

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР  
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ

211-53  
2 136  
БИБЛИОТЕКА

# Атомная энергия

147471

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:  
А. Н. АЛИХАНОВ, А. А. БОЧВАР, А. П. ВИНОГРАДОВ,  
Н. А. ВЛАСОВ (зам. главного редактора), И. Н. ГОЛОВИН,  
Н. А. ДОЛЛЕЖАЛЬ, А. П. ЗЕФИРОВ, В. Ф. КАЛИНИН,  
П. Ф. КВАРЦХАВА, И. А. КОЛОКОЛЬЦОВ (зам. главного редактора),  
А. К. КРАСНЦ, А. В. ЛЕВЕДИНСКИЙ, А. И. МЕНЦУВСКИЙ,  
М. Г. МЕЩЕРЯКОВ, М. Д. МИЛЛИОНЩИКОВ (главный редактор),  
Н. И. НОВИКОВ, В. С. ФУРСОВ, В. В. ЦЕВЧЕНКО,  
К. Э. ЭРГЛИС, М. И. ЯКУТОВИЧ

ЯНВАРЬ  
ТОМ 14 1963 ВЫП. 1

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. П. Ф. СКОРИНЫ



## КИНЕМАТИКА И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Я. А. Смородинский

### ВВЕДЕНИЕ

Хотя прошло уже много лет с тех пор, как Клейн в 1909 г. [1] обнаружил, что пространство скоростей специальной теории относительности является пространством Лобачевского, т. е. пространством постоянной отрицательной кривизны, эта геометрическая модель недостаточно используется при описании релятивистской кинематики.

Отмеченное в ранних работах Зоммерфельда [2, 3] соответствие между законом сложения скоростей в релятивистской механике и правилом сложения векторов в геометрии Лобачевского оставалось практически единственной иллюстрацией геометрических свойств пространства скоростей.

Более подробное развитие геометрия пространства скоростей получила в работе [4], которая осталась малоизвестной. В последние годы эта задача была вновь рассмотрена Н. А. Черниковым [5, 6], активно пропагандировавшим идеи Лобачевского. На учебниках и монографиях лишь в книге В. А. Фока [7] геометрии Лобачевского уделяется достаточное внимание.

Описание релятивистской кинематики с помощью геометрии Лобачевского демонстрирует простой смысл различных формул, которые потеряли свою наглядность в обычной их записи. Это касается в особенности кинематики вращающихся тел, а в квантовой механике — кинематики частиц со спином.

Приведем ниже ряд примеров применения геометрии Лобачевского к физике элементар-

ных частиц и ядерных реакций. При этом мы не предполагаем предварительного знакомства читателя с геометрией и будем попутно сообщать все нужные сведения.

Мне представилась честь посвятить эту статью памяти Игоря Васильевича Курчатова, который любил теоретическую физику.

### 1. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ

Начнем с небольшого отступления в обычную векторную алгебру. Вектором называют такую совокупность трех величин, которые при вращениях системы координат преобразуются так же, как координаты — компоненты радиуса-вектора  $r$ . Ясно, что вопрос о том, каким образом преобразуются любые другие величины, может быть решен только на основе физических соображений. В механике Ньютона скорость частицы считается также вектором; это связано с тем, что интервал времени является скаляром и соответственно операция дифференцирования по времени является скалярной операцией. Отсюда следует, что пространство скоростей  $\Omega(v)$  обладает теми же геометрическими свойствами, что и координатное пространство  $\Omega(r)$ , являясь пространством эвклидовым. Далее, так как в механике Ньютона масса частицы — скаляр, то импульс частицы преобразуется так же, как скорость, а потому и пространство импульсов также является эвклидовым пространством. Таким образом,

в механике Ньютона все три трехмерных пространства  $\Omega(r)$ ,  $\Omega(v)$  и  $\Omega(p)$  имеют одинаковую метрику.

В механике Эйнштейна положение меняется. Здесь пространство координат и пространство импульсов обладают, как известно, псевдоэвклидовой метрикой с инвариантами  $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = (\Delta s)^2$  и  $c^2 - c^2 p^2 = m^2$ , и их свойства описаны всюду.

Нас в дальнейшем будут интересовать свойства третьего пространства — пространства скоростей. Четырехмерной скоростью, или кратко 4-скоростью, называют производную координаты частицы по собственному времени  $(1/c)(dx_\alpha/ds)$ . Скорость имеет компоненты:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\beta_x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ u_y &= \frac{\beta_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ u_z &= \frac{\beta_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ u_0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где  $\beta$  — обычная нерелятивистская скорость в единицах скорости света ( $0 < \beta < 1$ ). Скорость  $u$ , хотя и является 4-вектором (она есть отношение импульса частицы к ее массе), не вполне соответствует физическому понятию скорости. Скоростью обычно мы называем величину  $\beta$ , равную отношению импульса частицы к ее энергии  $\beta = \frac{p}{\epsilon}$ . Эту величину можно также считать длиной трехмерного вектора, определяющего относительную скорость частицы и начала некоторой избранной системы координат. Геометрия относительных скоростей и составляет тему дальнейшего изложения.

Характерной особенностью 4-скорости является то, что ее 4-длина равна единице:

$$u_0^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 = u_0^2 - u^2 = 1. \quad (1.2)$$

Поэтому концы вектора 4-скорости в псевдоэвклидовом четырехмерном пространстве всегда лежат на поверхности одной из полостей двухлопастного гиперболоида (1.2), а именно, на той из них, которая соответствует положительной величине компоненты  $u_0$ . Таким образом, скоростям всех частиц соответствуют точки, расположенные на трех-

мерной поверхности, в то время как их импульсы (при разных массах) могут заполнять все пространство. Поэтому скорость по существу является трехкомпонентной величиной, представляемой точкой на верхней полости гиперболоида. Геометрию скоростей можно рассматривать либо как геометрию векторов в четырехмерном пространстве с псевдоэвклидовой метрикой, либо как геометрию точек на поверхности гиперболоида в этом пространстве. Это напоминает ситуацию с поверхностью Земли, свойства которой, конечно, можно описывать как свойства поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, однако удобнее делать это с помощью сферической геометрии в двух измерениях.

При описании пространства скоростей как поверхности гиперболоида не возникает необходимости выделять начало координат и все соотношения выражаются только через взаимные расстояния точек на этой поверхности.

Если вместо действительной координаты  $u_0$  ввести мнимую  $u_4 = ic_0$ , то гиперболоид превратится в сферу с радиусом, равным мнимой единице, а скоростям частиц будут соответствовать точки, лежащие на верхней половине этой сферы. В таком представлении для вычисления можно использовать формулы сферической тригонометрии, заменяя в них радиус  $a$  на  $ia$  (в дальнейшем радиус  $a$ , равный скорости света, будет всегда считаться равным единице).

## 2. КИНЕМАТИКА НЬЮТОНА

Напомним кратко основные кинематические соотношения нерелятивистской механики. Рассмотрим реакцию

$$a + b \rightarrow c + d.$$

Частицы  $c$  и  $d$  могут быть либо те же самые, что и частицы  $a$  и  $b$  (рассеяние), либо отличаться от них (реакция). Зная массы частиц, можно найти скорость центра инерции  $u$ . Скорости самих частиц будем обозначать теми же буквами  $a, b, c, d$ . Скорости  $c$  и  $d$  определяются законами сохранения энергии и импульса. Обычно кинематические соотношения иллюстрируют с помощью окружностей (ср. [8]). Для нас удобнее воспользоваться чертежом четырехугольника (рис. 1). На этом рисунке точки соответствуют концам векторов скоростей частиц трехмерных

в перрелятивистской механике, четырехмерных — в релятивистской. Расстояния между точками соответствуют относительным скоростям в перрелятивистской механике и гиперболическим арктангенсам этих скоростей в релятивистской механике.

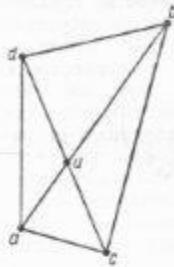


Рис. 1. Четырехугольник, описывающий кинематику реакции  $a + b \rightarrow c + d$ .

Отрезок  $ua$  есть скорость частицы  $a$  относительно точки  $u$ , т. е. скорость  $a$  в системе центра инерции. Отрезок  $ab$  есть скорость  $b$  в системе, где  $a$  покоится, и т. д.

Рассматривая рассеяние в какой-либо определенной системе координат, следует приписать отрезкам — сторонам и диагоналям четырехугольника — определенные направления. Например, если рассеяние рассматривается в системе, где покоится частица  $a$ , то налетающая частица описывается вектором, направленным от  $a$  к  $b$ , две частицы — продукты реакции — векторами, направленными от точки  $a$  к точкам  $c$  и  $d$  соответственно.

Рассмотрим два примера:

1. В случае рассеяния двух одинаковых частиц (рис. 2) точка  $u$  расположена на одинаковом расстоянии от всех вершин и фигура превращается в прямоугольник. Это значит, что угол между скоростями  $a'$  и  $b'$ , т. е. между разлетающимися частицами в системе, где  $a$  сначала покоилась, равен  $\pi/2$ .

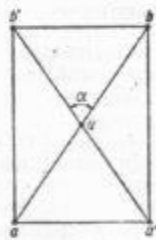


Рис. 2. Упругое столкновение одинаковых частиц  $a + b \rightarrow a' + b'$ .



Рис. 3. Упругое столкновение разных частиц.

2. Если массы частиц  $a$  и  $b$  разные, но рассеяние упругое, то фигура превращается в трапецию (рис. 3)  $ub = ub'$ ,  $ua = ua'$ . Скорость частицы  $b$  после рассеяния в

системе, где  $a$  сначала покоилась (отрезок  $ab'$ ), связана с углом рассеяния  $\theta$  (в этой системе угол  $bab'$ ) формулой, которая находится из треугольника  $b'u a$ :

$$\cos \theta = \frac{b_a^2 - a_a^2 - b_a'^2}{2a_a b_a'}$$

Здесь  $a_a$  и  $b_a$  — скорости частиц  $a$  и  $b$  в системе  $u$  (не зависящие от угла рассеяния);  $b_a'$  — скорость частицы  $b$  после рассеяния в системе, где  $a$  сначала покоилась.

Из этих примеров видно, что плоская тригонометрия полностью описывает связи между скоростями частиц в разных системах координат (а также между относительными скоростями) и углом рассеяния. Можно еще добавить, что если нужно рассмотреть движение относительно какой-либо другой системы координат, то, нарисовав еще одну точку (в той же плоскости или в пространстве) и соединив ее с углами четырехугольника, нетрудно получить все нужные кинематические соотношения. Заметим еще, что при заданных массах четырехугольник определяется двумя параметрами: длиной диагонали — относительной скоростью частиц — и углом между диагоналями — углом рассеяния в системе  $u$ .

Описанное соответствие между кинематикой и плоской тригонометрией есть следствие того, что мы называли евклидовым характером пространства скоростей.

Такое описание кинематики, оказывается, обладает важным свойством. При переходе к механике Эйнштейна можно не менять рисунков, а лишь заменить формулы плоской тригонометрии на формулы геометрии гиперболической (или сферической с мнимым радиусом)\*.

### 3. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ

Геометрия Лобачевского отличается от обычной евклидовой отсутствием аксиомы о параллельных. Это прежде всего приводит к тому, что сумма углов треугольника перестает быть равной  $\pi$  и всегда меньше  $\pi$ . При этом равные углы могут быть только у равных треугольников; эта геометрия не знает подобных треугольников.

\* Если вычисления вести в пространстве импульсов, а не скоростей, то в релятивистской кинематике возникает более сложные геометрические соотношения, связанные со свойствами эллипсов (ср. [8]).

Наиболее простым и «наглядным» представлением геометрии Лобачевского является верхняя полость гиперboloида в четырехмерном пространстве с псевдоевклидовой метрикой или же поверхность шара с радиусом, равным  $i^*$ .

Чтобы установить соответствие между геометрией Лобачевского и трехмерным пространством скоростей, надо определить связь между расстояниями на поверхности гиперboloида и относительными скоростями. Напомним, что точка на поверхности гиперboloида описывает четырехмерную скорость; однако очевидно, что интервал между двумя точками (определяемый как  $ds^2 = du_0^2 - du^2$ ) не имеет ничего общего с относительной скоростью. Если определять расстояния на поверхности гиперboloида как длину отрезка геодезической гиперболы, соединяющей эти точки, то такую величину можно выразить через относительную скорость. Для этого рассмотрим два вектора 4-скорости  $u_1$  и  $u_2$  и составим их четырехмерное скалярное произведение:

$$u_1 u_2 = u_{10} u_{20} - u_1 u_2 \quad (3.1)$$

Так как это произведение инвариантно, его проще всего вычислить в системе, где одна из частиц покоится, т. е. в системе, где одна из скоростей, например  $u_1$ , имеет только одну компоненту  $u_{10} = 1$ . В этой системе  $u_{20}$  равно  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ , где  $\beta$  — относительная скорость. Поэтому

$$u_1 u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.2)$$

Так как 4-длины  $u_1$  и  $u_2$  равны единице, то скалярное произведение в пространстве с евклидовой метрикой двух единичных векторов было бы равно косинусу угла между ними. В пространстве с псевдоевклидовой метрикой естественно приравнять это произведение гиперболическому косинусу:

$$u_1 u_2 = \text{ch}(u_1 u_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma_{12} \quad (3.3)$$

\* Геометрию Лобачевского часто описывают в терминах проективной геометрии, проектируя точки шара или гиперboloида на плоскость, касательную к нему. Такая проекция искажает углы, но превращает криволинейный треугольник в прямолинейный. Есть и другие способы описания геометрии. Подробности (которые нам здесь не нужны) можно найти в любом курсе неевклидовой геометрии.

Обозначая фактор Лоренца через  $\gamma_{12}$ , мы отмечаем, что он определяется относительной скоростью первой и второй частиц. Из этого определения следует, что

$$\text{sh}(u_1 u_2) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (3.4)$$

$$\text{th}(u_1 u_2) = \beta. \quad (3.5)$$

Аргументы гиперболических функций есть гиперболический угол, определяемый проще всего из скалярного произведения (3.3). Обозначение дуги, совпадающее с символом скалярного произведения, вряд ли может привести к недоразумениям\*.

Соотношения (3.3), (3.4) устанавливают связь расстояний между точками  $u_1$  и  $u_2$  на поверхности гиперboloида (или мнимой сферы) со скалярной относительной скоростью. После этого можно рисовать точки гиперboloида на плоскости, но при вычислениях использовать формулы гиперболической геометрии. В такой геометрии сумма углов треугольника меньше  $\pi$ , а разность между  $\pi$  и суммой углов треугольника равна его площади:

$$S = \pi - A - B - C. \quad (3.6)$$

Одним из результатов (3.6) является то, что в гиперболической геометрии отсутствуют подобные треугольники. Треугольники с равными углами просто равны друг другу. Физическое объяснение сразу следует из предельного характера скорости света. В кинематике Ньютона соотношения между скоростями не изменяются, если все скорости изменить в одно и то же число раз. В кинематике Эйнштейна это уже несправедливо, так как отношение скоростей частиц к скорости света изменится. Этот пример хорошо иллюстрирует связь между конечностью скорости света и неевклидовой геометрией пространства скоростей.

Для большей наглядности можно нарисовать треугольник с вогнутыми сторонами, сохраняя углы между ними (рис. 4); длины сторон при этом, конечно, искажаются.

Для решения треугольников в гиперболической геометрии служат несколько формул [9].

\* Если масса одной из частиц  $m_1$  то в системе, где другая частица покоится, энергия частицы равна  $m_1 \text{ch}(u_1 u_2)$ , а импульс  $p = m_1 \text{sh}(u_1 u_2)$ .

Формула косинусов

$$\text{cha} = \text{ch}b \text{ch}c - 2 \text{sh}b \text{sh}c \cos A. \quad (3.7)$$

При стремлении кривизны к нулю (т. е. длин сторон к нулю, так как мы положили радиус кривизны равным единице) (3.7)

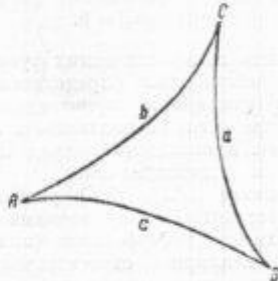


Рис. 4. Схематический чертеж гиперболического треугольника. Сумма углов не равна  $\pi$ .

переходит в теорему косинусов плоской тригонометрии.

Вторая формула косинусов

$$\cos A = -\cos B \cos C + \cos B \cos C \text{ch} a \quad (3.8)$$

переходит в тождество при  $A + B + C = \pi$ .  
Формула синусов

$$\frac{\text{sh} a}{\sin A} = \frac{\text{sh} b}{\sin B} = \frac{\text{sh} c}{\sin C}. \quad (3.9)$$

К этому надо добавить еще формулу для площади треугольника:

$$\cos \frac{S}{2} = \frac{1 + \text{ch} a + \text{ch} b + \text{ch} c}{4 \text{ch}^2 \frac{a}{2} \text{ch}^2 \frac{b}{2} \text{ch}^2 \frac{c}{2}}. \quad (3.10)$$

Если пользоваться этими формулами и не использовать следствия теоремы о параллельных (равенство накрест лежащих углов, площадь треугольника и т. д.), то кинематические соотношения можно получить из рисунков плоской геометрии.

В качестве примера рассмотрим столкновение одинаковых частиц. Возвемся к рис. 2. Расстояние между точками  $a$  и  $b$  соответствует относительной скорости частиц  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} \text{ch}(ab) = \gamma_{ab}, \\ \text{th}(ab) = \beta_{ab}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Скорость системы центра инерции по-прежнему определяется точкой  $u$ , делящей отрезок  $ab$  пополам; она равна

$$\beta_{au} = \text{th} \frac{ab}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}(ab) - 1}{\text{ch}(ab) + 1}}. \quad (3.12)$$

Если заданы координаты всех вершин (т. е. скорости и угол рассеяния в системе центра инерции), то скорости частиц после рассеяния, например в системе  $a$ , определяются по формуле косинусов:

$$\gamma_{ab'} = \text{ch}^2(au) + \text{sh}^2(au) \cos a; \quad (3.13)$$

$$\gamma_{au'} = \text{ch}^2(au) - \text{sh}^2(au) \cos a. \quad (3.14)$$

Угол между рассеянными частицами (угол  $a'ab'$ ) в системе  $a$  выражается через гиперболический дефект

$$\angle(a'ab') = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \quad (3.15)$$

где  $\delta$  — гиперболический дефект, а площадь треугольника  $a'ab'$  (в единицах  $c^2$ ) определяется по формуле (3.10) по известным длин сторон треугольника. Таким образом, все кинематические соотношения определяются, если заданы координаты вершин и точки пересечения диагоналей прямоугольника (или в общем случае четырехугольника). Определяя длины всех сторон и площади треугольников, мы получаем полное решение задачи. Отметим, что все соотношения, получаемые таким образом, зависят только от скоростей частиц, но не от их масс.

Если требуется определить кинематические соотношения в какой-либо другой системе координат, то для этого надо только отметить точку, описывающую эту систему на плоскости скоростей, и соединить ее с вершинами основного четырехугольника. После этого задача решается тем же методом.

Такое положение возникает при описании распада одной частицы на две. В этом случае одна из диагоналей четырехугольника вырождается в точку; распад изображается рис. 5, где  $L$  — скорость системы наблюдателя;  $c$  — скорость распадающейся частицы;  $a$  и  $b$  — скорости продуктов распада ( $c$  — одновременно скорость системы центра инерции продуктов распада). Скорость  $a$  в системе  $L$  связана с углом вылета  $a$  в этой системе по формуле косинуса:

$$\cos a = \frac{-\text{ch}(ac) + \text{ch}(Lc) \text{ch}(Lc)}{\text{sh}(Lc) \text{sh}(Lc)}. \quad (3.16)$$

Можно далее выразить все величины через энергии и импульсы частиц (как это обычно и делается), однако при этом будет не столь очевидно, что соотношение зависит только от скоростей, но не от масс частиц. Заметим, что минимальная и максимальная скорости определяются, если повернуть  $ab$  вокруг точки  $c$  так, чтобы она легла на линию  $Lc$ .

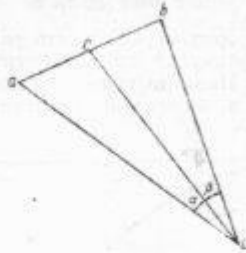


Рис. 5. Распад частицы  $c \rightarrow a + b$ .

Конечно, примеры, разобранные выше, весьма просты и их можно исследовать обычным алгебраическим методом, но все же нельзя не согласиться с тем, что геометрический метод выгоднее.

#### 4. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Как уже говорилось, скоростью называют две разные величины: скорость-вектор и относительную скорость — расстояние между двумя точками в гиперболической геометрии.  $t$ -скорости складываются по обычным правилам линейного векторного пространства, и то время как сложение относительных скоростей определяется совсем другими правилами\*.

\* Относительная скорость входит в определение инвариантного сечения реакции. Если плотности сталкивающихся частиц равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , то число актов реакции в объеме  $dV$  и в интервале  $dt$  определяется обычно формулой

$$\frac{dN}{dt dV} = \rho_1 \rho_2 v \quad (\times)$$

Здесь  $v^2 = (\beta_2 - \beta_1)^2 - (\beta_1 \cdot \beta_2)^2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — векторы скоростей частиц. Формулу можно переписать так:

$$\frac{dN}{dt dV} = (\rho_1^2 / 2)^{1/2} \text{sh } \alpha \sigma. \quad (\times \times)$$

Здесь  $\rho_{1,2}^2 = \rho_{1,2}^2 - j_{1,2}^2$  —  $4$ -длины векторов тока;  $\alpha$  — угол между ними. Если через  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$  обозначить плотности (число частиц в единице объема)

Прежде всего надо отметить, что в гиперболической геометрии нельзя определить направления скорости; так как геодезическая линия кривая, то направление ее меняется. Поэтому, в частности, направление скорости частицы  $b$  в системе  $a$  не совпадает (вернее, не строго противоположно) с направлением скорости частицы  $a$  в системе  $b$  (хотя величины скоростей и равны).

Угол между направлениями  $ab$  и  $-ba$  есть не что иное, как угол поворота бесконечно малого вектора при параллельном переносе вдоль кривой  $ab$ . Очевидно, он определяется только длиной  $ab$ . Ниже будет показано, что этот угол  $\alpha$  определяется формулой

$$\text{sh } \alpha = \text{th } x. \quad (4.1)$$

Формулы, служащие для решения гиперболических треугольников, позволяют установить и законы сложения векторов. Обратимся к рис. 6. Физический смысл его таков: система  $a$  движется относительно системы  $b$  со скоростью, определяемой длиной отрезка  $ab$ , т. е. со скоростью  $\text{th}(ab)$ . В системе  $b$  частица  $c$  движется со скоростью  $\text{th}(bc)$ . Тогда  $\text{th}(ac)$  есть скорость частицы  $c$  относительно системы  $a$ . Величина  $ac$  находится по формуле косинусов:

$$\text{ch}(ac) = \text{ch}(ab) \text{ch}(bc) - \text{sh}(ab) \text{sh}(bc) \cos b, \quad (4.2)$$

где  $b$  — угол при этой вершине. Угол  $a$  находится по теореме синусов:

$$\sin a = \text{sh}(bc) \frac{\sin b}{\text{sh}(ac)}. \quad (4.3)$$

в собственных системах координат, то  $(\times \times)$  можно записать

$$\frac{dN}{dt dV} = \rho_{01} \rho_{02} \sigma \text{sh } \alpha. \quad (\times \times \times)$$

Таким образом, относительная скорость в релятивистской формуле переходит в релятивистской формуле в  $\text{sh } \alpha$  (ср. [10]).

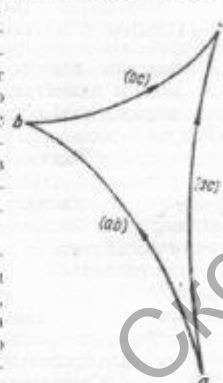


Рис. 6. Сложение скоростей в гиперболической геометрии  $ab + bc = ac$ .

Этими формулами и определяется закон сложения скоростей в кинематике Эйнштейна.

5. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. ЧАСТИЦЫ С МАССОЙ, РАВНОЙ НУЛЮ

Рассмотрим теперь частицы без массы, т. е. фотоны и нейтрино. Их скорость, равная единице, изображается точкой, находящейся на бесконечном расстоянии. Геодезические линии, соединяющие эту бесконечно удаленную точку с двумя другими точками, по определению параллельны (как линии, пересекающиеся на бесконечности). Угол между двумя такими геодезическими линиями (в бесконечно удаленной вершине) опять-таки по определению равен нулю. В геометрии Лобачевского такой кинематической диаграмме соответствует утверждение, что через каждую точку можно провести прямую, параллельную данной. Существуют две такие прямые: одна пересекает исходную прямую справа (на бесконечности), другая пересекает ее слева (рис. 7). Угол, который составляет параллельная прямая с перпендикуляром,

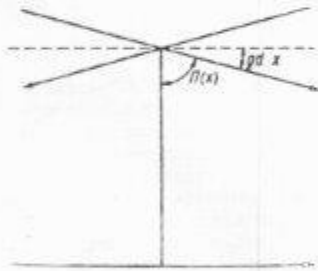


Рис. 7. Параллельные прямые — левая и правая — на плоскости Лобачевского.  $\Pi(x)$  — угол параллельности Лобачевского:  $gd x + \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ .

называют углом параллельности Лобачевского и обозначают через  $\Pi(x)$ , где  $x$  — расстояние до исходной прямой. При  $x=0$ , очевидно,  $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ . С увеличением расстояний  $x$ ,  $\Pi(x)$  стремится к нулю. Угол параллельности связан с расстоянием  $x$  формулой

$$\text{th } x = \cos \Pi(x). \quad (5.1)$$

Вместо угла параллельности можно рассмотреть его дополнение до  $\pi/2$ . Эту величину называют гиперболической амплитудой, или гудерманном:

$$gd x = \frac{\pi}{2} - \Pi(x). \quad (5.2)$$

Тогда формула (5.2) запишется так:

$$\text{th } x = \sin(gd x). \quad (5.3)$$

Угол  $\alpha$  в формуле (4.1) и есть  $gd x$ . Можно дать этим формулам кинематическую интерпретацию. Параллельные прямые, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке,

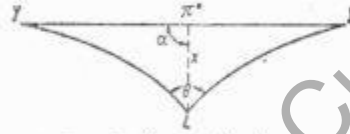


Рис. 8. Распад  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

соответствуют скоростям фотонов (или нейтрино) относительно двух каких-либо систем координат. Если, например,  $\pi^0$ -мезон распадается на два кванта (рис. 8), то кинематическая диаграмма имеет два угла, равных нулю. Угол  $\theta$  разлета двух квантов есть угол в вершине гиперболического треугольника, два других угла которого равны нулю. Его величину можно выразить через  $\text{th } x$ , скорость  $\pi^0$ -мезона и угол вылета  $\alpha$  в системе  $L$  относительно скорости наблюдателя  $L'$ . Нетрудно видеть, что угол  $\theta$  минимален, когда угол вылета  $\alpha$  равен  $\pi/2$ . В этом случае  $\theta$  есть, очевидно, удвоенный угол параллельности ( $\text{th } x = \beta$ ):

$$\theta_{\text{мин}} = 2\Pi(x) = 2 \arccos \beta, \quad (5.4)$$

где  $\beta$  — скорость пиона.

В качестве второго примера рассмотрим релятивистскую аберрацию — преобразование угла между фотоном (или нейтрино) и относительной скоростью двух систем  $ba$  (рис. 9).

Угол излучения фотона в системе  $a$  относительно скорости  $ba$  обозначен через  $\theta'$ . Тот же угол в системе  $b$  обозначен через  $\theta$ . Пунктир — перпендикуляр на  $ab$ .

«Прямые  $ay$ ,  $cy$  и  $by$  параллельны. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} -\cos \theta' &= \text{th } x; \\ \cos \theta &= \text{th } y. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$



Составляя  $\text{th}(x+y)$ , который равен  $\beta$  (скорость  $a$  в системе  $b$ ), получим

$$\frac{\cos \theta - \cos \theta'}{1 - \cos \theta \cos \theta'} = \beta. \quad (5.6)$$

Решая (5.6) относительно одного из косинусов, получим обычные формулы. Если угол  $\theta'$  равен  $\pi/2$ , то треугольник становится прямоугольным (один угол  $\theta$ , другой  $\pi/2$ ).

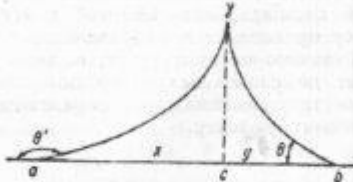


Рис. 9. Аберрация.

Наблюдатель  $a$  видит фотон под углом  $\theta'$ ; наблюдатель  $b$  видит его под углом  $\theta$ .

В таком треугольнике угол  $\theta$  равен  $\arcs \cos \beta$  (по свойствам параллельных). Фотон, который в системе  $a$  вылетел под углом  $\pi/2$ , приходит в систему  $b$  под углом, почти совпадающим с направлением движения (при  $\beta \approx 1$ ). Таким образом, наблюдатель «видит» светящийся объект из системы  $a$  повернутым на угол  $\pi/2$ . Это красивое явление поворота быстро движущегося предмета было обнаружено Тервелом [11].

Интересно отметить, что в гиперболической геометрии существует треугольник, в котором все три угла равны нулю и у которого, следовательно, стороны попарно параллельны. Площадь такого треугольника составляет  $\pi/2$ , так как она равна разности между  $\pi/2$  и суммой углов треугольника. Такой кинематический треугольник встретится при рассмотрении распада частицы на три фотона, которым и будут соответствовать три бесконечно удаленные точки.

#### 6. ВОЛЧОК И ТОМАСОВСКАЯ ПРЕЦЕССИЯ

Рассмотрим теперь кинематику вращающейся частицы. В этом случае польза гиперболической геометрии становится еще более ощутимой.

В нерелятивистской механике вращение описывается трехмерным вектором угловой скорости. Переход к механике Эйнштейна

требует некоторой осторожности. Можно считать угловую скорость подобно магнитному полю частью антисимметричного тензора второго ранга. Тогда в релятивистском случае потребуется вводить еще один трехмерный вектор, подобный полю электрическому. Такой путь приводит к объединению угловой скорости и скорости центра тяжести в один тензор, похожий на тензор, объединяющий электрический и магнитный дипольные моменты. Физический смысл объединения состоит в том, что к угловой скорости прибавляется орбитальная. Построенный таким образом тензор просто связан с полным угловым моментом частицы (сумма орбитального и спинового угловых моментов). Можно, однако, не усложнять картину и не впускать в дело орбитальное движение. Рассмотрим волчок, вращающийся в равномерно движущейся системе координат. Каждая точка его поверхности движется относительно покоящегося в лабораторной системе наблюдателя по кривой, составленной из суммы вращательного и поступательного движений. Преобразование Лоренца из системы волчка в лабораторную систему связывает чистое вращение с движением по незамкнутой кривой. Когда мы говорим о вращении, то интуитивно разделяем поступательное движение и собственно вращение. Нетрудно придать такой операции строгий кинематический смысл. Для этого определим 4-вектор угловой скорости так, чтобы в собственной системе координат у него были только три пространственные компоненты, совпадающие с компонентами нерелятивистской угловой скорости. Ковариантным выражением этого свойства будет ортогональность 4-вектора угловой скорости, линейной скорости частицы

$$\omega u = 0. \quad (6.1)$$

Формула (6.1) служит определением 4-вектора в любой другой системе координат. Именно угловая 4-скорость частицы, движущейся со скоростью  $u = (\gamma, u)$ , где  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \frac{(\omega u) u}{1 + \gamma} + \omega; \\ \omega'_0 &= (\omega \beta). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

В гиперболической геометрии формулы (6.2) показывают, что вектор угловой ско-

рости лежит в трехмерном пространстве, ортогональном вектору скорости частицы, т. е. вектор угловой скорости всегда остается трехмерным вектором. Рассмотрим компоненты этого вектора с точки зрения разных наблюдателей. Чтобы можно было сравнивать компоненты, наблюдатели должны как-то условиться о методе сравнения самих систем координат. Если система наблюдателя  $L$ , а система частицы  $R$ , тогда описание угловой скорости формулами (6.2) есть описание ее в системе  $L$ . Можно поступить иначе, построив в системе  $L$  другую систему координат, соответствующую системе  $R$ . Тогда наблюдатель в  $R$  может сообщить наблюдателю в  $L$  три компоненты вектора скорости, по которым можно будет построить вектор в системе  $L$ . Здесь мы встречаемся с тем, как в неевклидовой геометрии возникает вопрос о сравнении векторов, находящихся в разных точках пространства. Чтобы такое сравнение можно было произвести, необходимо перенести сравниваемые векторы в одну точку. При этом и возникает обсуждаемый нами вопрос о том, как определить такую операцию инвариантным образом. Прежде всего оба наблюдателя могут определить одну из осей в направлении их относительной скорости (при этом один из наблюдателей будет считать скорость положительной, другой — отрицательной).

Чтобы определить вторую ось, надо построить нормаль к плоскости. Выберем еще одну вспомогательную систему со скоростью, не параллельной относительной скорости систем  $L$  и  $R$ . Обозначим ее через  $U$ . Тогда с помощью антисимметричного тензора леввертого ранга построим 4-вектор  $N$ :

$$N_a = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} L^\beta R^\gamma U^\delta. \quad (6.3)$$

Нетрудно видеть, что в каждой из трех систем  $L$ ,  $R$  и  $U$  этот вектор сводится к обычному трехмерному векторному произведению. Действительно, в этих системах один из индексов равен нулю, а два других пробегает лишь пространственные значения.

Таким образом, в системах  $R$  и  $L$  построены по две пространственные оси. Третья ось в каждой системе строится как перпендикуляр к уже построенным двум. Геометрически описанное построение соответствует параллельному переносу вектора вдоль геодезической, соединяющей точки  $R$

и  $L$ \*. Ясно, что, поскольку наблюдатели находятся в разных системах, такая «синхронизация»\*\* систем координат не может привести к какому-либо противоречию. Мы встретимся с новым явлением, если будем производить параллельный перенос по замкнутому контуру. Как известно из геометрии, при параллельном переносе вдоль замкнутого контура вектор не возвращается в исходное положение, а поворачивается на угол, равный площади, охватываемой контуром. Поворот происходит в направлении, обратном движению по контуру (т. е. вектор не доходит до своего исходного положения). В случае треугольника площадь равна гиперболическому дефекту.

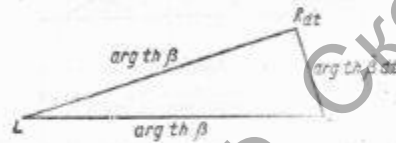


Рис. 10. Томасовская прецессия. Поворот оси волчка в первом приближении равен площади треугольника, образованного скоростями волчка в два момента времени  $t$  и  $t+dt$ .

Простейший пример такого рода — так называемая томасовская прецессия. Рассмотрим волчок, летящий со скоростью  $\beta$ . Пусть он получает ускорение  $\dot{\beta}$ , и его скорость через время  $dt$  становится равной  $\beta + \dot{\beta}dt$  (рис. 10).\*\*\* Чтобы выяснить, как изменится направление угловой скорости, необходимо сравнить вектор угловой скорости, перенесенный из исходной системы волчка  $R$  в систему наблюдателя  $L$  с направлением вектора угловой скорости в системе волчка  $R_{dt}$ , также перенесенного в систему  $L$ .

\* Мы говорили, что направление относительной скорости  $R$  с точки зрения  $L$  не вполне противоположно направлению скорости  $L$  с точки зрения  $R$ . Такой поворот, связанный с псевдоевклидовой метрикой, и приводит 4-вектор к трехкомпонентному виду. Величина этого поворота равна  $g_a(LR) = \frac{\pi}{2} - \Pi(LR)$ .

\*\* Мы говорим «синхронизация» по аналогии с операцией синхронизации часов — аналогия, которая, как мы увидим ниже, имеет глубокий смысл.

\*\*\* Треугольник парисован равнобедренный, так как  $\dot{\beta}dt$  бесконечно мало.

РЕПОЗИТОРИЙ «СКОРИНЫ»

Искомая разность есть не что иное, как поворот вектора при параллельном переносе вдоль периметра треугольника, равный площади треугольника. Для его вычисления удобно воспользоваться не формулой (3.10), а ей эквивалентной

$$\sin S = \frac{1 + \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c}{8 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2}} | \varepsilon u_A u_B u_C |. \quad (6.4)$$

В этой формуле последний член есть длина нормали к плоскости треугольника с вершинами  $u_A, u_B, u_C$ . Вместе, где, например, поконится  $a$ , этот множитель равен просто длине векторного произведения пространственных частей 4-скоростей  $b$  и  $c$ . Положим  $\operatorname{th} z = \operatorname{th} b = \beta$ . Замечая, что величина  $\dot{\beta} dt$  бесконечно мала и что  $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b = \gamma$ ,  $4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} = 1 + \gamma$ , получим

$$S = \frac{\gamma}{1 + \gamma} | \beta \times \dot{\beta} | dt. \quad (6.5)$$

Таким образом, волчок под действием ускорения  $\dot{\beta}$  прецессирует с угловой скоростью

$$\Omega = - \frac{\gamma}{1 + \gamma} | \beta \times \dot{\beta} |. \quad (6.6)$$

В низшем порядке по скорости скорость прецессии равна

$$\Omega \approx - \frac{1}{2} | \dot{\beta} \times \beta |. \quad (6.7)$$

т. е. площади треугольника, вычисленного по формуле евклидовой геометрии. Этот эффект называется томасовской прецессией и обычный его вывод достаточно упомянуть (ср. [12]).

В связи с томасовской прецессией можно несколько подробнее остановиться на вопросе о синхронизации систем координат. Предположим, что существуют три системы наблюдателей, движущиеся равномерно так, что сначала система 1 встречается с системой 2, потом 2 встречается с системой 3 и, наконец, 3 опять встречается с системой 1. Система 1 должна иметь большие размеры, чтобы могла произойти последняя встреча (ясно, что она произойдет в другом месте системы 1). Если во время первой встречи наблюдатели 1 и 2 синхронизируют свои системы координат, после чего во время встречи с наблюдателем 3 наблюдатель 2 передает ему полученное направление, то при возвращении информации

в систему 1 в момент второй встречи наблюдателей 3 и 1 система окажется повернутой на томасовский угол прецессии  $\Omega$ . Таким образом, в движущихся системах нельзя выбрать единые трехмерные системы координат. Этот эффект похож на известный парадокс часов, который иллюстрируется рис. 11.

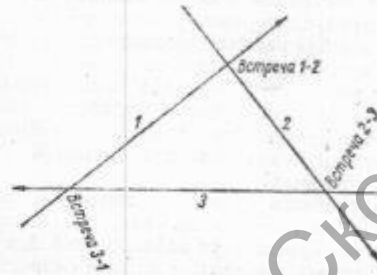


Рис. 11. Схема синхронизации систем координат и часов с помощью трех наблюдателей.

Если наблюдателям будут при встречах передавать информацию о времени, то при возвращении в систему 1 часы отстанут. Величина отставания, как известно, равна периметру треугольника (в обычном пространстве), а отставание системы координат равно его площади (в пространстве скоростей)\*.

## 7. СПИНА

Все, что было сказано о волчке, переносится и на кинематику спина\*\*. В частности, закон преобразования спина совпадает с (4.2), так как преобразование есть кинематическая операция, зависящая только от скорости. Это, однако, справедливо лишь

\* Обычно парадокс часов рассматривают с помощью только двух наблюдателей. При этом приходится вводить неравномерное движение одного из них (поворот и обратный путь). При трех системах этой трудности нет, но приходится говорить о синхронизации часов вдоль первой системы, так как встречи 1-2 и 3-1 происходят в разных ее точках. Впрочем, синхронизация часов вдоль равномерно движущейся системы координат трудности не представляет. Оба эффекта: отставание часов и поворот координатных осей — зависят, конечно, и от кривизны пространства.

\*\* И на другие мультипольные моменты ядер, о которых мы здесь говорить не будем (ср. [13]). Связь спина с геометрией Лобачевского была рассмотрена в работе [14].

для свободных частиц. Если частица находится во внешнем поле, то положение меняется. Частица во внешнем поле не имеет определенного импульса и скорости, поэтому для нее нельзя ввести системы покоя, а следовательно, нельзя просто определить спин. В результате для частицы в поле возникают примеси состояний с более низкими значениями спина, с которыми приходится бороться путем введения разных дополнительных условий. Только для частиц со спином  $1/2$  (и, конечно, частиц без спина) и для фотона из-за градиентной инвариантности спин остается хорошо определенным понятием. Поэтому мы будем говорить только о свободных частицах.

Если рисовать спин как вектор в собственной системе, то из рис. 12 видно, что с точки зрения двух наблюдателей  $A$  и  $B$  угол, который составляют спин и скорость, отличается на угол при вершине  $C$  — собственной системы частицы. Если частица имеет массу, то угол при  $C$  равен нулю.

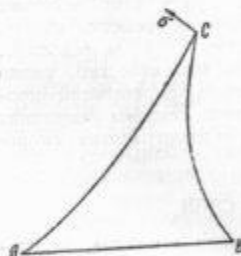


Рис. 12. Направление спина с точки зрения двух наблюдателей  $A$  и  $B$ .

Углы, которые составляет спин с относительными скоростями  $AC$  и  $BC$ , отличаются друг от друга на угол  $C$ . Это и есть поворот спина при переходе из одной системы координат в другую. Если  $c=0$  (фотон или нейтрино), то поворота нет.

Отсюда сразу следует, что продольно поляризованная частица с нулевой массой остается продольно поляризованной в любой системе координат, т. е. что понятия продольного нейтрино и продольного по кругу фотона суть понятия релятивистски инвариантные.

Если частица со спином рассеивается, что является аналогом ее ускорения в классической задаче, то, кроме изменения направления спина при релятивистском рассеянии  $\Phi$ , спин еще претерпевает томасовский поворот  $\Omega$ , рассчитываемый из площади треугольника с вершинами, соответствующими лабораторной системе и системам покоя частицы до и после рассеяния\*. Поэтому сум-

марный поворот спина  $\psi$  равен [16]:

$$\psi = \Phi - |\Omega|.$$

Прецессия спина играет существенную роль при рассеянии. Поворот спина при рассеянии, например электрона в кулоновом поле, в классической механике означает связь спина с орбитой. Томасовский поворот поэтому является причиной спин-орбитального расщепления в атоме водорода и поляризации электрона при рассеянии ядрами — явлении, непонятном с классической точки зрения, так как кулоновское взаимодействие не зависит от спина явным образом.

Параллельный перенос спина позволяет наглядно представить и сложение спинов в системах частиц. Так как параллельный перенос позволяет перенести все спины в одну точку (одну систему координат) и углы между перенесенными спинами вычисляются прямо по формулам гиперболической геометрии, то задача сводится к сложению спинов в одной системе координат, т. е. к обычной нерелятивистской задаче.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Этой статьей мы хотели обратить внимание на то почти очевидное обстоятельство, что, работая с векторами в пространстве скоростей, надо понимать геометрию этого пространства. Подобно тому, как в обычной геометрии можно обойтись аналитическими формулами, никогда не прибегая к наглядным методам тригонометрии, так и в кинематике Эйнштейна можно обойтись без чертежей и тригонометрических формул. Однако такой путь, который в свое время был идеалом механики Лагранжа\*, вряд ли может быть идеалом в наше время. Аппарат теоретической физики стал сейчас настолько сложен, что любые наглядные (а тем более и строгие) модели должны играть все большую и большую роль в науке.

В заключение хочу поблагодарить Н. А. Черникова за полезные обсуждения затронутых здесь задач.

\* Лагранж писал в предисловии к своей «Аналитической механике», что его методы... не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений, но нуждаются исключительно в алгебраических операциях, подчиненных правильному и единообразному течению» [17].

\* Этот эффект был описан Стаппом [15].

Поступила в Редакцию 1/Х 1962 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Клейн. Сб. «Новые идеи в математике». Вып. 5, СПб., 1909, стр. 144.
2. А. Зоммерфельд. Phys. Zs., 10, 286 (1909).
3. А. Зоммерфельд. Электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1955, стр. 322.
4. Н. П. Котельников. Сборник в память Лобачевского, Казань, Изд. Гос. ун-та, 1928.
5. Н. А. Черников. «Научн. доклады Высшей школы», 2, 158 (1958).
6. Н. А. Черников. Препринт ОИЯИ № 723, Дубна, 1961.
7. В. А. Фок. Теория пространства и времени. Изд. 2. М.—Л., Физматгиз, 1961.
8. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля. Изд. 4. М.—Л., Физматгиз, 1962.
9. А. Р. Ямпольский. Гиперболические функции. М., Физматгиз, 1960.
10. Н. А. Черников. «Докл. АН СССР», 114, 530 (1957).
11. J. Terrell. Phys. Rev., 116, 1041 (1959).
12. C. Möller. Theory of Relativity. Oxford, 1952, p. 53.
13. В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 42, 846 (1962).
14. Я. А. Смородинский. Там же, 43, вып. 6, 2217 (1962).
15. H. Starr. Phys. Rev., 103, 425 (1957).
16. G. Wick. Ann. Phys., 18, 65 (1962).
17. Ж. Лагранж. Аналитическая механика. Т. 1. Изд. 2. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950, стр. 3.



РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ