔW , перешедшей в тепло.

Явление необратимого превращения в теплоту механической энергии (иначе диссипация энергии) в процессах деформации твёрдых тел называется внутренним трением.

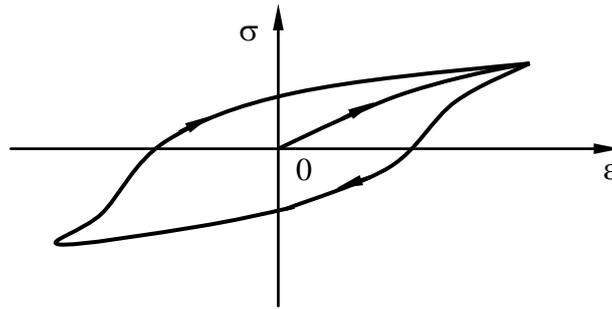


Рисунок 1.1– Петля гистерезиса

Для количественной оценки внутреннего трения материала часто пользуются относительной величиной – коэффициентом поглощения:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}, \quad (1.3)$$

где W – энергия упругой деформации.

Явление неупругости присуще всем реальным твёрдым телам, как полимерным, так и низкомолекулярным, в том числе и металлам. Явления неупругости металлов и других кристаллических тел связаны с дефектами кристаллической решётки: вакансиями, дислокациями и вызванными ими неоднородностями структуры, наличием внутренних микронапряжений в твёрдых телах.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется деформацией тел? Опишите виды деформации.
2. Какова связь между напряжениями и деформациями? Сформулируйте закон Гука. Что характеризует модуль Юнга?
3. Какие тела называют упругими? Опишите упругие напряжения.
4. Что представляет собой энергия упругой деформации?
5. Что такое остаточные деформации? Опишите упругий гистерезис.

Лабораторная работа 1.1

Изучение явлений, сопутствующих упругой деформации

Цель работы: изучение зависимости деформации полимерного материала резинового образца цилиндрической формы от напряжения при деформации растяжения, сжатия.

Приборы и принадлежности: установка, набор грузов, секундомер, штангенциркуль

Описание установки

Установка для наблюдения упругого последействия и упругого гистерезиса представлена на рисунке 1.2.

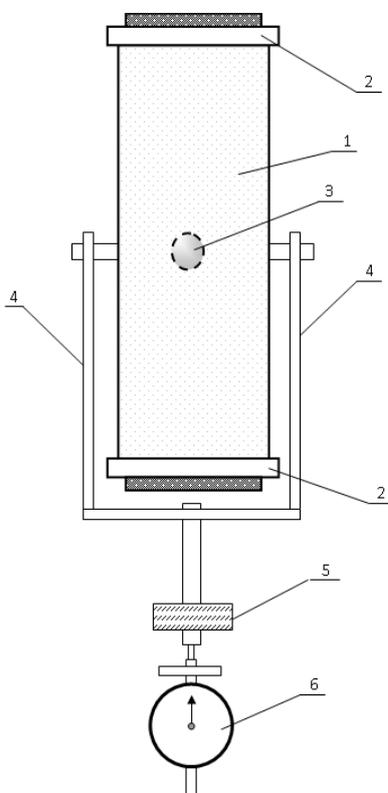


Рисунок 1.2 – Установка для наблюдения упругого последействия и упругого гистерезиса

Она состоит из испытываемого резинового стержня 1, укрепленного в патроне 2. Патрон крепится на стойке с помощью винта 3. Нагрузка резинового стержня осуществляется посредством помещения грузов на платформу 5, закрепленную на металлических креплениях 4.

Связь между величинами σ и ε можно в первом приближении установить законом Гука, который в данном этом случае принимает вид:

$$2\sigma = \varepsilon F. \quad (1.4)$$

Так как верхняя половинка резинового стержня растягивается, а нижняя сжимается, то для того, чтобы вызвать некоторую деформацию ε (см. формулу 1.1), нужно приложить вдвое большее усилие (2σ), чем при чистом растяжении. Растяжение измеряется с помощью закреплённого в стойке индикатора часового типа 6.

Ход работы

Упражнение 1. Определение модуля Юнга

1. Установите индикатор 6, перемещая его по стойке, при отсутствии нагрузки, и закрепите. Путём поворота рифлёного ободка индикатора добейтесь совмещения положения стрелки индикатора с нулевой отметкой его шкалы.

2. Проведите нагружение образца, для чего поместите на платформу разновес 1 кг и через 1–2 минуты по индикатору определите величину абсолютной деформации Δl . Результаты измерений занесите в таблицу 1.

3. Проведите измерения абсолютных деформаций Δl для грузов 2 кг, 3,5 кг, 5 кг.

4. По результатам измерений постройте график зависимости напряжения от относительной деформации $2\sigma = f(\varepsilon)$. Определите модуль Юнга E по тангенсу угла наклона графика относительно оси абсцисс, учитывая при этом масштабы по осям OX и OY .

5. Определите погрешность измерения.

Упражнение 2. Изучение упругого последействия

1. Установите индикатор, перемещая его по стойке при отсутствии нагрузки и закрепите его. Путём поворота рифлёного ободка индикатора добейтесь совмещения положения стрелки индикатора с нулевой отметкой его шкалы.

2. Осторожно положите на платформу 5 груз массой 5 кг и одновременно включите секундомер.

3. По индикатору произведите измерения абсолютных деформаций: сначала сразу после приложения нагрузки, далее в первую минуту отсчёт производите через каждые 10–15 с, во вторую – через 30 с и после того как скорость изменения деформации уменьшится, фиксируйте перемещение индикатора на одно деление. Результаты измерений занесите в таблицу 2. Общее время наблюдения должно быть не менее 9–10 мин. На этом измерения деформаций при нагружении закончите.

4. Проведите измерения абсолютных деформаций при разгрузке. Для этого осторожно снимите груз и одновременно включите секундомер. В том же порядке, как указано в п. 3, производите измерения деформации во времени.

5. Постройте график $\ln \varepsilon = f(t)$ и определите время релаксации τ материала образца (прологарифмировав выражение (1.2), получим $\ln \varepsilon = \ln \varepsilon_0 - \frac{t}{\tau}$, то-

гда τ можно найти по углу наклона соответствующего графика к оси абсцисс, учитывая при этом масштабы по осям).

6. Постройте графики зависимости $\Delta l = f(t)$ при нагружении и разгрузении.

7. Сделайте выводы по полученным результатам и оцените погрешность измерений.

Упражнение 3. Наблюдение упругого гистерезиса

1. Установите нулевое показание на индикаторе при отсутствии нагрузки и закрепите винт.

2. Осторожно поместите на платформу 5 груз массой 0,203 кг и по шкале индикатора определите абсолютную деформацию Δl .

3. Постепенно нагружая образец грузами по 0,214 кг, 0,226 кг, 0,231 кг, доведите нагрузку до 0,874 кг, после чего продолжите нагружение грузами по 1 кг, потом по 1,5 кг. При каждой нагрузке производите отсчёт показаний индикатора через 1–2 мин. после каждого нагружения. Все результаты занесите в таблицу 3.

4. Аналогично п. 3, измерьте абсолютные деформации $\Delta l'$ при разгрузении, для чего снимайте грузы с платформы в обратном порядке.

5. Переверните образец вокруг винта 3 на 180° (тогда при приложении нагрузки та часть стержня, которая подвергалась ранее растяжению, будет сжиматься и наоборот) и проведите измерения согласно п. 3 и 4.

6. Приписав величинам напряжения и деформации во втором случае отрицательные знаки, постройте график $\sigma = f(\varepsilon)$.

7. Рассчитайте коэффициент поглощения $\psi = \frac{\Delta W}{W}$. Значение ΔW определите планиметрически, измерив площадь петли гистерезиса, с учётом масштаба по осям OX и OY .

8. Оцените погрешность измерений.

Лабораторная работа 1.2

Определение модуля Юнга из растяжения и изгиба

Цель работы: исследовать зависимость упругой силы от абсолютной деформации изгиба.

Приборы и принадлежности: установка для определения модуля Юнга по деформациям изгиба, набор грузов, штангенциркуль, исследуемые образцы.

Описание установки

Для определения модуля Юнга широкое распространение получил метод изгиба стержня, положенного на две опоры. На середину стержня 1, как показано на рисунке 1.3, кладут груз определённой величины. Стержень изгибается, при этом верхние слои материала, расположенные выше линии НС, сжимаются, нижние – растягиваются. Это хорошо заметно, если на стержень нанести перед деформацией сетку. Линия НС соответствует нейтральному слою, который не подвергается деформациям растяжения и сжатия.

В данном случае величина деформации будет характеризоваться стрелой прогиба стержня λ . *Стрелой прогиба* называется расстояние, на которое опускается точка приложения силы, действующей на стержень.

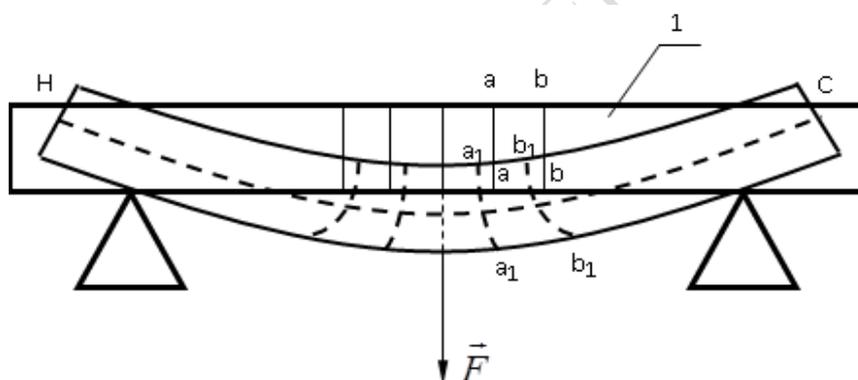


Рисунок 1.3 – Метод изгиба стержня, положенного на две опоры

На основании экспериментальных исследований установлено, что стрелу прогиба призматического стержня можно определить по формуле

$$\lambda = \frac{Fl^3}{4Eab^3}, \quad (1.5)$$

где λ – стрела прогиба;

F – сила, вызывающая деформацию изгиба;

l – расстояние между опорами;

E – модуль Юнга;

a – ширина поперечного сечения стержня;

b – высота поперечного сечения стержня.

Стрелу прогиба цилиндрического стержня находят из соотношения

$$\lambda = \frac{Fl^3}{12\pi Er^4}, \quad (1.6)$$

где r – радиус цилиндрического сечения стержня.

Модуль Юнга для призматического стержня из (1.5) равен:

$$E = \frac{Fl^3}{4\lambda ab^3}. \quad (1.7)$$

Следует заметить, что эта формула даёт правильные результаты тогда, когда сила F действует параллельно той стороне, которая входит в знаменатель зависимости в третьей степени.

Модуль Юнга для цилиндрического стержня из (1.6) равен:

$$E = \frac{Fl^3}{12\pi\lambda r^4}. \quad (1.8)$$

Установка для определения модуля Юнга из деформации изгиба стержня показана на рисунке 1.4 и представляет собой металлическую рельсу, на которой размещаются остроконечные опоры. На эти опоры помещается исследуемый стержень. Изгиб стержня производится грузом, помещаемым на специальную платформу, и измеряется индикатором часового типа.



Рисунок 1.4 – Установка для определения модуля Юнга

Ход работы

1. Измерьте штангенциркулем ширину a и высоту b в нескольких местах по длине стержня, а также расстояние между двумя опорами l .
2. Поместите исследуемый стержень на остrokонечные опоры.
3. Подвесьте в центральной точке стержня подвеску для накладывания грузов.
4. Поворотом ободка индикатора установите стрелку на нуль.
5. На подвеску положите один груз, сделайте отсчёт, вызванный прогибом стержня.
6. Снимите груз и опять сделайте отсчёт, сравнив его с п. 4.
7. Наблюдения сделайте для обоих положений стержня, чтобы быть уверенным, что предел упругости стержня не был превзойдён.
8. Измените на несколько сантиметров расстояние между опорами и снова повторите измерения.
9. Повторите измерения ещё для двух стержней.
10. Вычислите модуль Юнга для материала, из которого изготовлен стержень, по формулам (1.7), (1.8). Сравните полученные значения с табличными.
11. Наложение и снятие груза производите не менее трёх раз. Измерения и вычисления занесите в таблицу.

Лабораторная работа 1.3

Определение коэффициента Пуассона и частоты биений

Цель работы: изучить движение системы со многими степенями свободы, изучить методы определения коэффициента Пуассона, экспериментально определить период биений сплошной колебательной системы.

Приборы и принадлежности: установка, секундомер, весы и разновесы.

Описание установки

Как известно, груз подвешенный на винтовой пружине может совершать не только колебательное движение по вертикали, но и вращение вокруг его вертикальной оси. Вращение груза и движение его по вертикали могут происходить одновременно.

Крутильные колебания вызываются деформацией сжатия (растяжения) продольных слоёв материала пружины, а вертикальные – деформацией сдвига слоёв в поперечном сечении.

Модуль сдвига N и модуль Юнга E связаны уравнением

$$N = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (1.9)$$

где μ – коэффициент Пуассона, т. е. абсолютное значение отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации.

Для пружин с малыми формами наклона витков к горизонтали при их растяжении можно пренебречь деформацией сжатия по сравнению с деформацией сдвига. При закручивании такой пружины можно рассматривать только деформацию растяжения, пренебрегая относительно небольшой деформацией сдвига. Эти обстоятельства дают возможность определить коэффициент Пуассона по измерениям периодов колебаний груза на пружине.

Из теории упругости известно, что коэффициент жесткости k винтовой пружины при вертикальных колебаниях груза (без учёта деформации сжатия)

$$k = \frac{Nd^4}{8nD}. \quad (1.10)$$

Коэффициент жёсткости k_1 винтовой пружины при крутильных колебаниях груза (без учёта деформации сдвига) равен

$$k_1 = \frac{Ed^4}{32nD}, \quad (1.11)$$

где d – диаметр проволоки пружины;

D – диаметр витков пружины;

n – число витков пружины;

N и E – соответственно модули сдвига и сжатия.

Уравнение движения при малых вертикальных колебаниях имеет вид:

$$m\ddot{x} = -k_1x, \quad (1.12)$$

а для крутильных колебаний

$$I\ddot{\varphi} = -k_2\varphi \quad (1.13)$$

где m – масса груза, подвешенного к пружине;

I – момент инерции груза относительно оси вращения;

x – линейное смещение груза при вращательных колебаниях;

φ – угловое смещение груза при вращательных колебаниях.

Из уравнений (1.12) и (1.13) можно найти:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}}. \quad (1.14)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k_2}}, \quad (1.15)$$

где T_1 – период вертикальных колебаний;

T_2 – период крутильных колебаний.

Уравнения (1.9–1.11), (1.14), (1.15) дают:

$$|\mu| = \frac{2IT_1^2}{D^2 m T_2^2} - 1. \quad (1.16)$$

Это уравнение можно использовать для определения коэффициента Пуассона материала пружины.

При более строгом рассмотрении задачи о колебаниях груз, подвешенный к пружине, необходимо считать системой с двумя степенями свободы. Груз одновременно совершает два вида движения: крутильные и вертикальные колебания. Формально это аналогично движению двух маятников, соединённых между собой лёгкой пружиной. Роль «пружинки» в нашем случае играет связь между деформацией сдвига и деформацией сжатия. Нормальными частотами данной системы являются частоты крутильных и вертикальных колебаний.

Изменяя момент инерции груза, показанного на рисунке 1.5, путём изменения положения дисков (5) относительно оси вращения можно изменить и период крутильных колебаний.

Если добиться условий, при которых периоды вертикальных и крутильных колебаний мало отличаются друг от друга, можно наблюдать явление «биений», т. е. периодических изменений во времени амплитуды крутильных и вертикальных колебаний.

Частота биений ω равна разности частот двух видов колебаний (крутильных ω_2^1 и вертикальных ω_1):

$$\omega = \omega_2^1 - \omega_1. \quad (1.17)$$

Период биений

$$\tau = \frac{T_1 T_2^1}{T_2^1 - T_1} \quad (1.18)$$

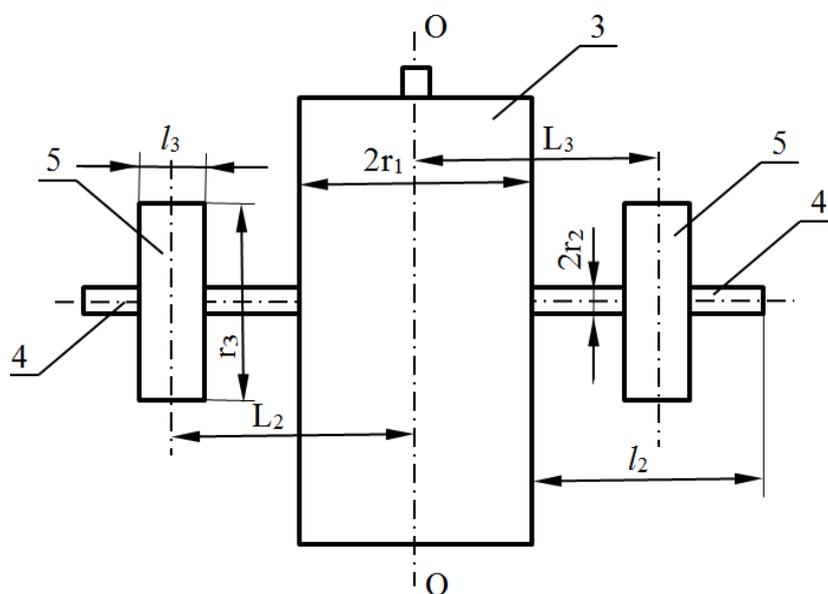


Рисунок 1.5 – К определению момента инерции груза

Вид установки показан на рисунке 1.6, она состоит из витков пружины 1, к которым крепится груз 2.

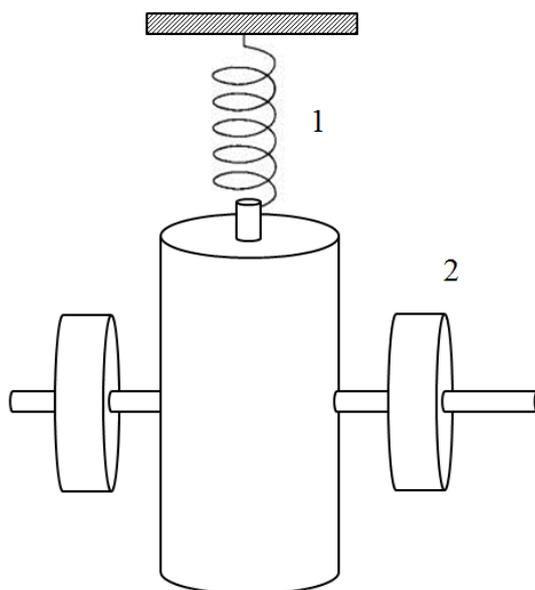


Рисунок 1.6 – Установка для определения коэффициента Пуассона

Груз имеет вид, изображённый на рисунке 1.5, и представляет собой цилиндр 3 с двумя одинаковыми симметрично укрепленными на нём стержнями 4. Для изменения момента инерции груза по резьбе стержней могут перемещаться одинаковые диски 5.

Момент инерции груза относительно оси ОО

$$I = I_1 + 2I_2 + 2I_3, \quad (1.19)$$

где I_1 – момент инерции цилиндра 3;

I_2 – момент инерции стержня 4;

I_3 – момент инерции диска 5.

Для моментов инерции I_1 , I_2 , I_3 имеем следующие формулы:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2. \quad (1.20)$$

$$I_2 = m_2 L_2 + \frac{m_2}{12} (l_2^2 + 3r_2^2), \quad (1.21)$$

$$I_3 = \left\{ L_3^2 + \frac{1}{12} [l_3^2 + 3(r_3^2 + r_2^2)] \right\}. \quad (1.22)$$

где m_1, r_1 – масса и радиус цилиндра 3;

m_2, r_2, l_2 – масса, радиус и длина стержня 4;

m_3, r_3, l_3 – масса, радиус и толщина диска 5;

L_2 – расстояние от оси ОО до центра масс стержня 4;

L_3 – расстояние от оси ОО до центра масс диска 5.

Масса системы

$$m = m_1 + 2m_2 + 2m_3. \quad (1.23)$$

Из (1.20–1.22) имеем:

$$I = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 2m_2 \left[L_2^2 + \frac{1}{12} (l_2^2 + 3r_2^2) \right] + \frac{1}{6} m_3 \left[l_3^2 + 3(r_3^2 + r_2^2) \right] + 2m_3 L_3^2. \quad (1.24)$$

Ход работы

Упражнение 1. Определение коэффициента Пуассона

1. Небольшим опусканием груза создать вертикальные колебания. Делать это необходимо осторожно, чтобы не сообщить системе крутильные колебания. С помощью секундомера измеряют время 10–15 полных колебаний и определяют период T_1 . Опыт повторить 3–5 раз. Результаты занести в таблицу 1.

2. Небольшим поворотом груза вокруг вертикальной оси создать крутильные колебания, измерить время 10–15 полных колебаний и определить их период. Следить за тем, чтобы не сообщить системе вертикальных колебаний. Результаты занести в таблицу 1.

3. Изменяя момент инерции груза, найти положение дисков L_3 , при котором разность периодов крутильных и вертикальных колебаний наибольшая. При этом условии найти период крутильных колебаний T_2 . Опыт повторить 3–5 раз. Результаты занести в таблицу 2. При изменении момента инерции груза необходимо следить за тем, чтобы его ось инерции совпадала с геометрической осью цилиндра. А для этого диски всё время должны находиться на одинаковом расстоянии от оси OO .

4. Экспериментальному определению подлежат величины $r_1, r_2, r_3, L_2, L_3, m_3, L_2, L_3, D$. При этом необходимо учесть, что величина L_3 меняется. Для определения массы m_3 диск снимают. Значения m_1 и m_2 даны в конце описания.

5. По полученным данным, пользуясь формулами (1.16), (1.23) и (1.24), вычислить коэффициент Пуассона. Результаты занести в таблицу 3.

6. Пункты 3, 4, 5 повторить для двух других значений L_3 .

7. Найти ошибку определения коэффициента Пуассона.

Упражнение 2. Проверка формулы периода биений

1. Убедиться, что с уменьшением разности частот при возбуждении крутильных колебаний всё более заметными становятся вертикальные колебания и биения.

2. К проверке формулы (1.18) приступать при отчётливом наблюдении биений. При этом не следует пользоваться очень близкими значениями частот крутильных и вертикальных колебаний.

3. При очень малых, осторожно вызываемых крутильных колебаниях определить их период T_2 , проделав опыт не менее трёх раз. Для периода вертикальных колебаний T_1 взять значение, полученное в предыдущем упражнении.

4. Рассчитать период биений τ_1 по формуле (1.18). Найти погрешность измерения τ_1 .

5. Не изменяя момента инерции груза, создать не очень малые вертикальные колебания. Измеряя секундомером время между двумя последовательными остановками груза при его крутильных колебаниях, определить период биений τ . Опыт повторить не менее 3 раз. Найти погрешность измерения τ .

6. Сравнить значение периода биений τ_1 , полученное по формуле (1.18), со значением периода биений τ , полученным экспериментально.

7. Повторить пункты 2–6 для трёх других значений момента инерции системы.

8. Сделать выводы.

ТЕМА 2. ТЕНЗОР И ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

1. Тензор инерции.
2. Главные оси тензора моментов инерции.
3. Эллипсоид инерции.

Основные понятия по теме

Момент инерции I_N некоторого тела относительно оси NN' , проходящей через его центр масс, связан с главными центральными моментами инерции I_X, I_Y, I_Z этого тела формулой

$$I_N = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \cos^2 \beta + I_Z \cos^2 \gamma, \quad (2.1)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ – направляющие косинусы оси NN' , т. е. косинусы углов между осью NN' и главными осями OX , OY и OZ тензора моментов инерции тела, как показано на рисунке 2.1.

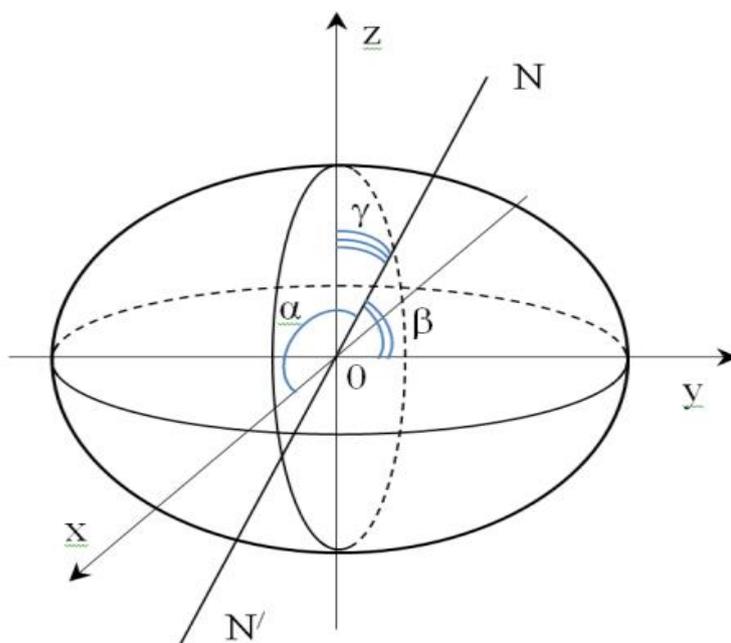


Рисунок 2.1 – Определение момента инерции относительно оси NN'

Преобразуем соотношение (2.1) к виду, удобному для экспериментальной проверки. Используя известную формулу для периода крутильных колебаний тела вокруг некоторой оси

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\delta}},$$

где I – момент инерции тела относительно этой оси;

δ – момент кручения подвеса, нетрудно получить следующие соотношения

$$I_X = \frac{T_X^2}{4\pi^2} \delta; I_Y = \frac{T_Y^2}{4\pi^2} \delta; I_Z = \frac{T_Z^2}{4\pi^2} \delta; I_N = \frac{T_N^2}{4\pi^2} \delta, \quad (2.1)$$

где T_X, T_Y, T_Z и T_N – периоды крутильных колебаний тела относительно его главных центральных осей и оси NN' .

Согласно рисунку 2.2, для направляющих косинусов оси NN' исследуемого параллелепипеда можем записать:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.2) и (2.3) в формулу (2.1) приходим к соотношению

$$T_N^2 = \frac{a^2 T_X^2 + b^2 T_Y^2 + c^2 T_Z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, задача проверки формулы (2.1), сводится к проверке выражения (2.4), устанавливающего связь между линейными размерами тела и периодами его крутильных колебаний относительно четырех осей, три из которых являются главными центральными осями.

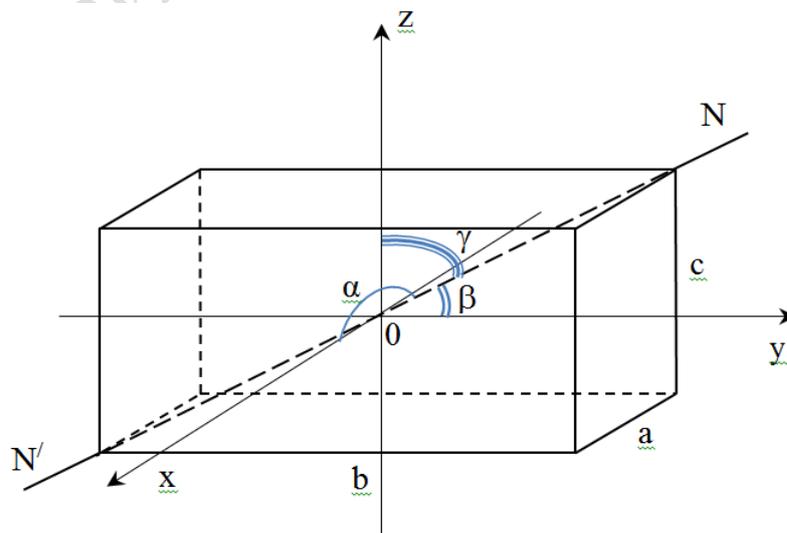


Рисунок 2.2 – К выводу формулы (2.4)

Практически для увеличения точности измеряются не периоды крутильных колебаний T_X , T_Y , T_Z и T_N , а продолжительность t_X , t_Y , t_Z и t_N нескольких полных колебаний. Искомые значения периодов могут быть найдены из простого соотношения

$$T = \frac{t}{n}, \quad (2.5)$$

где t – время, за которое совершается n полных колебаний.

Соотношение (2.1) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Изменяя ориентацию оси NN' и откладывая вдоль нее значение соответствующего момента инерции I_N , получим геометрическое место точек, образующих эллипсоид, получивший название эллипсоида тензора моментов инерции. Для изучения последнего удобно рассмотреть его сечения координатными плоскостями XOY , XOZ , и YOZ системы координат, образованной главными осями OX , OY , OZ .

Полагая в выражении (2.1) угол $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и учитывая возникающую при этом связь между углами α и β ($\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$), находим уравнение кривой

$$I = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha, \quad (2.6)$$

полученной сечением эллипсоида тензора моментов инерции плоскостью XOY . С учетом (2.2) уравнение (2.6) принимает вид

$$T^2 = T_X^2 \cos^2 \alpha + T_Y^2 \sin^2 \alpha. \quad (2.7)$$

Аналогично получают уравнения сечений изучаемого эллипсоида плоскостями:

YOZ :

$$T^2 = T_Y^2 \cos^2 \beta + T_Z^2 \sin^2 \beta. \quad (2.8)$$

ZOX :

$$T^2 = T_Z^2 \cos^2 \gamma + T_X^2 \sin^2 \gamma. \quad (2.9)$$

Измерив периоды крутильных колебаний T_X , T_Y , T_Z данного тела относительно его главных центральных осей и изменяя значения направляющих углов α , β и γ от 0 до 2π , с помощью соотношений (2.7–2.9) можно построить сечения эллипсоида тензора моментов инерции исследуемого тела и сделать выводы о его характере и особенностях.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое тензор моментов инерции? В чем физический смысл его компонентов?
2. Что такое главные оси тензора моментов инерции?
3. В чем проявляется связь момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, с главными центральными моментами инерции?
4. Что называется эллипсоидом инерции?
5. Зачем используемые в работе образцы сделаны массивными?

Лабораторная работа 2.1

Изучение тензора моментов инерции твердого тела

Цель работы: осуществить экспериментальную проверку формулы, связывающей момент инерции тела с его главными центральными моментами инерции и построить эллипсоиды тензора моментов инерции данных тел.

Приборы и принадлежности: установка FPM-05, набор тел, штангенциркуль.

Описание установки

Для выполнения работы используется типовая установка FPM-05 (крутильный маятник), входящая в состав комплекта приборов для лабораторного практикума по курсу «Физические основы механики». Внешний вид установки показан на рисунке 2.3.

На основании 1, оснащенном четырьмя ножками с регулируемой высотой, расположены: миллисекундомер 2 и вертикальная колонна 3, на которой укреплены кронштейны 4, 5 и 6. Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 10. На кронштейне 5 укреплена стальная плита 11, на которой расположены фотоэлектрический датчик 9, электромагнит 8 и шкала 12, служащая для определения положения электромагнита относительно фотодатчика. Электромагнит 8 позволяет удерживать рамку 10 в заданном положении. Для этого необходимо нажать клавишу «Сеть». После освобождения рамки нажатием клавиши «Пуск», она будет совершать крутильные колебания, число и продолжительность которых подсчитывается миллисекундомером 2 до момента нажатия клавиши «Стоп». Конструкция рамки 10 позволяет закрепить исследуемое тело 7 при помощи подвижной балки, которая перемещается по вертикальным направляющим. Исследу-

емое тело 7 представляет собой стальной прямоугольный параллелепипед со срезанными углами. Отверстия в центрах его граней направлены вдоль главных осей инерции OX , OY , OZ как показано на рисунке 2.2, а отверстия в углах – по диагоналям параллелепипеда.

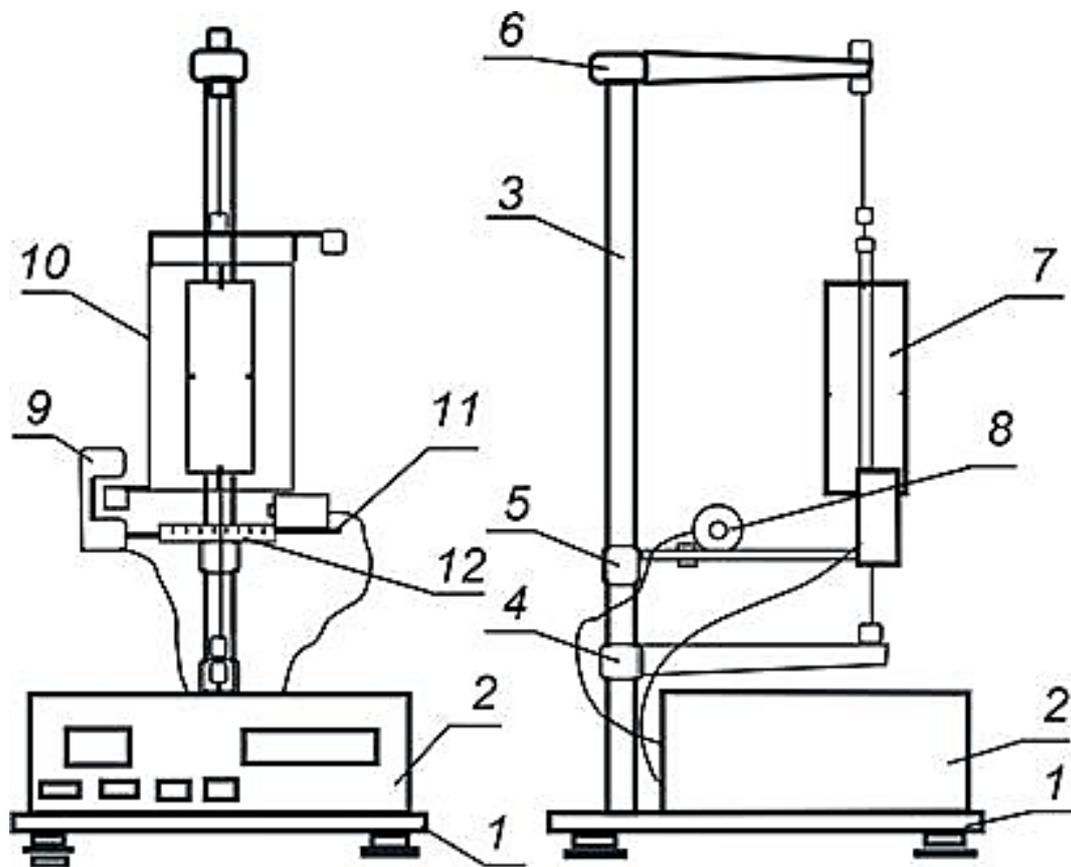


Рисунок 2.3 – Установка FPM-05 (крутильный маятник)

Ход работы

Упражнение 1. Проверка формулы, связывающей моменты инерции тела с его главными центральными моментами инерции

1. Штангенциркулем измерить длину a , ширину b и высоту c исследуемого тела.

2. Проверив вертикальность колонны 3, установить электромагнит 8 в заданном положении на платформе и закрепить его.

3. Последовательно укрепляя исследуемое тело в рамке 10, на разных осях измерить длительность t_X , t_Y , t_Z и t_N 10–15 полных колебаний. Для каждого положения тела измерения выполнить не менее 5 раз.

4. Определить периоды T_X , T_Y , T_Z и T_N крутильных колебаний, используя соотношение (2.5).

5. Проверить справедливость равенства (2.4). При сравнении его обеих частей следует учитывать погрешность выполненных измерений.

Упражнение 2. Изучение эллипсоида тензора моментов инерции

1. Изменяя значения углов α , β и γ от 0 до 2π в уравнениях (2.7–2.9), построить кривые образованные сечениями эллипсоида тензора моментов инерции координатными плоскостями для исследованного тела. Сечения строить в полярной системе координат, считая полярным радиусом T^2 .

2. Выполнить измерения T_x , T_y , T_z для двух других тел согласно методике, описанной в пунктах 2–4 упражнения 1.

3. Выполнить пункт 1 для исследованных тел.

4. Сравнить полученные результаты и сделать выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элементарный учебник физики : в 3 т. / под ред. Г. С. Ландсберга. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – Т. 1: Механика. Теплота. Молекулярная физика. – 616 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – Т. 1 : Механика. – 560 с.
3. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности : учеб. для студентов вузов / А. Н. Матвеев. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2003. – 432 с.
4. Стрелков, С. П. Механика : учебник для студентов вузов / С. П. Стрелков. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2005. – 560 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для студентов вузов : в 4 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2009. – 528 с.
6. Иродов, И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1997. – 248 с.
7. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – М. : Мир и образование, 2006. – 1056 с.
8. Никитин, С. Ю. Механика : учебно-методическое пособие / С. Ю. Никитин, С. С. Чесноков ; под ред. В. А. Маркова. – М. : Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006. – 300 с.
9. Шолох, В. Ф. Физика. Механика. Практикум : учеб. пособие / В. Ф. Шолох. – Минск : ИВЦ Минфина, 2013. – 231 с.

Производственно-практическое издание

**Шолох Владимир Федорович,
Самофалов Андрей Леонидович,
Тихова Елена Леонидовна**

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Практическое пособие

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 14.05.2020. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,78.

Тираж 25 экз. Заказ 219.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 .

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель

**В. Ф. ШОЛОХ,
А. Л. САМОФАЛОВ,
Е. Л. ТИХОВА**

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Гомель
2020

