IPA — Институт атомной физики, Бухарест, Румыния.
IR — Радиевый институт, Вена, Австрия.
IRK — Институт радиоактивности и ядерной физики, Вена, Австрия.
IRPAR — Институт исследования, производства и применения радиоактивных изотопов, Прага, Чехословакия.
JEN — Совет по ядерной энергии, Мадрид, Испания.
KBBG — Общество по строительству и эксплуатации ядерных реакторов, Карлсруэ, ФРГ.
LNE — Национальная лаборатория Эссе, Париж, Франция.
NBS — Национальное бюро эталонов, Вашингтон, США.
NPL — Национальная физическая лаборатория, Теддингтон, Англия.
NPRL — Национальная физическая исследовательская лаборатория, Претория, ЮАР.
NRC — Национальный исследовательский совет, Онтарио, Канада.
PTB — Федеральный физико-технический институт, Брауншвейг, ФРГ.
UVVVR — см. IRPAR.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bureau International des Poids et Mesures. Resultats de la Comparaison du Phosphore 32. Comité International des Poids et Mesures. Paris, Gauthier — Villars, 1963.
2. A. A. Константинов. «Труды ВНИИМ», 30, 90 (1957).
3. A. Kotchine. Rapport sur la comparaison internationale du cobalt 60. Comité international des poids et mesures. Paris, 1963.
4. I. Roy, L. Cavallo. Rapport sur la Compara ison international du thallium 204. Comité interna tional der poids et mesures. Paris, 1963.
5. A. Rytz, I. Roy. Rapport Preliminaire sur la comparaison international de la methode $4\pi\beta_{-}\gamma$ (PC) au moyen du^{60}Co. Pavillon de Breteuil Sevres, France, 1963.
6. A. A. Константинов, A. E. Кочин. Труды институтов Госкомитета стандартов, мер и измерительных приборов при СМ СССР. Вып. 69 (129). М., Стандартгиз, 1962, стр. 13.

УДК 539.121.7

Асимптотика закона рассеяния медленных нейтронов

Л. В. Майоров

Асимптотическое поведение закона рассеяния медленных нейтронов [1] $S(\alpha, \beta)$ при больших α исследовалось в работах [1—3]. В работе [2] получена асимптотическая формула, которая не удовлетворяет принципу детального равновесия, однако имеет ясный физический смысл (рассеяние на свободном газе). Асимптотическая формула, полученная в работе [1], напротив, удовлетворяет принципу детального равновесия, но, как отмечалось в работе [4], не имеет такого ясного физического смысла. Обе формулы, естественно, отличаются друг от друга, а также от асимптотического разложения, полученного в работе [3] с помощью метода «перевала».

Так как в опубликованной литературе не разбирался вопрос о том, в какой области плоскости α,β справедливы эти разложения и в каком смысле они отличаются друг от друга, выведем общую асимптотическую формулу закона рассеяния медленных нейтронов, справедливую во всей плоскости α,β и применимую для ряда других физических задач, обзор которых можно найти, например, в работе [2]. При этом все известные разложения [1—3] можно получить как частные случаи общей асимптотической формулы. Приводятся также оценки остаточных членов разложения, которые ранее либо не приводились, либо были неверными [2].

Общая асимптотическая формула закона рассеяния. В некогерентном гауссовом приближении закон рассеяния медленных нейтронов можно записать в виде интеграла

$$S(\alpha, \beta)=\frac{1}{2\pi}e^{-\alpha\Delta\left(-\frac{i}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha\Delta(t)}e^{i\beta t}\,dt. \qquad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{E_0+E-2\cos\theta\sqrt{EE_0}}{MT};\quad \beta=\frac{E_0-E}{T};$$

T — температура среды; M — масса рассеивающего атома; E_0 и E — начальная и конечная энергии нейтрона; $\Delta(t)$ выражается через функцию $p(\beta)$, введенную в работе [1] и характеризующую динамические свойства рассеивающей среды с помощью соотношения

$$\Delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\beta)\,e^{i\beta t}\,dt. \qquad (2)$$

При этом

$$f(\beta)=\frac{p(\beta)}{\beta^2};\quad \Delta^{(n)}(i\tau)=(-i)^n\int_{-\infty}^{\infty}f(\beta)e^{\beta\tau}d\beta\equiv$$
$$\equiv(-i)^n f_n(\tau). \qquad (2')$$

Следуя [3], сместим контур интегрирования в (1) параллельно оси t на расстояние τ (в дальнейшем τ будет рассматриваться как произвольный параметр). Приняв во внимание (2), (2′) и сделав очевидные преобразования, получим

$$S(\alpha, \beta)=\frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{\alpha f_2(\tau)}}\,e^{-\alpha\left[\Delta\left(-\frac{i}{2}\right)-\Delta(i\tau)\right]}\,\psi_\tau(\alpha, x), \qquad (3)$$

где

$$x = \frac{\beta - \alpha f_1(\tau)}{\sqrt{\alpha f_2(\tau)}}; \tag{4}$$

$$\psi_\tau(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha f_2(\tau)}}, \tau\right)} e^{ixt}\, dt; \tag{5}$$

$$\varphi(t, \tau) = \Delta(t + i\tau) - \Delta(i\tau) - t\Delta'(i\tau). \tag{6}$$

В приложении показано, что для любой рассеивающей системы, отличной от эйнштейновского кристалла (спектр нормальных частот которого представляется суммой δ-функций), на основании центральной предельной теоремы в формулировке Крамера (см. [5], стр. 121) справедливо асимптотическое разложение

$$\int_{-\infty}^{x} \psi_\tau(\alpha, x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-x^2/2}\, dx +$$

$$+ e^{-x^2/2} \sum_{\nu=1}^{k-3} \frac{P_{3\nu-1,\,\tau}(x)}{\alpha^{\nu/2}} + R_k(\tau, \alpha, x), \tag{7}$$

где $P_{3\nu-1}(x)$ — полиномы степени $3\nu-1$ относительно x, а $k \geqslant 3$ может быть выбрано сколь угодно большим.

Для $R_k(\tau, \alpha, x)$ справедлива равномерная по x оценка

$$|R_k(\tau, \alpha, x)| \leqslant \frac{A_k(\tau)}{\alpha^{\frac{k-2}{2}}}. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) по x, получим общую асимптотическую формулу закона рассеяния, в которой τ — произвольный параметр [6]:

$$S(\alpha, \beta) = S_\tau(\alpha, \beta) \equiv$$

$$\equiv \frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{2\pi\alpha f_2(\tau)}} e^{-\alpha\left[\Delta\left(-\frac{i}{2}\right) - \Delta(i\tau)\right]} \left\{ e^{-x^2/2} \times \right.$$

$$\times \left[1 + \frac{g_3(\tau) H_1(x)}{3!\,[\alpha f_2(\tau)]^{1/2}} + \frac{1}{\alpha f_2(\tau)} \left(\frac{g_4(\tau) H_4(x)}{4!} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{10 g_3^2(\tau) H_6(x)}{6!} \right) + \frac{1}{[\alpha f_2(\tau)]^{3/2}} \left(\frac{g_5(\tau) H_5(x)}{5!} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{35}{7!} g_3(\tau) g_4(\tau) H_7(x) + \frac{280}{9!} g_3^3(\tau) H_9(x) \right) + \cdots \right] +$$

$$\left. + r_k(\tau, \alpha, x) \right\}. \tag{9}$$

Здесь $g_n(\tau) = f_n(\tau)/f_2(\tau)$; $H_n(x)$ — полиномы Эрмита;

$$r_k(\tau, \alpha, x) = \frac{d}{dx} R_k(\tau, \alpha, x).$$

Если закон рассеяния не имеет особенностей, то $r_k(\tau, \alpha, x)$ равномерно ограничено:

$$|r_k(\tau, \alpha, x)| \leqslant \frac{b_k(\tau)}{\alpha^{\frac{k-2}{2}}}. \tag{10}$$

Однако оценка (10) неверна, например, в случае рассеяния на кристалле, так как в $r_k(\tau, \alpha, x)$ входит δ-функция, соответствующая упругому рассеянию. В этом случае, как и всегда, справедлива равномерная оценка (8).

Отметим важное свойство общей асимптотической формулы, отражающее симметрию закона рассеяния (принцип детального равновесия). Так как $g_n(\tau) = (-1)^n g_n(-\tau)$, а $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$, то

$$S_\tau(\alpha, \beta) = S_{-\tau}(\alpha_1 - \beta). \tag{11}$$

Области применения общей асимптотической формулы. При любом выборе τ формулы (9)—(11) верны для всей плоскости α, β. Однако нетривиальную информацию о законе рассеяния по этим формулам можно получить лишь в том случае, когда при $\alpha \to \infty$ выражение $\frac{r_k(\tau, \alpha, x)}{e^{-x^2}} \to 0$, т. е. когда главные члены разложения убывают медленнее, чем отбрасываемые. Это требование сводится к тому, что x должно оставаться ограниченным при $\alpha \to \infty$, а именно:

$$|x| = \left| \frac{\beta - \alpha f_1(\tau)}{\sqrt{\alpha f_2(\tau)}} \right| \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

Здесь τ определяет частный вид общей асимптотической формулы, а ε — сколь угодно большое заданное число. Неравенство (12) выделяет в плоскости α, β область, которая при $\alpha \to \infty$ асимптотически сжимается в прямую $\frac{\beta}{\alpha} = f_1(\tau)$. При этом очевидно, что чем меньше ε, тем меньше максимум $|r_k(\tau, \alpha, x)|$ в области $|x| \leqslant \varepsilon$ $\left(\text{при этом всегда } |r_k| \leqslant \frac{b_k(\tau)}{\alpha^{\frac{k-2}{2}}}\right)$. Таким образом, при фиксированном числе членов формула (9) становится более точной с уменьшением ε.

Применение асимптотической формулы для вычисления закона рассеяния. Пусть требуется вычислить закон рассеяния при достаточно больших α вдоль прямых $|\beta|/\alpha = C$, где C — задано. Найдем корень τ_0 уравнения $f_1(\tau) = C$. Тогда не только для лучей $|\beta|/\alpha = C$, но и для целой области

$$|x| = \left| \frac{|\beta| - \alpha f_1(\tau_0)}{\sqrt{\alpha f_2(\tau_0)}} \right| \leqslant \varepsilon \tag{13}$$

(где ε — произвольное число) справедлива асимптотическая формула

$$S(\alpha, \beta) = \frac{e^{-|\beta|\tau_0}}{\sqrt{2\pi\alpha f_2(\tau_0)}} e^{-\alpha\left[\Delta\left(-\frac{i}{2}\right) - \Delta(i\tau_0)\right]} \times$$

$$\times \left\{ e^{-x^2/2} \left[1 + \frac{g_3(\tau_0) H_1(|x|)}{3!\,[\alpha f_2(\tau_0)]^{1/2}} + \cdots \right] + \right.$$

$$\left. + r_k(\tau, \alpha, x) \right\}, \tag{14}$$

остаточный член которой ограничен по модулю функцией $\xi_k(\varepsilon, \tau)/\alpha^{\frac{k-2}{2}}$, зависящей только от τ, и ε [$\xi_k \leqslant b_k(\tau)$]. Симметричная по β запись формулы (9) в виде (14) следует из соотношения (11), которое является следствием принципа детального равновесия.

Частные случаи. 1. Принимая в (13) и (14) $\tau = \frac{1}{2}$, получим асимптотическое разложение закона рассеяния, которое при $\beta > 0$ совпадает с формулой Нелкина — Паркса [2] (для простоты здесь и в дальнейшем приводится только первый член разложения):

$$S(\alpha, |\beta|) = \frac{e^{-|\beta|/2}}{\sqrt{2\pi\alpha f_2(\tau_0)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(|\beta|-\alpha)^2}{2\alpha f_2(1/2)} \right] + \frac{\xi_1(\alpha, \beta)}{\alpha^{1/2}} \right\}, \quad (\xi_1 \leqslant b_1). \tag{15}$$

Таким образом, (15) в отличие от формулы Нелкина — Паркса удовлетворяет принципу детального равновесия. Кроме того, правильная оценка остаточного члена (14) отличается от оценки, приведенной в работе [2].

2. При $\tau = 0$ из (13) и (14) следует формула [1]:

$$S(\alpha, \beta) = \frac{e^{-\alpha\left[\Delta\left(-\frac{i}{2}\right) - \Delta(0)\right]}}{\sqrt{2\pi\alpha f_2(0)}} \left(e^{-\beta^2/2} + \frac{\xi_1}{\alpha^{1/2}} \right), \quad |\xi_1| \leqslant b_1. \tag{16}$$

3. Задавая произвольное значение τ и принимая в (13) $\varepsilon = 0$, из (14) получим формулу Эгелстаффа — Скофилда [3], выведенную с помощью метода «перевала» формально без оценки остаточного члена. Так как $H_{2n+1}(x) = 0$, то при $\varepsilon = x = 0$ в формуле (14) исчезают члены с дробными степенями α.

Как следует из вышесказанного, все три частных асимптотических разложения справедливы в области, заданной неравенством (13) при соответствующем выборе ε (в том смысле, что в этой области они дают нетривиальную информацию о законе рассеяния).

В заключение автору приятно выразить благодарность В. Ф. Турчину за ряд критических замечаний и обсуждение результатов, а также О. Б. Москалеву за внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция $\psi_\tau(\alpha, x)$ — положительная. Ее моменты можно вычислить следующим образом:

$$\gamma_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi_\tau(\alpha, x)\, dx = i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha f_2(\tau)}}, \tau\right)} \delta^{(n)}(t)\, dt = (-i)^n \left[\exp\left\{ \alpha\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha f_2}}, \tau \right) \right\} \right]^{(n)}_{t=0}. \tag{П.1}$$

Так как в соответствии с (П.1) все моменты γ_n функции $\psi_\tau(\alpha, x)$ существуют, то, в частности, $\gamma_0 = 1$; $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = 1$. Поэтому $\int_{-\infty}^{x} \psi_\tau\, dx$ удовлетворяет требованиям, которым должна удовлетворять функция распределения вероятностей, чтобы была справедлива центральная предельная теорема теории вероятностей в формулировке Крамера (см. [5], стр. 121, теорема 30), из которой следует асимптотическое разложение (7) с оценкой остаточного члена (8), верной в том случае, когда характеристическая функция e^{φ} такова, что

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\, e^{\varphi} < 1. \tag{П.2}$$

Из (6) следует, что неравенство (П.2) может нарушаться только в том случае, когда $f(\varepsilon)$ представляется суммой δ-функций вида $\delta(\varepsilon - \varepsilon_i)$, т. е. для эйнштейновского кристалла (точнее, для рассеивателя с неразмазанными по энергии оптическими колебаниями).

Поступило в Редакцию 15/VI 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Egelstaff. Proc. Simp. Vienna, 1960, p. 25.
2. M. Nelkin, D. Parks. Phys. Rev., **119**, 1060 (1960).
3. P. Egelstaff, P. Schofield. Nucl. Sci. Engng, **12**, 260 (1962).
4. Х. Пурохит. В сб. «Термализация нейтронов». М., Атомиздат, 1964.
5. Г. Крамер. Случайные величины и распределение вероятностей. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
6. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

УДК 621.039.519.4

Физические характеристики критической сборки с замедлителем из окиси бериллия

С. С. Ломакин

В работе [1] были описаны эксперименты и расчеты, касающиеся критических сборок с бериллиевым замедлителем. В настоящей работе сообщается об исследованиях, предпринятых для определения нейтронно-физических характеристик критической сборки с замедлителем из окиси бериллия.

Исследовавшаяся критическая сборка в форме параллелепипеда была собрана из блоков и пластин окиси бериллия и плоских твэлов, расположенных между блоками замедлителя в горизонтальных плоскостях так, что образовывалась плоская решетка. Размеры блоков замедлителя $100 \times 100 \times 50$ *мм*, пластин $100 \times 50 \times 15$ *мм* (плотность 2,8 *г/см*^{3}). Твэлы были изготовлены на основе фторопласта-4 [2]. Сборка в основном состояла из блоков замедлителя, которые укладывались слоями. Приближение к критическому