АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ



# Атомная энергия





ЯНВАРЬ
ТОМ 14 1963 ВЫП. 1

# ВИНТОВАЯ И ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ *

*Б. Ленерт*

*(Королевский технологический институт, Стокгольм, Швеция)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При определенных условиях плазма может удерживаться магнитным полем в поперечном к нему направлении. В частном случае, когда давление плазмы мало по сравнению с плотностью энергии магнитного поля, последнее в присутствии плазмы мало отличается от поля в вакууме. Тогда любое поперечное движение плазмы, заметно меняющее магнитное поле, будет вызывать увеличение его энергии, значительно превышающее энергию плазмы. Поэтому такие движения энергетически невозможны.

Однако даже в плазме низкого давления возможны другие виды движений, в результате которых она может уйти поперек поля. Эти движения не сопровождаются изменением магнитного поля во времени, так что электрический дрейф частиц плазмы вызывается не вихревым электрическим полем, а полем, появляющимся в результате разделения зарядов в плазме.

В плазме с неоднородной плотностью разделение зарядов может возникнуть в двух случаях. Во-первых, когда распределения плотностей ионов и электронов дрейфуют поперек магнитного поля с различной скоростью и в то же время имеется поперечный градиент плотности. Такие условия имеют место в случае желобковой неустойчивости, впервые рассмотренной Розенблютом и Лонгмайером [1]. Во-вторых, разделение зарядов может возникнуть, когда скорости ионного и электронного распределений вдоль магнитного поля различны. В этом случае должен также существовать градиент плотности как вдоль, так и поперек магнитного поля. Примером этого являются винтовые возмущения, которые могут стать неустойчивыми за счет продольного движения. Это явление подробно рассмотрели Б. Б. Кадомцев и А. В. Недоспасов [2]. В дальнейшем неустойчивости такого вида изучались Хо и Ленертом [3] и Б. Б. Кадомцевым [4].

Цель настоящей работы — рассмотрение простых примеров, которые указывают на тесную связь между винтовой и желобковой неустойчивостями. Дается также обзор различных механизмов, влияющих на образование пространственного заряда, таких, как дрейфовое движение под действием силы тяжести, центробежных сил, сил инерции при магнитном сжатии и кориолисовых сил, дрейф в неоднородном магнитном поле и эффект конечного ларморовского радиуса. Кратко рассмотрено также влияние вязкости.

## 2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Настоящий анализ основан на следующих допущениях:

1. Исходное невозмущенное состояние плазмы стационарно. Она удерживается магнитным полем **B**.

2. Плазма находится в поле силы тяжести $g = -\nabla\Phi_g$ и может вращаться вокруг оси симметрии с постоянной и однородной угловой скоростью $\Omega$. Мы рассмотрим только такие случаи, когда $g$ перпендикулярно, а $\Omega$ параллельно магнитному полю **B**.

3. Угловая скорость $\Omega$ значительно меньше циклотронных частот ионов и электро-

* Статья представлена акад. Х. Альфвеном. Перевод с английского.

нов $\omega_i = \frac{eB}{m_i}$, $\omega_e = \frac{eB}{m_e}$ (здесь $m_i$ — масса иона; $m_e$ — масса электрона).

4. В невозмущенном состоянии плазма однородна в направлении вдоль силовых линий магнитного поля. Поверхности постоянной плотности и энергии частиц для рассматриваемых в работе случаев перпендикулярны $\mathbf{g}$ и центробежной силе, возникающей за счет $\mathbf{\Omega}$ и $\nabla B$.

5. Используется система отсчета, в которой центр масс плазмы находится в покое. Затухание малых возмущений из-за омических потерь считается пренебрежимо малым.

6. На стационарное состояние накладываются малые возмущения. При этом значения плотности $n_i$ и $n_e$ и скорости $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_e$ ионов и электронов отклоняются от невозмущенных значений $n_{i0} = n_{e0} = N$, $\mathbf{v}_{i0}$ и $\mathbf{v}_{e0}$. Малые возмущения определим как $\tilde{n}_i = n_i - N$, $\tilde{n}_e = n_e - N$, $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i0}$, $\tilde{\mathbf{v}}_e = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_{e0}$. Соответственно тензоры давлений в невозмущенном состоянии $\pi_{i0}$ и $\pi_{e0}$ в возмущенном состоянии будут равны $\pi_i = \pi_{i0} + \tilde{\pi}_i$ и $\pi_e = \pi_{e0} + \tilde{\pi}_e$. И, наконец, электрическое поле меняется от невозмущенного значения $\mathbf{E}_0$ до значения $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}}$. Возмущения принимаются достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь нелинейными эффектами.

7. Периоды циклотронного вращения $2\pi/\omega_i$ и $2\pi/\omega_e$ предполагаются малыми по сравнению с характерными временами, в течение которых возмущения заметно меняются, а ларморовские радиусы $a_i$ и $a_e$ ионов и электронов много меньше характерного размера возмущений $\tilde{L}_c$.

8. Плотность частиц достаточно велика, чтобы плазму можно было считать квазинейтральной, т. е. чтобы выполнялось условие $|\tilde{n}_i - \tilde{n}_e| \ll |\tilde{n}_i + \tilde{n}_e|$. Предположим, что диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_0$ мала по сравнению с величиной $Nm_i/B^2$.

9. Макроскопические движения, возникающие в результате возмущений, лежат в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, т. е. $\tilde{\mathbf{v}}_i = \tilde{\mathbf{v}}_{i\perp}$ и $\tilde{\mathbf{v}}_e = \tilde{\mathbf{v}}_{e\perp}$. (Индексы ($\perp$) и ($\parallel$) во всей работе будут обозначать соответственно перпендикулярное и параллельное магнитному полю $\mathbf{B}$ направления.)

10. Скорости $\mathbf{v}_{i0\parallel}$ и $\mathbf{v}_{e0\parallel}$ вдоль силовых линий магнитного поля или равны нулю, или удовлетворяют условиям $\mathrm{div}\ \mathbf{v}_{i0\parallel} = \mathrm{div}\ \mathbf{v}_{e0\parallel} = 0$. Эти скорости поддерживаются продольным электрическим полем $\mathbf{E}_{0\parallel} = eN\eta\ (\mathbf{v}_{i0\parallel} - \mathbf{v}_{e0\parallel})$. Поле $\mathbf{E}_{0\parallel}$ очень мало, так как согласно условию 5 исчезающе мало удельное сопротивление $\eta$.

11. Так как $m_e$ значительно меньше $m_i$, то пренебрежем инерцией электронов, но учтем силы инерции, действующие на ионы.

12. Давление плазмы будем считать малым по сравнению с плотностью энергии магнитного поля. Ограничимся рассмотрением таких возмущений, при которых ионизованное вещество движется поперек магнитного поля и в то же время не меняет его. Таким образом, мы исключим из рассмотрения возмущения магнитогидродинамического типа, сопровождающиеся изменением энергии магнитного поля [5]. Следовательно, пренебрежем изменением магнитного поля, принимая $\mathrm{rot}\ \mathbf{B} \simeq 0$ и $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, и электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ выразим через потенциал $\Phi$.

## 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Закон сохранения массы и заряда выражается уравнением

$$-\frac{\partial n_\nu}{\partial t} = \mathrm{div}\,(n_\nu \mathbf{v}_\nu). \tag{1}$$

Здесь и везде дальше индекс $\nu$ обозначает ионы ($\nu = i$) и электроны ($\nu = e$).

Уравнение баланса сил, действующих на элемент объема ионного и электронного газа, имеет вид

$$n_\nu m_\nu \left[\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla)\,\mathbf{v}_\nu\right] = q_\nu n_\nu (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}) + n_\nu m_\nu \mathbf{g} - \mathrm{div}\,\pi_\nu + \frac{1}{2} n_\nu m_\nu \nabla (\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\varrho})^2 + 2 n_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu \times \mathbf{\Omega}, \tag{2}$$

где $q_\nu$ — электрический заряд; $\boldsymbol{\varrho}$ — радиус-вектор элемента жидкости, выходящий из начала координат, расположенного на оси вращения.

Умножим уравнение (2) векторно на вектор $\mathbf{B}$ и разрешим его относительно величины $n_\nu \mathbf{v}_{\nu\perp}$. После ряда вычислений получим

$$n_\nu \mathbf{v}_{\nu\perp} = n_\nu \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} + n_\nu m_\nu \left[\mathbf{g} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\varrho})^2 + 2\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{\Omega}\right] \times \frac{\mathbf{B}}{q_\nu B^2} - \mathrm{div}\,\pi_\nu \times \frac{\mathbf{B}}{q_\nu B^2} - n_\nu m_\nu \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial t} \times \frac{\mathbf{B}}{q_\nu B^2}. \tag{3}$$

Вследствие указанных условий 5, 6, 11 вклад выражения $(\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla)\mathbf{v}_\nu$ в инерционный член уравнения (3) несуществен.

Отметим, что Фюрс [6] недавно рассмотрел неустойчивости, которые могут возникать в плазме с конечным удельным сопротивлением и конечной массой носителей тока. Такие эффекты в нашем рассмотрении не учитываются.

## 4. НЕВОЗМУЩЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

В соответствии с условием 5 выберем систему отсчета, в которой центр масс находится в покое. Так как $m_e \ll m_i$, то приближенно можно считать, что в этой системе газ ионов находится в покое ($\mathbf{v}_{i0} \simeq 0$). Тогда невозмущенное уравнение (2) для ионного газа можно записать в виде уравнения для поперечного компонента электрического поля $\mathbf{E}_{0\perp}$.

$$\mathbf{E}_{0\perp} \simeq -\frac{m_i \mathbf{g}}{e} + \left(\frac{1}{eN}\right) \operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_{i0} - \left(\frac{m_i}{2e}\right) \nabla (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\varrho})^2. \tag{4}$$

Соответствующее уравнение (2) для электронного газа будет содержать скорость $\mathbf{v}_{e0}$. Сила, действующая на ток электронов со скоростью $\mathbf{v}_{e0}$, в невозмущенном состоянии уравновешивает гравитационную и центробежную силы и градиент давления.

## 5. ВОЗМУЩЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Уравнение непрерывности (1) можно записать в виде

$$-\frac{\partial n_\nu}{\partial t} = \operatorname{div}(n_\nu \mathbf{v}_{\nu\perp}) + \mathbf{v}_{\nu 0\parallel} \cdot \nabla n_\nu. \tag{5}$$

Здесь использованы условия 9 и 10. Подставим теперь невозмущенное электрическое поле (4) и возмущение $-\nabla\tilde{\Phi} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$ в уравнение (3) и затем используем метод последовательного приближения, в котором выражение для $\mathbf{v}_{\nu\perp}$, определяемое уравнением (3), подставляется в инерционный член того же самого уравнения. Этот метод применим вследствие условия 7. Совместно с уравнением (5), используя условия 3, 4, 7, 9, 11 и 12, получим выражение

$$-\frac{\partial n_\nu}{\partial t} - \mathbf{v}_{\nu 0\parallel} \cdot \nabla n_\nu = \operatorname{div}(n_\nu \mathbf{v}_{\nu\perp}) = \left[\nabla\left(\frac{n_\nu}{B^2} \times \mathbf{B}\right] \cdot \nabla\tilde{\Phi} + \left(\frac{1}{eB^2}\right)(m_\nu - m_i)\left[\mathbf{g} + \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\varrho})^2\right] \times \mathbf{B} \cdot \nabla n_\nu + 2\left(\frac{m_\nu}{q_\nu}\right) \operatorname{div}\left[\left(\frac{n_\nu}{B^2}(\mathbf{v}_\nu \times \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{B}\right] + \left(\frac{2}{q_\nu B^3}\right)(\mathbf{B} \times \nabla \mathbf{B}) \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_\nu - \left(\frac{1}{q_\nu B^2}\right) \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_\nu) + \operatorname{div}\left(n_\nu \operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_{i0} \times \frac{\mathbf{B}}{eNB^2}\right) - \operatorname{div}\left\{\left(\frac{n_\nu m_\nu}{q_\nu B^2}\right)\left[\nabla\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{q_\nu n_\nu} \operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_\nu\right)\right]\right\} + \operatorname{div}\left\{\left(\frac{n_\nu m_\nu^2}{e^2 B^2}\right)\left[2\left(\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial t} \times \boldsymbol{\Omega}\right) - \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\nu}{\partial t^2}\right]\right\}. \tag{6}$$

Второй член левой части уравнения (6) описывает продольный перенос поверхностей постоянной плотности. С ним связана винтовая неустойчивость. В правой части этого уравнения первый член дает изменение плотности частиц в результате электрического дрейфа поперек поверхностей постоянной плотности. В этом члене учтен эффект магнитного сжатия. За желобковую неустойчивость ответственны второй и четвертый члены. Они учитывают возмущение плотности в результате поперечного дрейфа поверхностей постоянной плотности в поле силы тяжести и в поле центробежной силы и в неоднородном магнитном поле соответственно. Влияние кориолисовой силы учтено в третьем члене. Эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса и вязкостной диссипацией, заключены в пятом члене. Невозмущенный тензор давления частично уравновешивается невозмущенным электрическим полем, вызывающим соответствующий ему дрейф и перенос распределения плотности. Это отражено в шестом члене. Дрейф под действием силы инерции, возникающей вследствие изменения во времени электрического и ларморовского дрейфов, учтен в седьмом члене. Первое слагаемое этого члена можно интерпретировать также как отражение эффекта электрической поляризации, связанного с инерцией ионов. Наконец, последний член уравнения (6) содержит члены более высокого порядка малости и в соответствии с условиями 3 и 7 может быть опущен.

Проведем подробное исследование винтовой и желобковой неустойчивостей для нескольких специальных случаев. Изложенное ниже рассмотрение не претендует на исчерпывающий анализ всех возможных видов винтовой и желобковой неустойчивостей системы. Наша цель — только показать, какие физические механизмы ответственны за эти неустойчивости, и выявить такие эффекты, которые могут увеличивать или подавлять скорость развития указанных неустойчивостей. Будут рассмотрены только локальные возмущения.

## 6. ВИНТОВАЯ И ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ МАЛОГО ДАВЛЕНИЯ

Направим ось $z$ цилиндрической системы координат $(r,\ \varphi,\ z)$ вдоль направления однородного магнитного поля. Примем, что $g = 0$, и предположим, что давление и ларморовские радиусы ионов и электронов достаточно малы, чтобы в уравнении (6) можно было пренебречь всеми членами, содержащими тензор давления. Роль эффектов, связанных с конечностью ларморовских радиусов, будет выяснена в разделе 8. Введем обозначение

$$\Lambda_\nu = 1 + 2m_\nu \frac{\Omega}{eB}, \tag{7}$$

где $\Omega$ — $z$-компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ (положительный или отрицательный).

Теперь уравнение (6) можно привести к виду

$$-\Lambda_\nu\left(\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \mathbf{v}_{\nu 0\parallel}\nabla n_\nu\right) = \Lambda_\nu \operatorname{div}(n_\nu \mathbf{v}_{\nu\perp}) =$$
$$= \varkappa\cdot\nabla\bar{\Phi} + \left(\frac{1}{2eB^2}\right)(m_\nu - m_i)[\nabla(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\varrho})^2\times\mathbf{B}]\times$$
$$\times\nabla n_\nu - \operatorname{div}\left[\left(\frac{Nm_\nu}{eB^2\Lambda_\nu}\right)\nabla\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial t}\right]. \tag{8}$$

Комбинируя уравнение (8) для ионов и электронов, после простых вычислений получим

$$\left(\frac{\varkappa}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{i0z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\varphi} -$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{e0z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\Omega^2}{\omega_i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\left[\left(\frac{\varkappa}{r\Lambda_i}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi} +\right.$$
$$\left. + \operatorname{div}\left(\frac{N}{\omega_i B\Lambda_i^2}\nabla\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial t}\right)\right] = 0, \tag{9}$$

где $\varkappa = \frac{dN}{Bdr}$ и принято, что $\Lambda_e = 1$, поскольку $\overline{m}_e \ll \overline{m}_i$. Уравнение Пуассона на основании условия 8 дает $n_i \simeq n_e$ в уравнении (8). Уравнения, аналогичные уравнению (9), могут быть написаны и для возмущений плотности $\widetilde{n}_r$.

Уравнение (9) значительно упростится, если рассматривать только возмущения со слабой радиальной зависимостью. Пусть все возмущенные величины меняются как $\exp[i(m_\varphi\varphi + k_z z + \omega t)]$. Такие возмущения имеют форму винтовой лестницы. Этот специальный случай не охватывает всех возможных мод винтовых возмущений, однако на его примере можно разобрать все главные механизмы, определяющие их нарастание. Из уравнения (9) получим дисперсионное соотношение для такого вида возмущений

$$\omega = -\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\alpha(1-\Gamma)^{1/2}, \tag{10}$$

где

$$\alpha = k_z v_{e0z} + m_\varphi\frac{\Omega^2}{\omega_i} + 2r\varkappa\Omega\frac{\Lambda_i B}{Nm_\varphi} \tag{11}$$

и

$$\frac{1}{4}\alpha^2\Gamma = \omega_i k_z\varkappa\left(v_{i0z} - v_{e0z}\Lambda_i^{-1}\right)\frac{B\Lambda_i^2 r}{Nm_\varphi} -$$
$$- r\varkappa\Lambda_i\Omega^2\frac{B}{N}. \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) не зависят от $r$, когда $N = \text{const}\ r^{\text{const}}$.

При $\Gamma > 1$ система неустойчива и возмущения осциллируют с экспоненциально нарастающей амплитудой. При $\Gamma < 1$ система устойчива относительно возмущений рассматриваемого вида и амплитуда колебаний ограничена. Влияние кориолисовой силы описывается последним членом уравнения (11), который для рассматриваемого вида возмущений всегда дает стабилизирующий эффект при условии, что его величина существенно больше, чем член $k_z v_{i0z}$.

Для иллюстрации полученного результата рассмотрим предельные случаи.

1. При отсутствии вращения имеем

$$\Gamma = 4\omega_i k_z(v_{i0z} - v_{e0z})\, r\,\frac{\left(\frac{dN}{dr}\right)}{Nm_\varphi(k_z v_{e0z})^2};$$
$$\alpha = k_z v_{e0z}. \tag{13}$$

Здесь величина $\frac{1}{|k_z(v_{i0z} - v_{e0z})|}$ — время, за которое распределение плотности электронов сместится относительно распределения плотности ионов вдоль оси $z$ на одну длину волны $2\pi/k_z$. В большинстве интересных случаев этот интервал времени значительно больше, чем период лармаровского вращения иона $2\pi/\omega_i$. Обычно также $|v_{e0z}| \gg |v_{i0z}|$.

Для не очень гладких распределений плотности $N$ абсолютная величина $\Gamma$ может быть достаточно велика. Тогда всегда будут существовать винтовые возмущения с такими знаками $k_z$ и $m_\varphi$, что величина $\Gamma$ будет положительной, а система неустойчивой. Для $(v_{i0z} - v_{e0z}) < 0$, $\frac{dN}{dr} < 0$, $m_\varphi > 0$ и $k_z > 0$ получим $\Gamma > 0$, и будут неустойчивы левовинтовые возмущения. Подобный результат ранее был получен Б. Б. Кадомцевым и А. В. Недоспасовым [2] для частично ионизованного газа. В нашем случае полностью ионизованного газа за винтовую неустойчивость ответствен тот же самый физический механизм.

Содержание настоящего раздела представляет собой простую иллюстрацию метода получения неустойчивости такого вида.

Следует отметить, что винтовая неустойчивость получает энергию из продольного движения электронов и ионов со скоростями $v_{e0z}$ и $v_{i0z}$, которые были зафиксированы в нашем анализе. Таким образом, система не изолирована и в нее поступает энергия из внешнего источника.

При очень плавном распределении плотности модуль $\Gamma$ может стать меньше единицы и рассматриваемые возмущения будут устойчивы. В таких условиях возмущение не успевает развиться, так как оно быстро сносится продольным движением электронов. Влияние этого эффекта на желобковую неустойчивость рассматривалось ранее [7].

2. Если продольное движение отсутствует и $\Omega \ll \omega_i$ согласно условию 3, то уравнения (11) и (12) сводятся к виду

$$\Gamma = -\frac{Nm_\varphi^2}{r\left(\frac{dN}{dr}\right)}; \quad \alpha = 2\Omega r \frac{\left(\frac{dN}{dr}\right)}{Nm_\varphi}. \quad (14)$$

Когда распределение плотности очень гладкое и она падает по радиусу, то значение $\Gamma$ положительно и много больше единицы. Это «гравитационная» неустойчивость, обусловленная центробежными силами. Скорость роста ее определяется характерным временем $\left[\frac{N}{\Omega^2 r \frac{dN}{dr}}\right]^{1/2}$, как и следовало ожидать [1, 8]. Однако, если учесть второй член в правой части уравнения (11), то определенные моды станут устойчивыми вследствие эффекта сноса возмущений, отмеченного в первом случае.

При крутых распределениях плотности модуль $\Gamma$ становится меньше единицы. В этом случае рассматриваемый вид возмущений стабилизируется силой Кориолиса, даже если плотность падает по радиусу [9].

Следует отметить, что настоящую задачу можно решить точно без наложения ограничений условиями 3 и 7. Принимая $m_z = 0$ и пренебрегая членами, содержащими давление ионов и электронов, комбинируя уравнения (1) и (2), получим дисперсионное соотношение

$$\omega^3 - \left(\frac{m_\varphi N\omega_i}{rN'}\right)\omega^2 - \Omega\left[2(\omega_i + 2\Omega) + \frac{m_\varphi^2 \Omega N}{rN'}\right]\omega + m_\varphi\Omega^2(\omega_i + 2\Omega) = 0, \quad (15)$$

где $N' = \frac{dN}{dr}$. Три корня этого уравнения $\omega_{1,2,3}$ можно найти легко. В пределе, когда $\left|\frac{\Omega}{\omega_i}\right| \ll 1$, получим $\omega_1 \simeq \frac{m_\varphi N\omega_i}{rN'}$. Далее $\omega_2$ и $\omega_3$ совпадают с решением уравнений (10) и (14). Таким образом, точное решение приводит к тем же условиям устойчивости, что и в указанных выражениях (10) и (14).

## 7. УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНОГО УДЕРЖАНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим цилиндрический столб плазмы, удерживаемый магнитным полем линейного тока, находящегося на оси столба. Предполагается, что невозмущенные и возмущенные величины постоянны вдоль магнитных силовых линий. Ограничимся рассмотрением возмущений с характерными размерами, много меньшими характерных размеров невозмущенной плазмы и магнитного поля.

Рассмотрим лишь эффекты наинизшего порядка и предположим, что тензор давлекий диагонален и изотропен, т. е.

$$\operatorname{div} \pi_\nu = \nabla_\perp p_\nu \tag{16}$$

в соответствии с условием 4. Для адиабатического процесса имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\nu \cdot \nabla\right)\left(\frac{p_\nu}{n_\nu^{5/3}}\right) = 0. \tag{17}$$

Можно достичь существенного упрощения и в то же время сохранить основные черты задачи, если принять, что в невозмущенной плазме давление $p_{\nu 0}$ и плотность $N$ связаны соотношением $p_{\nu 0} = \mathrm{const}\ N^{5/3}$. Тогда из уравнения (17) можно получить следующие соотношения между возмущениями плотности и давления:

$$\tilde{p}_\nu = c_\nu \tilde{n}_\nu; \quad c_\nu = \frac{5}{3}\frac{p_{\nu 0}}{N} \tag{18}$$

во всех точках пространства.

Введем цилиндрическую систему координат $(r, \varphi, z)$, направив ось $z$ вдоль оси конфигурации. Далее подставим выражения (16) и (18) в уравнение (6). После некоторых преобразований, используя условия 4, 8, 9, 11 и 12, получим

$$\left[\nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (u_{Biz} - u_{Bez})\nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t} + G_{ie}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Phi = 0, \tag{19}$$

где

$$\mathbf{u}_{B\nu} = \frac{2c_\nu(\mathbf{B}\times\nabla B)}{q_\nu B^3}; \tag{20}$$

$$G_{ie} = -\omega_i\left(\frac{B^2}{N}\right)(u_{Biz} - u_{Bez})\left(\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{N}{B^2}\right). \tag{21}$$

Для нормальных мод специального вида $\exp[i(k_z z + \omega t)]$ получим решение, аналогичное уравнению (10), где в этом случае

$$\alpha = k_z(u_{Biz} - u_{Bez}); \quad \frac{1}{4}\alpha^2\Gamma = G_{ie}. \tag{22}$$

Рассмотрим два случая:

1. Если магнитное поле меняется значительно медленнее, чем плотность, то знак $\Gamma$ будет определяться знаком выражения $(u_{Biz} - u_{Bez})\frac{dN}{dr}$. Когда градиенты магнитного поля и плотности направлены в противоположные стороны, как в ловушке с остроугольной геометрией, значение $\Gamma$ отрицательно и всегда имеет место устойчивость. В противном случае, как в ловушке с магнитными пробками, устойчивость существует лишь при достаточно малых значениях $dN/dr$. При бо́льших значениях $dN/dr$, когда $\Gamma$ превышает единицу, система становится неустойчивой, возникают колебания с экспоненциально нарастающей амплитудой с характерным временем роста $\left[N/\omega_i(u_{Biz} - u_{Bez})\frac{dN}{dr}\right]^{1/2}$, аналогичным найденному в разделе 6 (второй случай) для вращающейся плазмы.

2. Если магнитное поле меняется по радиусу так же, как плотность, или даже быстрее, то на результат будут влиять конкретные условия магнитного удержания. Заметим, что при малом давлении решение уравнения (6) в нулевом приближении есть $\frac{n_\nu}{B^2} = \mathrm{const}$. Отсюда легко понять, что поверхности постоянной плотности в общем случае перемещаются со скоростью, отличной от макроскопической скорости вещества и скорости отдельных частиц [10]. Поэтому теперь за неустойчивость будут ответственны и другие физические механизмы. Сказанное станет очевидным, если предположим на момент, что $N/B^2$ постоянно по всей плазме. Тогда поверхности постоянной плотности не будут искажаться для любого движения со скоростью $E\times B/B^2$.

В этом случае также всегда существует устойчивость, если значения $dN/dr$ и $dB/dr$ имеют разные знаки. Если у $dN/dr$ и $dB/dr$ одинаковые знаки, устойчивость при удержании магнитным полем существует только при $\left|\frac{B}{(dB/dr)}\right| < \left|2\frac{N}{(dN/dr)}\right|$. Это означает, что для выбранного магнитного поля (линейного тока) $N$ должно падать медленнее, чем $1/r_2$.

## 8. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОГО ЛАРМОРОВСКОГО РАДИУСА

Вернемся к рассмотрению гравитационной неустойчивости плазмы в поле силы тяжести $\mathbf{g}$ и центробежной силы, действующих под прямым углом к однородному магнитному полю, но учтем эффект конечного ларморовского радиуса. Ниже рассмотрим также возмущения, характерная длина волны которых $\bar{L}_c$ может быть больше характерной длины изменения невозмущенной плотности. Как показал Маршалл [11] (см.

также [12, 13]), тензор давлений имеет поперечные компоненты ($\nu = i, e$):

$$\pi_{\nu xx} = p_{\nu\perp} - \frac{1}{4} eBn_\nu a_\nu^2 \left(\frac{\partial v_{\nu y}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\nu x}}{\partial y}\right); \quad (23)$$

$$\pi_{\nu yy} = p_{\nu\perp} + \frac{1}{4} eBn_\nu a_\nu^2 \left(\frac{\partial v_{\nu y}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\nu x}}{\partial y}\right), \quad (24)$$

$$\pi_{\nu xy} = \pi_{\nu yx} = \frac{1}{4} eBn_\nu a_\nu^2 \left(\frac{\partial v_{\nu x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{\nu y}}{\partial y}\right), \quad (25)$$

в координатной системе $(x, y, z)$ с осью $z$ вдоль $\mathbf{B}$. Величина $a_\nu^2 = \frac{2K_{\nu\perp}}{m_\nu \omega_\nu^2}$ есть квадрат среднего ларморовского радиуса. Так как $a_e^2$ обычно значительно меньше $a_i^2$, то членами с $a_e^2$ в тензоре давления электронного газа можно пренебречь.

В этом разделе рассмотрим два случая. Первый относится к плазме, вращающейся вокруг оси, которая совпадает с магнитной силовой линией и является осью $z$ цилиндрической системы координат $(r, \varphi, z)$. Возможно также наличие поля силы тяжести $\mathbf{g}$ в направлении $\mathbf{r}$. Будем пользоваться системой отсчета, определенной условием 5, в которой ионы приближенно находятся в покое, так как $m_i \gg m_e$. В этой системе уравнение движения ионов можно записать в виде, аналогичном уравнению в невращающейся системе координат, если в последнем произвести замену $\mathbf{B} \to \mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \frac{2m_i \mathbf{\Omega}}{e}$, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^* = -\nabla\left(\Phi - \Omega r A_\varphi - \frac{m_i \Omega^2 r^2}{2e}\right)$, где $A_\varphi$ — компонент магнитного вектора потенциала [14]. Поэтому во вращающейся системе координат можно пользоваться выражениями (23) — (25) для ионного тензора давления, если заменить в них $\mathbf{B}$ на $\mathbf{B}^*$.

Второй случай — случай плоской геометрии, где плазма удерживается магнитным полем от падения в поле силы тяжести в $y$-направлении прямоугольной системы координат $(x, y, z)$. Результаты во втором случае легко получить, произведя замену $\frac{\partial}{\partial r} \to \frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \to -\frac{\partial}{\partial x}$.

Примем, что в невозмущенном состоянии поперечный компонент ионного и электронного тензоров давления вырождается в скаляры $p_{i\perp}$ и $p_{e\perp}$. Согласно условию 4, как возмущенный, так и невозмущенный компоненты тензора давления постоянны вдоль магнитного поля. Для простоты рассмотрим устойчивость линейного распределения невозмущенной плотности, так что вторая и все старшие производные от плотности $N$ исчезнут. Исключим из рассмотрения также область, близкую к оси симметрии. Далее рассмотрим лишь возмущение со слабой радиальной зависимостью. Таким образом, возмущения будут иметь вид плоских языков, протяженных в радиальном направлении.

Так как магнитное поле и $\mathbf{\Omega}$ постоянны, то из сохранения адиабатического инварианта $K_{i\perp}/B^*$ для ионов следует, что поперечную энергию теплового движения ионов можно записать в виде

$$K_{i\perp} = K_{i0\perp}(1 + \theta_g). \quad (26)$$

Здесь $\theta_g$ — отклонение от адиабатической инвариантности — не ниже, чем в первом порядке по параметру $a_i/\tilde{L}_c$. Величину $K_{i0\perp}$ будем считать постоянной в пространстве.

При этих условиях уравнения (23) — (25) дадут

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{rot}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{\pi}_i) = \left(\frac{m_i K_{i0\perp}}{2eB^*}\right)[N\nabla^2(\mathrm{div}\, \mathbf{v}_i) + 2(\nabla^2 \mathbf{v}_i) \cdot \nabla N]. \quad (27)$$

Так как $p_{i\perp} = n_i K_{i\perp}$, то из уравнений (26) и (3) следует, что в нулевом приближении $\mathrm{div}\, v_i = 0$. Поэтому во втором порядке в выражении (27) в правой части останется только второе слагаемое и

$$\left(\frac{1}{eB^2}\right)\mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{\pi}_i) = -\left(\frac{a_i^2}{2\Lambda_i^2 B r^3}\right)\left(\frac{dN}{dr}\right)\frac{\partial^3 \tilde{\Phi}}{\partial \varphi^3}, \quad (28)$$

где значение $\Lambda_i$ определено уравнением (7).

Подставляя (28) в (6) и принимая $\mathbf{v}_{\nu 0\parallel} = 0$ и $\nabla B = 0$, получим для ионов и электронов два уравнения, из которых после некоторых преобразований можно получить уравнение для потенциала $\tilde{\Phi}$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial \varphi^2} - \frac{u_g + u_f - u_K + u_a}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial t\, \partial \varphi^3} - C\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \varphi} + \frac{G_{iz}}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{u_a(u_g + u_f)}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}\right]\tilde{\Phi} = 0, \quad (29)$$

где $u_g = -\frac{\left(g + \frac{\Omega^2}{r}\right)}{\omega_i}$; $u_f = \frac{K_{i0\perp} N'}{N m_i \omega_i}$;

$$u_K = \frac{K_{i\bot}N'}{eBN}; \quad u_a = \frac{\omega_i a_i^2 N'}{2N\Lambda_i^2}; \quad C = \frac{2\Omega N'}{rN};$$

$G_{ie} = -\frac{u_g \omega_i N'}{N}$; $N'$ равно $dN/dr$ или $dN/dy$.

Через $g$ в случае вращающейся плазмы обозначен радиальный компонент **g**, в случае плоской конфигурации — $y$-компонент.

Для возмущений вида $\exp[i(m_\varphi \varphi + \omega t)]$ решение (29) аналогично (10), но теперь

$$\alpha = \frac{m_\varphi (g + \Omega^2 r)}{\omega_i r} - \frac{m_\varphi u_a}{r} + 2\frac{\Omega N' r}{N m_\varphi};$$

$$\frac{1}{4}\alpha^2\Gamma = -\frac{(g + \Omega^2 r) N'}{N}. \tag{30}$$

Вклад последнего члена уравнения (29) мал и в выбранном порядке не меняет выражения (30). Когда $g = 0$ и существенны или $\Omega$, или $u_a$, значение $\omega$ не будет зависеть от координаты, если потребовать, чтобы $\frac{rN'}{N} = \mathrm{const}$ или $\frac{N'}{rN} = \mathrm{const}$ соответственно.

В плоской геометрии для возмущений вида $\exp[i(k_x x + \omega t)]$ при $\Omega = 0$ получим

$$\alpha = k_x\left(\frac{\frac{1}{2}\omega_i a_i^2 N'}{N} - \frac{g}{\omega_i}\right); \quad \frac{1}{4}\alpha^2\Gamma = -\frac{gN'}{N}. \tag{31}$$

Условием устойчивости является $\Gamma < 1$. Результат (31) впервые был получен Розенблютом и др. [5] из решения уравнения Больцмана, а позднее Робертсом и Тейлором [13] с помощью гидродинамики.

Обратим внимание на любопытное обстоятельство. Все скорости $u_f$, $u_K$ и $u_a$, входящие в уравнение (29), равны в плоской геометрии, где $\Omega = 0$, и во вращающейся плазме, если считать малым отношение $\Omega/\omega_i$. Фактически разные обозначения для этих скоростей были использованы только для того, чтобы подчеркнуть, что они возникли из разных членов уравнения (6) и имеют различную природу. Допустим на момент, что можно пренебречь недиагональными членами в тензоре давления, вносящими вклад в $u_f$, т. е. вклад уравнения (27). Предположим, что мы пренебрегли также силой инерции, возникающей при изменении во времени ларморовской скорости. При этих предположениях можно опустить пятый член и второе слагаемое седьмого члена правой части уравнения (6). Это соответствует тому, что в (29) мы должны опустить члены с $u_f$ и $u_K$. Тогда получится результат, формально совпадающий с уравнением (31).

Однако, если теперь улучшить рассмотрение и учесть инерционный член, связанный с ларморовским движением, то в уравнении (29) член $u_K$ сохранится, а члена с $u_a$ не будет. Так как члены с $u_f$ и $u_K$ взаимно уничтожаются, то получится результат, который будет отличаться от уравнения (31) тем, что в выражении для $\alpha$ не окажется первого члена [15].

Наконец, если учесть также недиагональные члены в тензоре давления, то появится скорость $u_f$, и мы возвратимся к критерию устойчивости, полученному при $u_K = 0$ и $u_f = 0$ и соответствующему уравнению (31). Отношение первого члена в выражении для $\alpha$ в уравнении (31) ко второму равно

$$\vartheta = \frac{K_{i\bot} N'}{N m_i g}. \tag{32}$$

Плазма всегда устойчива, если направление градиента плотности совпадает с направлением вектора **g** или центробежной силы. Рассмотрим следующие частные решения, когда это условие не выполнено:

1. В плоской геометрии с $\Omega = 0$ при достаточно плавном изменении плотности величина $|\vartheta|$ может быть много меньше единицы. Уравнение (31) сводится тогда к результату, полученному автором ранее [7, 15]. Условие устойчивости в этом случае имеет вид

$$\Gamma = -\frac{4\omega_i^2 N'}{N k_x^2 g} < 1 \tag{33}$$

и может быть выполнено при достаточно малом градиенте плотности.

2. В случае плоской геометрии при резком изменении плотности значение $|\vartheta|$ может быть очень большим, и тогда в выражении (31) для $\alpha$ будет существен первый член, возникающий из недиагональных элементов тензора давления. Из (32) видно, что это случай, когда поперечная энергия ионов $K_{i\bot}$ значительно больше работы гравитационного поля на характерном расстоянии $(N/N')$ изменения плотности. Тогда условие устойчивости принимает вид

$$\Gamma = -\frac{16 g N}{N' \omega_i^2 k_x^2 a_i^4} < 1. \tag{34}$$

как было найдено в работе [5]. Это условие может быть выполнено при достаточно резком градиенте и большом ларморовском радиусе ионов.

3. Для вращающейся плазмы при $g = 0$ формулы (30) в пределе нулевого ларморовского радиуса переходят в уравнение (14). Когда ларморовский радиус конечен, то связанный с этим стабилизирующий эффект добавляется к эффекту стабилизации силой Кориолиса. Последний эффект учитывается третьим членом выражения для $\alpha$ в (30), а первый — вторым членом. Отношение этих членов равно $4\Omega r^2/m_\varphi^2 W_\perp a_i$, где $W_i$ — тепловая скорость ионов. Если $W_i$ не превышает скорости вращения $\Omega r$ и $a_i \ll r$, то стабилизирующий эффект определяется в основном кориолисовой силой для всех мод с не очень большим азимутальным числом $m_\varphi$.

Необходимо отметить, что в настоящем анализе устойчивости рассматривались только специальные виды возмущений. Цель этого анализа — наглядно показать, какие эффекты, включенные в уравнение (6), влияют на устойчивость. Как недавно показал Тейлор [16], возмущения вида $r^m \exp \times \times (im\varphi + i\omega t)$ могут быть неустойчивы при $v_{i0\tau} = 0$ и $v_{e\tau 1} = 0$. Это следует из решения уравнения (9). Будет кориолисовая сила стабилизировать вращающуюся плазму или нет, зависит от граничных условий в конкретных граничных задачах. Этот вопрос выходит из области рассмотрения локальных возмущений.

## 9. ВЛИЯНИЕ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОСТИ

В предыдущем разделе был учтен вклад недиагональных членов тензора давлений, не связанных со столкновениями. Сейчас учтем добавку к этому тензору от столкновений частиц одного сорта. Это дает вязкие силы, которые действуют на движение вещества, возникающее при возмущении. Отметим, что в нулевом приближении столкновения частиц одного сорта не приводят к диффузии плазмы поперек магнитного поля.

Рассмотрим такую же задачу о гравитационной неустойчивости в плоской геометрии, как и в предыдущем разделе. Чтобы получить грубую оценку влияния сил вязкости, проанализируем случай, когда распределение плотности меняется плавно, и пренебрежем эффектом конечного ларморовского радиуса, т. е. опустим недиагональные элементы в тензоре давлений. Согласно условию 9 вязкие сдвиговые натяжения действуют только в поперечной к магнитному полю плоскости. Следуя Кауфману [17], введем коэффициент динамической вязкости ($\nu = i, e$)

$$\mu_\nu = \frac{n_\nu k T_\nu \tau_{\nu\nu}}{(1 + 4\omega_\nu^2 \tau_{\nu\nu}^2)}, \tag{35}$$

где $T_\nu$ — температура; $\tau_{\nu\nu}$ — время между столкновениями частиц одного сорта. Тогда дивергенция тензора давления будет иметь вид

$$\operatorname{div} \pi_\nu = \nabla p_{\nu\perp} - \mu_\nu \left[ \frac{4}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}_\nu) - \operatorname{rot}^2 \mathbf{v}_\nu \right]. \tag{36}$$

Здесь использовано условие 4. Так как $\omega_e \gg \omega_i$, то вкладом электронов в вязкие силы можно пренебречь.

Предположим, что вязкая диссипация относительно мала, и подставим в выражение (36) скорость $\mathbf{v}_\nu$, полученную из решения уравнения (3) в нулевом приближении. В этом порядке $\operatorname{div} \mathbf{v}_\nu = 0$. После некоторых преобразований из (36) получим

$$\left(\frac{1}{eB^2}\right) \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} (\operatorname{div} \pi_i) = -\left(\frac{\mu_i}{eB^2}\right) \nabla^4 \tilde{\Phi}, \tag{37}$$

где предполагается, что возмущенные величины меняются в пространстве значительно сильнее, чем невозмущенные.

Комбинируя уравнение (6) для ионов и электронов, с помощью (37) легко получим

$$\left[ \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + u_g \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial t} + G_{ie} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left. - \lambda_i \nabla^4 \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \tilde{\Phi} = 0, \tag{38}$$

где $\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{m_i N}$ — кинематическая вязкость ионного газа, а $u_g$ и $G_{ie}$ определены для уравнения (29) при $\Omega = 0$.

Для возмущений вида $\exp[i(k_x x + k_y y + \omega t)]$ получим дисперсионное соотношение, подобное уравнению (10), где теперь

$$\alpha = -\frac{k_x g}{\omega_i} - i\lambda_i (k_x^2 + k_y^2) \tag{39}$$

и

$$\frac{1}{4} \alpha^2 \Gamma = -\frac{k_y^2 g N'}{N (k_x^2 + k_y^2)} + i k_x \lambda_i \frac{g (k_x^2 + k_y^2)}{\omega_i}, \tag{40}$$

а $i=\sqrt{-1}$. Соответствующее выражение для $\omega$ не зависит от $r$, если $\frac{N'}{N}=\mathrm{const}$.

Скорость нарастания неустойчивости подавляется вязкой диссипацией, причем главным образом за счет второго члена в уравнении (39). Диссипативные члены в (39) и (40) мало влияют на результаты, если циклотронная частота ионов $\omega_i$ велика по сравнению с частотой столкновений $1/\tau_{ii}$ ионов. Это условие выполняется почти во всех интересных случаях, так что влияние вязкости на развитие желобковой неустойчивости обычно несущественно, по крайней мере для тех частных случаев, которые рассматриваются в данной работе.

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на конкретных примерах показано, что между механизмами, ответственными за винтовую и желобковую неустойчивости, существует тесная связь. Они могут вызывать неустойчивости как в полностью, так и в частично ионизованных газах. Для частично ионизованного газа Б. Б. Кадомцев и А. В. Недоспасов [2] нашли, что винтовые возмущения в положительном столбе при определенном критическом значении магнитного поля становятся неустойчивыми. Результаты, полученные этими авторами, блестяще согласуются с экспериментальными данными. Факт существования критического поля и его значение определяются специфическими процессами, происходящими в частично ионизованном газа. Но, как показано на простом примере в разд. 6, причины, приводящие к винтовой неустойчивости, совершенно те же и для полностью ионизованного газа.

Развитая здесь теория основана на уравнениях макроскопического движения газа, являющихся моментами уравнения Больцмана. Достоинства такого приближения — простота физической интерпретации исходных уравнений и сравнительная простота получения математических результатов.

Вообще говоря, можно было бы исходить из теории возмущений, разработанной для дрейфа ведущего центра индивидуальных частиц. В действительности, как это показано в работе [18], усредненное по распределению частиц по скоростям значение этого дрейфа можно легко получить из уравнения (6). Для получения результатов с необходимой точностью при таком подходе надо было бы учитывать не только ларморовское движение, но и поток, и ускорение ведущих центров. Для рассмотренных задач это привело бы к более сложным вычислениям, в которых необходимо было бы тщательное рассмотрение вводимых приближений.

Но если даже макроскопический подход кажется проще (применительно к рассмотренным задачам), чем приближения ведущих центров, в нашем приближении остаются трудности, связанные в основном с определением тензора давлений. Поэтому, когда правильность результатов вызывает сомнение, необходимо прямое рассмотрение на основе уравнения Больцмана.

Поступила в Редакцию 4/X 1962 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Rosenbluth, G. Longmire. Ann. Phys., 1, 120 (1957).
2. B. B. Kadomtsev, A. V. Nedospasov. J. Nucl. Energy. Part C, 1, 230 (1960).
3. F. Hoh, N. Lehnert. Phys. Rev. Lett. 7, 75 (1961).
4. Б. Б. Кадомцев. «Ядерный синтез», 1, 286 (1961).
5. M. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker. Nucl. Fusion, Suppl., Part 1, 143 (1962).
6. H. Furth. Int. School of Physics, «Enrico Fermi», XXV Course. Advanced Plasma Theory. Varenna, Italy; Nuovo Cimento, Suppl., 1962.
7. B. Lehnert. Phys. Fluids, 4, 525, 847 (1961).
8. M. Kruskal, M. Schwarzschild. Proc. Roy. Soc., A, 223, 348 (1954).
9. B. Lehnert. Phys. Fluids, 5, 740 (1962).
10. B. Lehnert. Phys. Fluids, 5, 432 (1962).
11. W. Marshall. Harwell Report AERE, T/R 2419, 1958.
12. W. Thompson. Reports on Progress in Physics (Ed. by A. C. Stickland). The Inst. of Physics and the Physical Society, vol. 24, 1961, p. 363.
13. K. Roberts, J. Taylor. Phys. Rev. Lett., 8, 197 (1962).
14. B. Lehnert. Progress in Nuclear Energy. Ser. XI, vol. 2. Plasma Physics and Thermonuclear Research (Ed. by J. L. Tuck). Pergamon Press, 1962.
15. B. Lehnert. Phys. Rev. Lett., 7, 440 (1961).
16. J. Taylor. J. Nucl. Energy, Part C. (1962).
17. A. Kaufman. Phys Fluids, 3, 610 (1960).
18. B. Lehnert. Nucl. Fusion, Suppl., Part. 1, 135 (1962).