УДК 535.51

ПОЛУГРУППЫ МЮЛЛЕРА РАНГА 1 И 2

Е.М. Овсиюк[1], **О.В. Веко**[1], **В.М. Редьков**[2]

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь*
[2]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск*

MUELLER SEMIGROUPS OF THE RANK 1 AND 2

E.M. Ovsiyuk[1], **O.V. Veko**[1], **V.M. Red'kov**[2]

[1] *I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University, Mozyr*
[2]*B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk*

С использованием линейного разложения вещественных 4×4-матриц по дираковскому базису построены явно некоторые простые множества вырожденных матриц Мюллера рангов 1 и 2, обладающие структурой полугрупп; исследованы их свойства, важные в поляризационной оптике.

Ключевые слова: *матрицы Мюллера, поляризационная оптика, полугруппа.*

Several simple sets of degenerated Mueller matrices of the rank 1 and 2 having the structure of semigroups are constructed explicitly with the use of a linear expansion of real 4×4-matrices in terms of Dirac matrices. The properties important in polarization optics are considered.

Keywords: *Mueller matrix, polarization optics, semigroup.*

Введение

В поляризационной оптике большое значение имеют матрицы Мюллера [1]. Из них выделяют важное подмножество матриц Мюллера, образующих групповую структуру, изоморфную группе Лоренца [2]–[8]. В отдельный класс выделяют вырожденные матрицы Мюллера, определитель которых равен нулю. Для описания таких матриц невозможно использовать теоретико-групповые методы. Основная цель настоящей работы – сформулировать общий подход в исследовании вырожденных матриц Мюллера и детально рассмотреть описание некоторых множеств таких матриц.

1 О параметризации линейной группы $GL(4,C)$

Так как матрицы Мюллера – это вещественные 4×4-матрицы, действующие на вещественный 4-мерный вектор Стокса, то для исследования всех возможных матриц Мюллера можно воспользоваться параметризацией 4-мерных матриц, получаемой на основе матриц Дирака [9]–[12]. При этом произвольная 4-мерная матрица с комплексными элементами представима в виде (будем использовать спинорный базис):

$$\begin{vmatrix} k_0+\mathbf{k}\,\vec\sigma & n_0+\mathbf{n}\,\vec\sigma \\ l_0+\mathbf{l}\,\vec\sigma & m_0+\mathbf{m}\,\vec\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & N \\ L & M \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Параметры матрицы-произведения представим следующими формулами:

$$\begin{gathered}
k''_0 = k_0\,k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + n'_0\,l_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{l},\\
m''_0 = m_0\,m_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{m} + l'_0\,n_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{n},\\
n''_0 = k_0\,n_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{n} + n'_0\,m_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{m},\\
l''_0 = l_0\,k_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{k} + m'_0\,l_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{l},\\
\mathbf{k}'' = k'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\,k_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + n_0\,\mathbf{l} + \mathbf{n}'\,l_0 + i\,\mathbf{n}'\times\mathbf{l},\\
\mathbf{m}'' = m'_0\,\mathbf{m} + \mathbf{m}'\,m_0 + i\,\mathbf{m}'\times\mathbf{m} + l_0\,\mathbf{n} + \mathbf{l}'\,n_0 + i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{n},\\
\mathbf{n}'' = k'_0\,\mathbf{n} + \mathbf{k}'\,n_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{n} + n_0\,\mathbf{m} + \mathbf{n}'\,m_0 + i\,\mathbf{n}'\times\mathbf{m},\\
\mathbf{l}'' = l'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{l}'\,k_0 + i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{k} + m_0\,\mathbf{l} + \mathbf{m}'\,l_0 + i\,\mathbf{m}'\times\mathbf{l}.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Для получения множества вещественных матриц достаточно потребовать, чтобы компоненты параметров $(k,\ m,\ l,\ n)$, отмеченные индексом 2, были мнимыми, а все остальные компоненты – вещественными. Вырожденными матрицами Мюллера называют матрицы Мюллера с равным нулю определителем. Множества таких матриц обладают структурой полугрупп (элементы множества можно перемножать, но обратные элементы не существуют). Из числа вырожденных матриц Мюллера можно выделить подклассы, основываясь на понятии ранга матрицы: класс матриц с рангом 3, с рангом 2, с рангом 1. Далее представим описание некоторых классов вырожденных матриц Мюллера с рангом 1 и 2.

2 Общий анализ возможных подмножеств в $GL(4,C)$

Предположим, что некоторые интересные подгруппы (или подмножества) матриц можно получить, накладывая на параметры матриц дополнительные условия линейной зависимости

$$\begin{gathered} A\,\mathbf{k} + B\,\mathbf{m} + C\,\mathbf{n} + D\,\mathbf{l} = 0,\\ \alpha\,k_0 + \beta\,m_0 + s\,n_0 + t\,l_0 = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

В данной работе проанализируем матрицы с одним независимым вектором – вариант **I(k)**:

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}, \qquad n_0 = \alpha\, k_0,$$
$$\mathbf{m} = B\,\mathbf{k}, \qquad m_0 = \beta\, k_0, \qquad (2.2)$$
$$\mathbf{l} = D\,\mathbf{k}, \qquad l_0 = t\, k_0.$$

Можно рассматривать и варианты, основанные на других векторах **m, n, l**.

3 Один независимый вектор

При выполнении (2.2) формулы умножения параметров (1.2) принимают вид:

$$\begin{gathered}
k''_0 = k_0\, k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + \alpha t\, k'_0 k_0 + AD\,\mathbf{k}'\mathbf{k},\\
m''_0 = \beta^2\, k_0 k_0 + B^2\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k} + t\alpha\, k'_0\, k_0 + DA\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k},\\
n''_0 = \alpha\, k_0 k_0 + A\,\mathbf{k}'\mathbf{k} + \alpha\beta\, k'_0\, k_0 + AB\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k},\\
l''_0 = t\, k_0\, k_0 + D\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k} + \beta t\, k'_0 k_0 + BD\,\mathbf{k}'\mathbf{k},\\
\mathbf{k}'' = k'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\, k_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} +\\
+\alpha D\, k_0\,\mathbf{k} + At\,\mathbf{k}' k_0 + iAD\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k},\\
\mathbf{m}'' = \beta B\, k'_0\mathbf{k} + B\beta\,\mathbf{k}'\, k_0 + iB^2\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} +\\
+tA\, k_0\mathbf{k} + D\alpha\,\mathbf{k}'\, k_0 + iDA\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k},\\
\mathbf{n}'' = A\, k'_0\,\mathbf{k} + \alpha\,\mathbf{k}'\, k_0 + iA\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} +\\
+\alpha B\, k_0\mathbf{k} + A\beta\,\mathbf{k}'\, k_0 + iAB\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k},\\
\mathbf{l}'' = t\, k'_0\mathbf{k} + D\,\mathbf{k}' k_0 + iD\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} +\\
+\beta D\, k_0\,\mathbf{k} + Bt\,\mathbf{k}'\, k_0 + iBD\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k}.
\end{gathered} \qquad (3.1)$$

При выполнении соотношений (2.2) для параметров, отмеченных двумя штрихами, из формул (3.1) следует система уравнений, связывающих коэффициенты, содержащиеся в (2.2):

$$\begin{gathered}
\alpha(1+\beta) = \alpha(1+\alpha t), \quad A(1+B) = \alpha(1+AD),\\
(\beta^2 + t\alpha) = \beta(1+\alpha t), \quad (B^2 + DA) = \beta(1+AD),\\
t(1+\beta) = t(1+\alpha t), \quad D(1+B) = t(1+AD),\\
(A+\alpha B) = A(1+\alpha D), \quad (\alpha + A\beta) = A(1+At),\\
A(1+B) = A(1+AD), \quad (\beta B + tA) = B(1+\alpha D),\\
(B\beta + D\alpha) = B(1+At), \quad (B^2 + AD) = B(1+AD),\\
(t+\beta D) = D(1+\alpha D), \quad (D+Bt) = D(1+At),\\
D(1+B) = D(1+AD).
\end{gathered} \qquad (3.2)$$

Каждое решение этой системы соответствует или некоторой подгруппе, или некоторой подполугруппе (множеству матриц с равными нулю определителями, замкнутое относительно операции умножения). Наша задача состоит в нахождении всех решений этой системы.

Прежде всего, отметим, что система уравнений (3.2) имеет тривиальное решение при условии трех равных нулю блоков (будем обозначать решения уравнений как (K–1) и т. п.), и решение $(K-1)$ имеет вид:

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0,$$
$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (3.3)$$

все 4-мерные матрицы в (3.3) вырождены: их определитель равен нулю. Ранг матриц равен 2 или 1 (в последнем случае должно выполняться условие $\det K = 0$).

Исследуем решения, получаемые при условии равенства нулю двух блоков; при этом есть три возможности.

Сначала предположим, что

$$A = \alpha = 0, \quad D = t = 0;$$

при этом из системы (3.2) следует, что

$$\beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta, \quad \beta B = B, \quad B^2 = B;$$

и (в дополнение к уже рассмотренному тривиальному решению (3.3), которое имеет место при $B = \beta = 0$) получаем новое:

$$(K-2), \; A = \alpha = 0, \quad D = t = 0, \quad D = \beta = +1,$$
$$G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \qquad (3.4)$$

соответствующее множеству невырожденных матриц со структурой подгруппы.

Теперь предположим, что

$$A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0;$$

тогда из системы (3.2) следуют соотношения:

$$\begin{gathered}
0 = 0, \quad A = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad t = t, \quad D = t,\\
0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0,\\
t = D, \quad D = D, \quad D = D,
\end{gathered}$$

с учетом которых получаем решение:

$$(K-3), \quad A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t,$$
$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix},$$
$$G'G = \begin{vmatrix} K' & 0 \\ DK' & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & 0 \\ DK'K & 0 \end{vmatrix}, \qquad (3.5)$$

соответствующее множеству вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Допустим, что

$$B = \beta = 0, \quad D = t = 0;$$

при этом из системы (3.2) получим

$$\begin{gathered}
\alpha = \alpha, \quad A = \alpha, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0,\\
A = A, \quad \alpha = A, \quad A = A, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0,\\
0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0
\end{gathered}$$

и найдем решение

$$(K-4), \quad A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0,$$
$$G = \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$G'G = \begin{vmatrix} K' & AK' \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & AK'K \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (3.6)$$

которым определяется множество вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Исследуем решения при наличии в матрице одного нулевого блока.

При $A = \alpha = 0$ из системы (3.2) получим

$$\begin{gathered}
0 = 0, \quad 0 = 0, \quad \beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta,\\
t(1+\beta) = t, \quad D(1+B) = t, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0,\\
\beta B = B, \quad B\beta = B, \quad B^2 = B,
\end{gathered}$$

$$(t+\beta D)=D, \quad (D+Bt)=D, \quad D(1+B)=D. \quad (3.7)$$

Уравнения имеют только два (уже найденные) решения:

$$(K-3), \quad A=\alpha=0, \quad B=\beta=0, \quad t=D,$$

$$G=\begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}$$

и $(K-2), \quad A=\alpha=0, \quad B=\beta=+1, \quad D=t=0,$

$$G=\begin{vmatrix} k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}.$$

Исследуем второй случай при одном нулевом блоке $D=t=0$ из системы (3.2) найдем:

$$\alpha\beta=0, \quad A(1+B)=\alpha, \quad \beta^2=\beta, \quad B^2=\beta,$$

$$0=0, \quad 0=0,$$

$$(A+\alpha B)=A, \quad (\alpha+A\beta)=A, \quad AB=0,$$

$$\beta B=B, \quad B\beta=B, \quad B^2=B,$$

$$0=0, \quad 0=0, \quad 0=0. \quad (3.8)$$

Анализируя систему (3.8), выявляем две (уже известные) возможности:

$$(K-2), \quad A=\alpha=0, \quad B=+1, \quad \beta=+1, \quad D=t=0,$$

$$G=\begin{vmatrix} k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}.$$

$$(K-1), \quad A=\alpha, \quad B=\beta=0, \quad D=t=0,$$

$$G=\begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассматривая третий случай при одном нулевом блоке: $B=\beta=0$, из системы (3.2) получим

$$0=\alpha^2 t, \quad A=\alpha(1+AD), \quad t\alpha=0, \quad DA=0,$$

$$0=\alpha t^2, \quad D=t(1+AD),$$

$$0=A\alpha D, \quad \alpha=A(1+At), \quad 0=A^2 D,$$

$$tA=0, \quad D\alpha=0, \quad AD=0,$$

$$t=D(1+\alpha D), \quad 0=DAt, \quad 0=AD^2. \quad (3.9)$$

Этой системе соотношений удовлетворяют только два (уже описанные выше) решения:

$$(K-4), \quad A=\alpha, \quad B=\beta=0, \quad D=t=0,$$

$$G=\begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(K-3), \quad A=\alpha=0, \quad B=\beta=0, \quad D=t,$$

$$G=\begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нулевых блоков нет:

$$A,\alpha\neq 0, \quad B,\beta\neq 0, \quad D,t\neq 0;$$

при этом из системы уравнений (3.2) следуют соотношения

$$\beta=+\alpha t, \quad A(1+B)=\alpha(1+AD),$$

$$(\beta^2+t\alpha)=\beta(1+\alpha t), \quad (B^2+DA)=\beta(1+AD),$$

$$\beta=+\alpha t, \quad D(1+B)=t(1+AD),$$

$$B=AD, \quad (\alpha+A\beta)=A(1+At), \quad B=AD,$$

$$(\beta B+tA)=B(1+\alpha D), \quad (B\beta+D\alpha)=B(1+At),$$

$$(B^2+AD)=B(1+AD),$$

$$(t+\beta D)=D(1+\alpha D), \quad B=AD, \quad B=AD.$$

Исключим из уравнений B и β:

$$B=AD, \quad \beta=\alpha t;$$

и запишем оставшиеся независимые уравнения:

$$(A-\alpha)(1+AD)=0, \quad (AD-\alpha t)(1+AD)=0,$$

$$(D-t)(1+AD)=0, \quad (A-\alpha)(1+At)=0,$$

$$(D-t)(1+\alpha D)=0. \quad (3.10)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $A=\alpha$ и система (3.10) примет вид

$$A=\alpha, \quad (D-t)(1+AD)=0.$$

Решая эту систему, получим два новых решения: решение

$$(K-5), \quad A=\alpha, \quad B=\beta=AD, \quad D=t;$$

$$G=\begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix}, \quad (3.11)$$

соответствующее множеству вырожденных матриц ранга 2; легко убедиться, что для элементов этих матриц закон умножения выполняется:

$$\begin{vmatrix} K' & AK' \\ DK' & ADK' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} (K'K+ADK'K) & A(K'K+ADK'K) \\ D(K'K+ADK'K) & AD(K'K+ADK'K) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что если выбрать $D=-A^{-1}$, то результат умножения двух матриц всегда будет равен нулю.

Решение $(K-5)'$ имеет место при

$$A=\alpha, \quad B=\beta=-1, \quad D=t;$$

$$G=\begin{vmatrix} K & AK \\ -A^{-1}K & -K \end{vmatrix}, \quad G'G=0; \quad (3.12)$$

$(K-6)$, при

$$A=\alpha, \quad B=-1, \quad \beta=-At, \quad D=-\frac{1}{A},$$

$$G=\begin{vmatrix} k_0+\vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0+A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0-A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0-\vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

это также вырожденные матрицы ранга 2.

Можно выделить два более простых частных случая:

при $t=A, \quad G=\begin{vmatrix} k_0+\vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0+A\vec{k}\vec{\sigma} \\ Ak_0-A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & A^2k_0-\vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix};$

при $t=A^{-1}, \quad G=\begin{vmatrix} k_0+\vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0+A\vec{k}\vec{\sigma} \\ A^{-1}k_0-A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & k_0-\vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}.$

Проверим выполнимость закона умножения – условия, при котором матрица имеет структуру полугруппы во множестве (3.13):

$$G'G\begin{vmatrix} k_0+\vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0+A\vec{k}'\vec{\sigma} \\ tk_0-A^{-1}\vec{k}'\vec{\sigma} & Atk_0-\vec{k}'\vec{\sigma} \end{vmatrix}\times$$

$$\times \begin{vmatrix} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix} = G''.$$

Результат умножения запишем по блокам (обозначим блоки парами цифр (ij)):

$$(11) = (1 + At)\, k'_0 k_0 + (1 + At)\vec{k}'k_0\vec{\sigma},$$

$$(12) = A\left[(1 + At)\, k'_0 k_0 + (1 + At)\vec{k}'k_0\vec{\sigma}\right],$$

$$(21) = t\,(1 + At)\, k'_0 k_0 - A^{-1}\,(1 + At)\vec{k}'k_0\vec{\sigma},$$

$$(22) = At\,(1 + At)\, k'_0 k_0 - (1 + At)\vec{k}'k_0\vec{\sigma}$$

или

$$k_0 = (1 + At)k_0\, k'_0, \quad \vec{k}'' = (1 + At)k_0\, \vec{k}';$$

другими словами, структура матрицы $G'' = G'G$ в большей степени подобна структуре матрицы G.

Теперь определим решения системы (3.10) при

$$A \neq \alpha, \quad 1 + AD = 0;$$

получим единственное решение:

$$(K-7), \quad B = -1, \quad \beta = -\frac{\alpha}{A}, \quad D = t = -\frac{1}{A},$$

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & \alpha k_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0 + \vec{k}\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}, \quad (3.14)$$

соответствующее множеству вырожденных матриц ранга 2. Перемножим две матрицы вида (3.14) (записывая результат умножения по блокам):

$$(11) = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k_0 k_0 + \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\,\vec{\sigma},$$

$$(12) = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k_0 k_0 + A\left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\,\vec{\sigma},$$

$$(21) = -A^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k_0 k_0 - A^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\,\vec{\sigma},$$

$$(22) = -A^{-1}\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k_0 k_0 - \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\,\vec{\sigma}.$$

Следовательно, закон умножения (в полугруппе) имеет вид:

$$G'' = G'G,$$

$$k''_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k_0 k_0, \; \vec{k}'' = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}. \quad (3.15)$$

Таким образом, анализ варианта **I(k)** завершен полностью: найдено 7 типов решений; одно из них определяет структуру подгрупп, остальные 6 соответствуют разным по структуре полугруппам.

4 О структуре полугруппы матриц Мюллера с рангом 1

Рассмотрим детально частный случай вырожденных матриц Мюллера ранга 1, воспользовавшись выражением для вырожденной вещественной матрицы Мюллера ранга 2 (производим при этом замену $k_2 \Rightarrow ik_2$)

$$M = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Если определитель 2-мерной матрицы равен нулю, то получаем вырожденную матрицу ранга 1, для которой выполняются соотношения

$$k_1 - k_2 = \mu(k_0 + k_3), \quad k_0 - k_3 = \mu(k_1 + k_2), \quad (4.2)$$

отсюда следуют равенства

$$k_1 = \frac{1+\mu^2}{2\mu}k_0 - \frac{1-\mu^2}{2\mu}k_3, \qquad k_2 = \frac{1-\mu^2}{2\mu}k_0 - \frac{1+\mu^2}{2\mu}k_3. \quad (4.3)$$

Введем обозначения

$$k_0 + k_3 = A, \quad k_0 - k_3 = B \quad (4.4)$$

и преобразуем матрицу Мюллера к виду (следим за блоком 2×2):

$$M = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & \mu^{-1}(k_0 - k_3) \\ \mu(k_0 + k_3) & k_0 - k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mu^{-1}B \\ \mu A & B \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

Результат действия на 4-вектор Стокса матрицы Мюллера задается выражениями:

$$S'_0 = AS_0 + \frac{B}{\mu}S_1, \quad S'_1 = \mu AS_0 + BS_1,$$

$$(S'_0)^2 - (S'_1)^2 = A^2(1-\mu^2)\,S_0^2 + {}$$

$$+2AB\left(\frac{1}{\mu} - \mu\right)S_0 S_1 + B^2\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)S_1^2. \quad (4.6)$$

Заметим, что при этом выполняется равенство (свойство частично поляризованного света)

$$(S'_0)^2 - (S'_1)^2 =$$

$$= \left(A\sqrt{1-\mu^2}\;S_0 + B\,\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\,S_1\right)^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

Очевидно, что необходимо ввести ограничение

$$\mu^2 \leq +1. \quad (4.8)$$

Значения $\mu = \pm 1$ соответствуют полной поляризации пучка; при этом $(S'_0)^2 - (S'_1)^2 = 0$. Отметим, что из общих формул следуют, в частности, матрицы Мюллера для однородных идеальных линейных поляризаторов, записанные в [1, с. 318]:

$$A = \frac{1}{2}, \; B = \frac{1}{2}, \; \mu = \pm 1, M = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Найдем вид закона умножения матриц вида (4.5). Запишем

$$\begin{vmatrix} A' & \mu'^{-1}B' \\ \mu'A' & B' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & \mu^{-1}B \\ \mu A & B \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (A'A + \mu'^{-1}B'\mu A) & (A'\mu^{-1}B + \mu'^{-1}B'B) \\ (\mu'A'A + B'\mu A) & (\mu'A'\mu^{-1}B + B'B) \end{vmatrix}, \quad (4.10)$$

откуда следует, что

$$A'' = A'A + \mu'^{-1}\mu\, B'A, \qquad B'' = \mu'\mu^{-1}\, A'B + B'B \tag{4.11}$$

и

$$\mu'' = \frac{\mu' A'A + B'\mu A}{A'A + \mu'^{-1}\mu\, B'A} = \frac{\mu'^2\, A'A + \mu'\mu\, B'A}{\mu' A'A + \mu\, B'A} = \mu',$$

$$\mu''^{-1} = \frac{A'\mu^{-1}B + \mu'^{\,-1}B'B}{\mu'\mu^{-1}\, A'B + B'B} = \frac{\mu' A'A + \mu B'A}{\mu'^2\, A'A + \mu'\mu\, B'A} = \frac{1}{\mu'}. \tag{4.12}$$

Есть еще одно требование, которому должны удовлетворять матрицы Мюллера: знак компонента 4-вектора Стокса, отмеченного индексом ноль, не может быть отрицательным. В соответствии с (4.6) имеем:

$$S'_0 = AS_0 + \frac{B}{\mu} S_1 \geq 0, \quad S'_1 = \mu A S_0 + BS_1.$$

Очевидно, что результат преобразования при этом существенно зависит от свойств начального пучка. Например, если у начального пучка $S_1 > 0$ и выбрать положительными все три параметра:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad \mu > 0, \tag{4.13}$$

то в результате последовательного комбинирования таких элементов мы не будем выходить за пределы множества мюллеровских матриц (4.13), при этом всегда $S'_1 \geq 0$. Если же у начального пучка $S_1 < 0$, то имеем два положительных параметра и один отрицательный:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad \mu < 0, \tag{4.14}$$

и в результате последовательного комбинирования таких элементов мы не будем выходить за пределы множества мюллеровских матриц (4.14); при этом всегда $S'_1 \leq 0$. Таким образом, возможны два класса оптических элементов с плавно еняющими характеристиками A, B, μ.. Матрицы Мюллера идеальных поляризаторов (4.9) соответствуют этим двум классам.

5 О структуре полугруппы матриц Мюллера с рангом 2

Запишем матрицу

$$M = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{5.1}$$

$$k_0^2 - k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 \neq 0.$$

Найдем результат действия этой матрицы на компоненты 4-вектора Стокса:

$$S'_0 = (k_0 + k_3)S_0 + (k_1 + k_2)S_1, \qquad S'_1 = (k_1 - k_2)S_0 + (k_0 - k_3)S_1, \tag{5.2}$$

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = (S_0^2 - S_1^2)\,(k_0^2 + k_3^2 - k_1^2 - k_2^2) + 2S_0S_1\,(k_1k_2 + k_0k_3) + 4(S_0^2 + S_1^2)\,(k_0k_2 + k_1k_3)\,. \tag{5.3}$$

С использованием обозначений

$$A = k_0^2 + k_3^2 - k_1^2 - k_2^2, \quad B = 4(k_0k_2 + k_1k_3), \quad C = (k_1k_2 + k_0k_3)$$

предыдущему равенству придадим вид:

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = (A + B)S_0^2 + 2CS_0S_1 + (B - A)S_1^2. \tag{5.4}$$

Анализируя полученное соотношение, убеждаемся, что не все матрицы этого множества могут быть использованы в качестве мюллеровских.

Попытаемся найти решения на другой основе. В группе преобразований (5.2) есть три нетривиальные подгруппы, и довольно легко решить вопрос об их пригодности для использования в качестве (2-мерных) мюллеровских матриц. Для первой подгруппы матриц выполняются соотношения

$$(k_2 = 0, k_3 = 0) \quad k_0 = D \operatorname{ch} \beta, \quad k_1 = D \operatorname{sh} \beta,$$

$$S'_0 = D \operatorname{ch}\beta S_0 + D \operatorname{sh}\beta S_1, \quad S'_1 = D \operatorname{sh}\beta S_0 + D \operatorname{ch}\beta S_1,$$

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = D^2(S_0^2 - S_1^2)\,. \tag{5.5}$$

Она вполне пригодна для описания 2-мерных мюллеровских матриц. Наиболее простой вариант подгруппы этого типа имеем при $D = +1$.

Для второй подгруппы матриц

$$(k_1 = 0, k_2 = 0) \quad k_0 = D \operatorname{ch} \lambda, \quad k_3 = D \operatorname{sh} \lambda,$$

$$S'_0 = D\,(\operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda)S_0 = De^{+\lambda}S_0, \quad S'_1 = D\,(\operatorname{ch} - \operatorname{ch} \lambda)S_1 = De^{-\lambda}S_1,$$

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = D^2(e^{+2\lambda}S_0^2 - e^{-2\lambda}S_1^2)\,, (S_0^2 \geq S_1^2)\,. \tag{5.6}$$

Эти матрицы пригодны для использования в качестве мюллеровских, хотя имеют довольно необычные свойства. Так, если для простоты предположить, что $D^2 = +1$, то из (5.6) получим

$$S'_0 = e^{+\lambda}S_0, \quad S'_1 = e^{-\lambda}S_1,$$

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = e^{+2\lambda}S_0^2 - e^{-2\lambda}S_1^2, \ (S_0^2 \geq S_1^2). \tag{5.7}$$

При увеличении положительных значений λ интенсивность пучка монотонно растет, а степень поляризации монотонно стремится к нулю. При отрицательных значениях λ, но таких, что $e^{4\lambda} > S_1^2/S_0^2$, интенсивность света уменьшается с убыванием модуля показателя степени, а степень поляризации увеличивается, достигая максимума, когда $e^{4\lambda} = S_1^2/S_0^2$. Следовательно, матрицы такой структуры пригодны для задания матриц Мюллера, только если выполнены условия

$$-\ln\left(\frac{S_0^2}{S_1^2}\right) \leq \lambda < +\infty\,. \tag{5.8}$$

В общем случае ограничение (5.8) несовместимо с глобальной структурой этой подгруппы. Действительно, закон умножения абелев: $\lambda'' = \lambda' + \lambda,$ и условие (5.8) будет нарушаться при умножении элементов этой группы (если параметры отрицательны и достаточно велики по модулю). Однако очевидно, что существует вполне интерпретируемая подгруппа при всех $\lambda \in [0, +\infty)$; вероятно, именно ее и следует рассматривать как представляющую интерес в поляризационной оптике.

Из общих соображений понятно, что всякое произведение двух матриц

$$M(\beta)M(\lambda) = \begin{vmatrix} \text{ch}\,\beta & \text{sh}\,\beta \\ \text{sh}\,\beta & \text{ch}\,\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{+\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{+\lambda}\text{ch}\,\beta & e^{-\lambda}\text{sh}\,\beta \\ e^{+\lambda}\text{sh}\,\beta & e^{-\lambda}\text{ch}\,\beta \end{vmatrix} \qquad (5.9)$$

заведомо будет описывать вырожденную мюллеровскую матрицу ранга 2. Действительно,

$$S'_0 = e^{+\lambda}\text{ch}\,\beta S_0 + e^{-\lambda}\text{sh}\,\beta S_1,$$
$$S'_0 = e^{+\lambda}\text{sh}\,\beta S_0 + e^{-\lambda}\text{ch}\,\beta S_1,$$
$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = e^{2\lambda} S_0^{\,2} - e^{-2\lambda} S_1^{\,2}. \qquad (5.10)$$

В результате перемножения получаются матрицы со следующей структурой:

$$M(\beta)M(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{+\lambda}\text{ch}\,\beta & e^{-\lambda}\text{sh}\,\beta \\ e^{+\lambda}\text{sh}\,\beta & e^{-\lambda}\text{ch}\,\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 \end{vmatrix},$$
$$k_0 = \text{ch}\,\lambda\,\text{ch}\,\beta,\quad k_3 = \text{sh}\,\lambda\,\text{ch}\,\beta,\quad k_1 = \text{ch}\,\lambda\,\text{sh}\,\beta,\quad k_2 = -\text{sh}\,\lambda\,\text{sh}\,\beta,\quad k_0k_2 + k_1k_3 = 0. \qquad (5.11)$$

Однако, полученное при этом 2-параметрическое множество матриц (5.11) не образует группы.

Если перемножать матрицы в обратном порядке:

$$M(\lambda)M(\beta) = \begin{vmatrix} e^{+\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ch}\,\beta & \text{sh}\,\beta \\ \text{sh}\,\beta & \text{ch}\,\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{+\lambda}\text{ch}\,\beta & e^{+\lambda}\text{sh}\,\beta \\ e^{-\lambda}\text{sh}\,\beta & e^{-\lambda}\text{ch}\,\beta \end{vmatrix}, \qquad (5.12)$$

то основное неравенство также выполняется –

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = e^{+2\lambda}(\text{ch}\,\beta S_0 + \text{sh}\,\beta S_1)^2 - e^{-2\lambda}(\text{sh}\,\beta S_0 + \text{ch}\,\beta S_1)^2 > 0; \qquad (5.13)$$

в результате получаются матрицы вида

$$M(\lambda)M(\beta) = \begin{vmatrix} e^{+\lambda}\text{ch}\,\beta & e^{+\lambda}\text{sh}\,\beta \\ e^{-\lambda}\text{sh}\,\beta & e^{-\lambda}\text{ch}\,\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 \end{vmatrix},$$
$$k_0 = \text{ch}\,\lambda\,\text{ch}\,\beta,\quad k_3 = \text{sh}\,\lambda\,\text{ch}\,\beta,\quad k_1 = \text{ch}\,\lambda\,\text{sh}\,\beta,\quad k_2 = +\text{sh}\,\lambda\,\text{sh}\,\beta,\quad k_0k_2 - k_1k_3 = 0, \qquad (5.14)$$

2-параметрическое множество которых также не образует группы.

Для матриц третьей подгруппы $(k_1 = 0,\ k_3 = 0)$ $k_0 = D\cos\alpha,\ k_2 = D\sin\alpha,$

$$S'_0 = D(\cos\alpha\, S_0 + \sin\alpha\, S_1),$$
$$S'_1 = D(-\sin\alpha\, S_0 + \cos\alpha\, S_1),$$
$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = D^2\left[(S_0^2 - S_1^2)\cos 2a + 2S_0S_1\sin 2a\right]. \qquad (5.15)$$

Последнее выражение может быть как положительным, так и отрицательным. Это означает, что вся подгруппа в целом не может рассматриваться как пригодная для задания подгруппы матриц Мюллера.

Заключение

В заключение отметим, что в работе методом анализа структуры полугрупп исследована только небольшая часть вырожденных матриц Мюллера. Данная методика может быть обобщена и использована для анализа и других вырожденных матриц Мюллера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снопко, В.Н.* Поляризационные характеристики оптического излучения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 336с.

2. *Федоров, Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

3. *Бикватернионы и матрицы Мюллера* / А.А. Богуш [и др.]. // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.

4. *Длугунович, В.А.* Векторная параметризация преобразованной группы Лоренца и полярное разложение матриц Мюллера / В.А. Длугунович, Ю.А. Курочкин // Оптика и спектроскопия. – 2009. – Т. 107, № 2. – С. 312–317.

5. *Dlugunovich, V.A.* The Polar Decomposition And Vector Parametrization Of The Mueller Matrices / V.A. Dlugunovich, Yu.A. Kurochkin. // AIP Conference Proceedings. – 2010. – Vol. 1205. – P. 65–71.

6. *Редьков, В.М.* Спинорный формализм групппы Лоренца и поляризованный свет / В.М. Редьков // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика, математика. – 2010. – № 1. – С. 37–45.

7. *Red'kov, V.M.* Lorentz grpoup and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

8. *Редьков, В.М.* О нахождении матрицы Мюллера оптического элемента по результатам поляризационных экспериментов, теоретико-групповой анализ / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Оптика неоднородных структур – 2011: Материалы III Международной научно-практической конференции, г. Могилев, 16–17 февраля 2011 г. / УО «МГУ им. А.А. Кулешова»; редкол.: В.А. Карпенко (отв. редактор) [и др.]. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – С. 32–35.

9. *Богуш, А.А.* О четырехмерной векторной параметризации группы и некоторых ее подгрупп / А.А. Богуш, В.М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 57–63.

10. *Bogush, A.A.* On Unique parametrization of the linear group $GL(4,C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

11. *Богуш, А.А.* О вектор-параметрах 4-мерных матриц обратных преобразований в теории группы GL(4,C) / А.А. Богуш, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 3. – С. 64–69.

12. *Red'kov, V.M.* On Parametrization of the Linear $GL(4,C)$ and Unitary $SU(4)$ Groups in Terms of Dirac Matrices / V.M. Red'kov, A.A. Bogush, N.G. Tokarevskaya // SIGMA. – 2008. – Vol. 4, Paper 021. – 46 pages.

Поступила в редакцию 12.12.11.